محمّد حازي

من دفاتر التحليل ...

المتتاليات العدديّة

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها

للمؤلّف في ديوان المطبوعات الجامعيّة:

أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général.
2. المختصر في الطبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14. المقعّد المحلّي للتحليل الدالّيّ.

ب. في الترجمة:

1. معادلات الفيزياء الرياضيّة (جزآن).
2. دروس في الطبولوجيا.
3. سلاسل وتكاملات.
4. المصفوفات: دروس ومسائل.
5. مسائل وتمارين محلولة.
6. مدخل إلى الطبولوجيا العامّة.
7. دروس في الجبر الخطّيّ.
8. الجبر الخطّيّ.
9. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

إهداء

إلى

زوجتي وأولادي

الذين جلبت لهم كتبي حرمانا مزدوجا:

فلا هي تركت لي فراغا زمنيّا فألهيهم

ولا هي درّت عليّ مالا فأغنيهم ...

"أنشودة السبيل[1]"

صه خليلي واقطع القيل
جاء الديوان[2] يزفّ السبيل
هيّا نلق الطالب نبشّره
حقّ أن يفرح وينشر التهليل
علاقات ومجموعات في الجبر عُدّت
تراص وترابط تملأ التحليل
الطاء[3] والصاد[4] بالكاف[5] أُردِفت
جاءت لضيقها الحاء[6] إكليلا
تمارينه نجوم يستنار بها
يعمّر في كنفها النجاح طويلا
قهرت خميس الرسوب فولّت
فلوله القهقرى خزيا ذليلا
لمّا أيقن ألاّ سلطان على الطالب له
علا صوته إلى السماء عويلا.

1. كلام شبه منظّم قلته في الفاتح من نوفمبر 1999 بمناسبة صدور كتاب "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة" بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم الكرّاس الحاضر ...
2. ديوان المطبوعات الجامعيّة.
3. مجموعة الأعداد الطبيعيّة.
4. مجموعة الأعداد الصحيحة.
5. مجموعة الأعداد الناطقة.
6. مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

لسم الله الرحمن الرحيم

0 تصدير

« عجبت لمال صار في ثلث ثلثه وفي ثلث ثلثي ثلثه ثلث درهم
فيا معشر الحسّاب هذي فريضة فكم كان هذا المال قبل التقسّم. »
ابن هيدور

1.0 كلمة لابدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:

المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة؛

المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بڤاريدي– القبّة؛

المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛

المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة.

إنّها وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة"[↓]، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل
يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السبيل" قاطرة لها.

أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرّين في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحيّيه منحنيا على ما بذله من جهد وأغدقه من عطاء وتجشّمه من صعاب وتحمّله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.

أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار الزمن بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود ...

- الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبّة؛
- الأستاذ إبراهيم كاشة المدرسة الوطنية المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛
- الأستاذ مسعود جباربي من المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛
- الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة.

[↓] صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

3.0 مدخل

لو رجعت إلى برنامج الليسانس لأيّ ملمح علميّ أو شبه علميّ في النظام التعليميّ الجامعيّ، قديمه وجديده، وراجعت قسم التحليل من السنة الأولى، لوجدت أنّ فصل المتتاليات يأتي في الرتبة الثانية بعد محطّة إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقيّة. ليس من الصدفة أن يعتلي هذا المقام؛ فإذا ما تمعّنت في هذا البرنامج تبيّن لك أنّه يصبو إلى إحكام السيطرة على دراسة الدوال. ولما كان لمفهوم النهاية الدور المحوريّ في هذه الدراسة جئ بالمتتاليات في هذا الصفّ بوّابة يولج منها هذا المفهوم وأداة طيّعة تخدمه وتبسّط أوجها صعبة له.

يعدّ مفهوم النهاية القطب المركزيّ في التحليل الرياضيّاتيّ وميزته الأساسيّة على الإطلاق. إنّه ولئن لم يعرف القولبة الرياضيّاتيّة الصريحة إلاّ في الأزمنة المتأخرّة إلاّ أنّ تواجده الضمنيّ في التحليل ضارب في القدم، تمتدّ جذوره إلى قرون عديدة قبل الميلاد.

لعلّ إحدى بدايات هذا المفهوم في الظهور بصفة جليّة تعود إلى أعمال الفيلسوف اليونانيّ زينون[7] الشهير بمفارقاته الفلسفيّة. تكشف هذه المفارقات عن تأمّل عميق حول مفهوم المستمرّ وتنطوي على بذور مفهوم النهاية. في هذا الصدد، نجد زينون يقول في غضون القرن الرابع قبل الميلاد في المفارقة الموسومة بمفارقة الانشطار أو التفرّع الثنائيّ، إنّه " إن أراد متحرّك من A بلوغ C عليه أن يصل قبل ذلك إلى B الموجودة بين A و C. ولكن للوصول إلى B ينبغي عليه قبل ذلك، الوصول إلى B' الموجودة بين A و B، وهكذا دواليك ... إلى اللانهاية. لا يمكن للمتحرّك والحال هذه، أن يصل إلى C في مدّة زمنيّة منتهية ".

لا شكّ أنّ ارتباط المتتاليات بمتغيّر انقطاعيّ (مصدره $\mathbb{N}$) يجعل منها أداة مبسّطة للمفاهيم وميسّرة للبراهين. فوجه النهاية عموما والاستمرار خصوصا لا يعرف رونقه إلاّ إذا ارتدى بردته المتتاليتيّة.

يمكن تلخيص دراسة متتالية في كلمة واحدة وهي **طبيعتها**: تقاربا أو تباعدا أو، والأمر سيّان، في تمتّعها بنهاية أو عدمه. يتكفّل هذا الكرّاس بالبحث والتنقيب عن أقصى ما يمكن رصده وحشده من التقنيات والحيل التي بواسطتها تتمّ السيطرة على هذه الطبيعة. غير أنّنا ولئن توسّعنا فيه إلى أقصى ما يتطلّبه برنامج السنة الأولى المستهدف وضعنا حدودا لهذا التوغّل. إنّنا وإن عرّجنا على المتتاليات التراجعيّة الخطّيّة من الرتبة الأولى متوقّفين عند حالتين خاصّتين منها (المتواليات الحسابيّة والهندسيّة)، لم نأت مثلا على ذكر المتتاليات التراجعيّة الخطّيّة من الرتبة الثانية. أملى علينا ذلك هاجس افتقار الجمهور المخاطب لأدوات جبريّة يكون قد لم يبلغها بعد.

7. Zénon d'Élée: فيلسوف يونانيّ. ولد عام 480 وتوفيّ عام 420 قبل الميلاد. اشتهر بمفارقات حيّرت قدماء الريّاضيّاتيّين والفلاسفة، ولم تجد حلاّ إلاّ بعد القرن السابع عشر الميلاديّ إثر التطوّر الذي طال الرياضيّات على مستوى المتتاليات غير المنتهية بالخصوص والتحليل عموما.

لعلّ من المفيد أن نشير هنا بخصوص الصنف الأوّل إلى أنّه ظهر عام 1202م مع المثال الذي قدّمه الرياضيّاتيّ الإيطاليّ فيبوناتشي[8] والذي سقناه في التمرين 55 غير المحلول. تدخل هذه المتتالية في دراسة إحدى المسائل الترفيهيّة التي تعرّض فيها فيبوناتشي إلى تكاثر الأرانب:

"وضع رجل زوجا من أرنبين في مكان معزول من كلّ الجوانب بحائط. ما هو عدد الأزواج الذي سيحصل عليه خلال عام، إذا كان كلّ زوج يولد كلّ شهر زوجا جديدا بدءا من الشهر الثالث من حياته".

هيكل الدفتر الحالي وفق سبعة عشر مقطعا هي:

- المقطع الأوّل: تصدير
- المقطع الثاني: التقارب: تعاريف وخصائص عامّة.
- المقطع الثالث: المتتاليات المحدودة
- المقطع الرابع: خصائص جبريّة.
- المقطع الخامس: المتتاليات المستخرجة.
- المقطع السادس: المتتاليات الرتيبة.
- المقطع السابع: المتتاليات المتجاورة.
- المقطع الثامن: المتتاليات التراجعيّة.
- المقطع التاسع: متتاليات تراجعيّة خاصّة.
- المقطع العاشر: المتتاليات الكوشيّة.
- المقطع الحادي عشر: النهايات غير المنتهية.
- المقطع الثاني عشر: مقاييس أخرى لأصحابها.
- المقطع الثالث عشر: تمارين محلولة.
- المقطع الرابع عشر: حلول.
- المقطع الخامس عشر: تمارين للبحث.
- المقطع السادس عشر: دليل المصطلحات.
- المقطع السابع عشر: دليل الرياضيّاتيّين المذكورين.

دبّجنا الجانب الدرسيّ في هذا الكرّاس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا. جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل. عمدنا بعد ذلك إلى سلسلة من التمارين قدّها ناف عن ستّ وسبعين وحدة، تصدّينا لحلّها بحذق وإمعان. غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل ما كان لنا في ذلك بدّ. ختمنا الكرّاس بلوحة من التمارين التدريبيّة، سعت ثلاثة وستين، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها ولم نكن فيها من الزاهدين. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض

8. Fibonacci : هو الرياضيّاتيّ الإيطاليّ ليوناردو بيزانو المشهور باسم فيبوناتشي (1170م - 1250م). يحفظ له التاريخ فضله الكبير في نقل الرياضيّات العربيّة إلى أوروبا.

المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعّددة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا بل وفي الثانويات، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين.

أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القرّاء مدعوّة لتتبّع كلّ واردة مطمسة وتقفّي كلّ مبهمة منفّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ...

فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

9 فيفري 2012

محمّد حازي