

محمد حازي

الدروس الوافية
في
الفضاءات المترية

مرصع بتمارين محلولة

و

مدرّع بأخرى للبحث

للسنة الثانية من المرحلة الأولى
للجامعات والمدارس العليا العلمية

للمؤلف في ديوان المطبوعات الجامعية:

أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1:
Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2:
Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3:
Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.

ب. في الترجمة:

1. معادلات الفيزياء الرياضية، الجزء الأول.
2. معادلات الفيزياء الرياضية، الجزء الثاني.
3. دروس في الطوبولوجيا.
4. سلاسل وتكاملات.
5. المصفوفات: دروس ومسائل.
6. مسائل وتمارين محلولة.
7. مدخل إلى الطوبولوجيا العامة.
8. دروس في الجبر الخطي.
9. الجبر الخطي.
10. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

الإهداء

إلى

دحمان نفاغ

رفيق الدرب

أنشودة الفالڭ*

يا من معدّله عن العشرة قد طفا
فزت، فانعم اليوم بالتهاني و"الوفا"
قل للذي دون ذلك لا تراع
كلّ امرئ عن أمره يوما قد غفا
ما له أن يركن حين الملمات إلى
اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"
لئن لم يضرب الفوز في حزيران له
موعدا، ولم ينج من أيلول ضيفا
فله في " الفالڭ المقروض " خير معين
على الاستذكار، ومن الهمّ خير "الشا"
يجلي عن وجهه غلس الأسي
فيغدو مثل السماء حين "الصفا"
يأتي ركبكم يرفل بوشاحه
يحمد الله و" الفالڭ " الذي رفا.

* كلام شبه منظم، قلته حين صدور الكتاب " الفالڭ المقروض " في طبعته الأولى بدار ديوان المطبوعات الجامعية. إنه ترويح له لدى جمهور مستخدميه.

لسم الله الرحمن الرحيم

0 تصدير

1.0 مدخل

خلال القرن التاسع عشر عرفت بعض مفاهيم التحليل الرياضي، مثل الفضاءات والامتاليات والدوال المستمرة، دقة متزايدة وتطورًا متناميًا. ومع هذا، فقد كان يلقها من حين لآخر كثير من التناقضات ويشوبها العديد من الأخطاء. لقد ظلت هذه الأجواء سائدة إلى أن تمّ كبحها والحدّ منها مع ظهور المفهوم الدقيق للمسافة والفضاء المترّي مع نهاية القرن المذكور. لقد كان ذلك من قبل الرياضياتيّ فريشييه¹ أساسا. جاءت هذه الأداة الجديدة لتستجيب للحاجة الملحة لتطبيق مفهوم الجوار والمقربة الذي يسمح بإعطاء تمييز دقيق لمفهومي التقارب والاستمرار.

تشكّل الفضاءات المترية التي نتأهّب حاليا لاستعراضها نمطا خاصا من الفضاءات الطوبولوجية. ولعلّ أهمّ ما يميّزها أنّها وثيقة الصلة بفضاء الأعداد الحقيقية، بل لا يمكن قطّ تصوّر دراستها بمعزل عن خواص هذا الفضاء. سوف نتّبع نفس المخطّط الذي أدرجت به الطوبولوجيا الاعتيادية المنشأة على حقل الأعداد الحقيقية، بل نكاد ننقله نقلا حرفيا ولا يعرف، من حيث الشكل، سوى تغيير طفيف لن يلبث أن يظهر جليا عمّا قريب. من الأهمية بمكان أن نشدّ انتباه الدارس إلى الارتباط الوثيق بين عملنا الحاضر ومؤلفنا السابق الموسوم بـ " مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية ". إنّ ما صيغ فيه من مفاهيم يظنّ مقبولا ها هنا. وعليه، فإننا سنتوخّى الحرص أكثر على تسليط الأضواء على ما تنفرد به هذه الفضاءات المترية من مزايا.

هكذا، وبصرف النظر عن الفصل الحالي الذي نأتي فيه بإنشاء الطوبولوجيات الملحقة بمسافات، فإنّ فصول الكتاب الحاضر تطرح من جديد المفاهيم المسيقة في المؤلف المذكور وتضعها في إطارها الجديد. نخصّ بالذكر: التقارب والاستمرار والتراصّ والترابط. سنحرص على ألا نفوت أية فرصة لإبراز أوجه الاختلاف مع ما سبق من الدراسة.

يكتسي الفصل الرابع أهمية بالغة. لقد كرسناه لعرض بعض أنماط التقارب وكذا جملة من مبرهنات شهيرة وهامة، تعدّ ركائز أساسية في التحليل الداليّ.

عمدنا كدأبنا من قبل إلى وضع الإطار النظريّ من تعاريف ومبرهنات وقضايا ثمّ أسهبنا في تدعيمها بأمثلة متنوّعة. أتينا إلى جانبها بجملة من مسائل محلولة وأخرى للبحث يفوق تعدادها المائة وثلاثة وعشرين.

1. Maurice René Fréchet : رياضياتيّ فرنسيّ. ولد في 2 سبتمبر 1878 بماليني وتوفّي في 4 جوان 1973 بباريس. أدخل مفهوم الفضاء المترّي عام 1906.

في الأخير، لن ننهي هذا التمهيد بدون دعوة الدارس إلى الاستئناس بالمراجع التي دوتها في نهاية الكتاب إذا رغب في الاطلاع على البراهين التي أهملناها أو حلول التمارين التي اقتضبناها أو طلبا للمزيد والتعمق ...

2.0 وقفة تعليمية

إن للطبولوجيا عامّة والبنية المترية خاصّة جوانب تعليمية بارزة. لعلّ أحسن وضع يتجلّى فيه هذا الزعم، في نظرنا، يتمثّل في معالجة مفهوم النهاية في كافّة الأطوار التعليمية، لا سيّما الثانوي والجامعي منها فهذا المفهوم المحوري في الرياضيات مطلقا يظلّ صعبا معقّدا، يكتنفه الغموض ويستدعي النفور، ما لم يوضّح الإطار البنيوي الذي يخصّه، ونعني مفهوم الجوار.

ما أكثر وأعمق الصعاب التي يصادفها التلاميذ في الثانويات، بل الطلبة في الجامعات عند تناولهم هذا المفهوم. لقد ضاع هذا الأخير بين متاهات لغوية:

... يؤول إلى، ينتهي إلى، يقترب من، يدنو من، يحوم حول، ...
... صغير، صغير جدّا، كبير، كبير بقدر كاف، كبير جدّا، ...

ومتاهات منطقية ورمزية:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha(\varepsilon, a) > 0 / \forall x \in D_f : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

لو عرضنا على سبيل المثال، على جمهور من الطلبة لم يتشبع بدور الجوار، النظر في وجود النهاية عند النقطة $a = \frac{1}{2}$ للدوال الحقيقية:

$$f(x) = \frac{1}{[x]}; \quad g(x) = \text{Argcth } x; \quad h(x) = \frac{1}{\text{Argcth } x},$$

لسمعنا ورأينا فسيفساء من الإجابات التي تجانب الصواب. من هنا، يتبيّن أنّه لا مناص من الإلمام بكنه الجوانب الطبولوجية للفضاء الذي تساق فيه المفاهيم المطروحة. يستوي في ذلك الدارسون والمدرسون: هؤلاء للاستيعاب وأولئك للتبليغ ...