شهادة أستاذ التعليم الثانوي في الرياضيات

السنة الرابعة رياضيات بكالوريا + 5

الوحدة : قياس 2 (نظرية القياس والمكاملة)

الرمز : ر412

الحجم الزمني الأسبوعي، دروس : 1 سا و 30 د

أعمال موجهة: 1 سا و 30 د

النظام : سنوي

المعامل : 2

بطاقة فنية حول وحدة نظرية القياس والمكاملة

قسمت هذه الوحدة إلى شطرين : نظرية القياس والمكاملة 1 ، وتقدم في السنة الثالثة لجميع الطلبة ونظرية القياس والمكالة 2 ، وتقدم في السنة الرابعة للطلبة الذين يدوم تكوينهم 5 سنوات.

الهدف من هذه الوحدة هو تقديم نظرية تكامل لوبيغ. تقدم بعد أن عرف الطالب تكامل ريمان في السنة الأولى والتكاملات الموسعة (المعممة) في السنة الثانية وهي تدرّس بالتوازي مع وحدة التحليل العقدي، التي تحتوي على قسط كبير من المكاملة. لذا فوحدتنا تسعى إلى تعميق وتمتين السند النظري للمكاملة. فلا ينبغي إذن التركيز على الجانب التقني لحساب التكاملات.

توجد، كما هو معروف، عدة كيفيات لتقديم نظرية مكاملة لوبيغ. إن الكيفية المتبعة هنا تعتمد على مفهوم القياس الموجب.

أ) يستحسن قبل الشروع في التدريس أن تقدم رؤوس أقلام البرنامج للطلبة مع التعليق على كل فصل فيه. كأن تقول بأن الهدف من الجزء الأول، وهو "تكامل ستيلجس" هو تقديم بكيفية "محسوسة" موضوع نظرية المكاملة المتمثل في إعطاء معنى لمفهوم مساحة حيز من المستوي (مثلا). يمكن للأستاذ أن ينطلق من مسألة تربيع القطع المكافئ لأرخميدس، ثمّ يعمم حديثه ليتكلم عن تكامل ريمان فتكامل ستيلجس، مع ذكر تطبيقه في المسائل الفيزيائية. وذكر قصور تكاملي ريمان وستيلجس يتحدث عن تكامل لوبيغ ثمّ نظرية القياسة التي تمكن من ادخاله بكيفية ملائمة، مجردة وعامة جدا. ويسعى الأستاذ عند ذكر كل هذا أن يبرر الفصول المختلفة التي تكوّن الوحدة. كما يغتنم هذه المناسبة لتقديم نبذة تاريخية سريعة حول نظرية المكاملة والقياس.

ب) لا يخفي على أحد أن نظرية القياس والمكاملة صعبة بمكان وهي تحتاج إلى توظيف كل المفاهيم التحليلية والمجموعاتية التي تقدم في السنتين الأولى والثانية. لذا يتعين على الأستاذين المحاضر والمطبق أن يقدما وفي الأسبوع الأول وعلى شكل سلسلة تمارين مايلي :

1. مفهومي النهاية السفلى والعليا لمتتالية حقيقية ومتتالية مجموعاتية وخواصها.
2. مفهومي النهايتين السفلى والعليا لتابع عند نقطة مع الخواص.
3. الاستمرار العادي والنتظم ومفهومي التوابع اللّيبشيتزية والهولدرية.

النهايتين البسيطة والمنتظمة لمتتالية تابعية.

4. حساب تكامل ريمان لتوابع بسيطة بالحساب الفعلي لنهاية مجاميع ريمان.
5. دراسة المرور إلى النهاية تحت تكامل ريمان.

6. دراسة مكاملة سلسلة بسيطة عنصر بعنصر.

من المؤكد أن تناول كل التمارين التمهيدية سابقة الذكر يحتاج إلى أكثر من شهر، فعلى المسؤول على الأعمال الموجهة أن ينسق مع المسؤول على المحاضرات لكي ينتهي منها مع نهاية الفصل المتعلق بتكامل ريمان، على أن يعود إلى هذه التمارين من حين إلى آخر عندما يحتاج إلى نتائجها لتوضيح مسألة نظرية ما.

جـ) أمّا فيما يخص تقديم البرنامج نفسه فينبغي فقط القول إن الشطر الأول من الوحدة (أي I) يتجنب الحديث عن قياس الجداء والمكاملة في عدة ابعاد وربطها بالمكاملة في بعد واحد بواسطة مبرهنة فوبيني، ويترك كل هذا إلى الشطر الثاني من الوحدة. لذا عند تناول قياس لوبيغ على $\Re^N$ فينبغي أن ينظر إليه كقياس على هذا الفضاء دون ربطه بقياس لوبيغ على $\Re$، على أن تقدم الأمثلة الخاصة بالتكاملات على R.

---

1. قياسات الجداء

القابلية للقياس على الجداء الدكارتي لفضاءين قيوسين. جداء قياسين σ– متهيين. المكاملة في فضاء الجداء. مبرهنة فوبيني.

2. فضاءات L^P للوبيغ

1. حالة قياس موجب كيفي على مجموعة كيفية X.

تعريف $L^P(X,\mu)$ مع μ قياس موجب و $(+\infty > p \geq 1)$. متباينتا هولدر ومينكوفسكي. $L^p(X,\mu)$ كفضاء بناخي (مبرهنة ف. ريس وفيشر). الفضاء البناخي $L^\infty(X,\mu)$.

2. حالة قياس لوبيغ على جزء مفتوح Ω من $\Re^N$

أجزاء $L^p(\Omega)$ الكثيفة. الحالة الخاصة لقياس لوبيغ على $[a,b]$. متباينتا كلاركسون الأولى والثانية. التحدب المنتظم للفضاء $L^p(\Omega)(1 < p)$. خاصية التعاكس للفضاء $L^p(\Omega)$ من أجل $1 < p$.

مبرهنة التمثيل لريس. دراسة حالتي $L^1(\Omega)$ و $L^\infty(\Omega)$. التقارب الضعيف في $L^p(\Omega)$. جداء اللّف (أو التزويج). المتتاليات الصاقلة وكثافة $C_0^\infty(\Omega)$ و $L^p(\Omega)$. معايير التراص في $L^p(\Omega)$.

3. فضاء هيلبرت L^2

الجداء السلمي على $L^2(X,\mu)$ ، μ قياس موجب. متطابقة شبه المنحرف. متباينة كوشي وشورتز. مبرهنة التمثيل لريس. التقريبات التربيعية.

4. سلاسل فوريي

تعريف سلاسل فوريي. مبرهنة ريمان لوبيغ حول معاملات فوريي لتابع كمول ودوري. تحويلا فوريي وفوريي ويلانشرال. خواصهما.

5. مبرهنة رادون ونيكوديم (Radon-Nikodym)

6. المفاضلة

مشتق قياس والمبرهنات الاساسية المنعلقة بهذا المفهوم. مشتق تابع مستمر مطلقا.

أهم المراجع حول نظرية القياس والمكاملة

(1) ف. ي . سميرنوف (1973 ، 318 ص) ، دروس في الرياضيات العليا، الجزء الخامس (القسم الأول). ترجمة لفيف من الأساتذة، مطبعة جامعة دمشق.

(2) ي. عتيق (1997 ، 131 ص) ، حول نظرية القياس والمكاملة. تذكير نظري، تمارين ومسائل للحل وأخرى مع حلولها المفصلة –، مطبوعة، المدرسة العليا للأساتذة، القبة.

(3) أ. كولوغوروف و س. فومين (1973 ، 1987 ، 786 ص) ، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي، ديوان المطبوعات الجامعية، ترجمة ابوبكر خالد سعد الله.

1. Jean-Pascal ANCEL & Y ves DUCEL (125p.), Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration, Ellipses. Paris.
2. Claude W. BURRILL & John R. KNUDSEN (1969, 419p.), Real variables, Holt, Rinebart and Winston, Inc., New York
3. Jean DIEUDONNE (1968. 406p.), Eléments d'analyse, Tome 2, Gauthiers-Villars, paris.
4. Claude GEORGE (1980, 432p.), Exercices et problèmes d'intégration, Gauthier-Villars, Paris.
5. Roger V. JEAN (1989, 327 p.), Mesure et intégration, Presses de l'Université du Quèbec, Québec.
6. Henri LEBESGUE (1904, 138 p.), Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gathier-Villars, Paris.
7. Lakhdar MEZIANI (1978. 237p.), Mesures et intégration, Cours polycopié, Université d'Alger.
8. Walter RUDIN (1966, 412p.), Real and complex analysis, McGraw-Hill, Prentice-Hill, New York.
9. Malempati Madhusudana RAO (1987, 540p.), Measure theory and intégration, John Wiley & Sons, Inc., New York.
10. M. SAMUELIDES & L- TOUZILLIER (1993, 391 p.) Problèmes d'analyse fonctionelle et d'analyse harmonique, Cépaduès-editions, Toulouse.
11. Angus E. TAYLOR (1965. 437 p.) General theory of finction and integration, Dover Publications, Inc., New york.
12. Alberto TORCHINSKY (1988, 403 p.), Real variables, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York.
13. Richard L. WHEEDEN & Antoni ZYGMUND (1977, 274 p.), Measures and integral : An introduction to real analysis, Marcel Dekker, Inc., New York.