

محمّد حازي

من دفاتر التحليل ...

الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ

نهاياتها واستمرارها

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها

للمؤلف في ديوان المطبوعات الجامعية:

### أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقرّوض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقرّوض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.

12. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.

13. الدروس الوافية في الفضاءات المترية.

14. المقعد المجلي للتحليل الدالي.

15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العددية.

### ب. في الترجمة:

1. معادلات الفيزياء الرياضية (جزآن).
2. دروس في الطوبولوجيا.
3. سلاسل وتكاملات.
4. المصفوفات: دروس ومسائل.
5. مسائل وتمارين محلولة.
6. مدخل إلى الطوبولوجيا العامة.
7. دروس في الجبر الخطي.
8. الجبر الخطي.
9. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

الإهداء

إلى

زوجتي وأولادي  
الذين جلبت لهم كسبي حرمانا مزدوجا:  
فلا هي تركت لي فراغا زمنيًا فألهيهم  
ولا هي درّت عليّ مالا فأغنيهم ...

## ↓ أنشودة الفالج ↓

يا من معدّله عن العشرة قد طفا  
فزتَ، فانعم اليوم بالتهاني و"الوفا"  
قل للذي دون ذلك لا تراع  
كلّ امرئ عن أمره يوما قد غفا  
ما له أن يركن حين الملمات إلى  
اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"  
لئن لم يضرب الفوز في حزيان له  
موعدا، ولم ينج من أيلول ضيفا  
فله في " الفالج المقروض " خير معين  
على الاستذكار، ومن الهمّ خير "الشفأ"  
يجلي عن وجهه غلس الأسي  
فيغدو مثل السماء حين "الصفأ"  
يأتي ركبكم يرفل بوشاحه  
يحمد الله و" الفالج " الذي رفا.

---

↓ كلام شبه منظم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويح له لدى جمهور مستخدميه. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم الكراس الحاضر ...

لسم الله الرحمن الرحيم

## 0 تصدير

« يا حاسبا قد فكّ إقليدسا لم يخط في شكل من أشكاله  
اسمع مقالا حار ذو اللبّ في إيضاح معناه لإشكاله  
فأيّ شيء عشر نصفه ونصف تسعة أمثاله  
فذاك لا يخفى على حاسب يشهد لله بأفعاله. »  
↓ ابن هيدور

## 1.0 كلمة لا بدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:  
المدرسة الوطنيّة للأساتذة بالقبة القديمة؛  
المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بفاردي-القبة؛  
المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحراش؛  
المدرسة الوطنيّة للتخصّير لدراسات المهندسين برويبة.  
إنّما وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السييل إلى الأعداد الحقيقيّة"<sup>↓</sup>، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السييل" قاطرة لها. أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرين في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحييه منحيا على ما بذله من جهد وأغدقه من عطاء وتحمّسه من صعاب وتحمله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.  
أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار الزمن بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود ...

↓ من مقال موسوم بـ:

"Devinettes et problèmes récréatifs dans la tradition mathématique maghrébine: l'exemple d'Ibn Haydoûr"  
لصاحبه الأستاذ دريس لمرايط. أعمال الملتقى المغاربي السابع حول تاريخ الرياضيات العربيّة، الجزء الثاني، المدرسة العليا للأساتذة، مراكش 2002.

↓ صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

- الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنية للأشغال العمومية بالقبة؛
- الأستاذ ابراهيم كاشة المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات بالحراش؛
- الأستاذ مسعود جبارني من المدرسة الوطنية للتحضير لدراسات المهندسين بروبية؛
- الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبة القديمة.

## 2.0 مقدمة

لو رجعت إلى برنامج الليسانس لأي ملامح علمي أو شبه علمي في النظام التعليمي الجامعي، قديمه وحديده، وراجعت قسم التحليل من السنة الأولى، لوجدت أنّ فصل النهايات والاستمرار يأتي في المرتبة الثالثة بعد محطتي إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية والمتتاليات العددية، اللتين أوصلناك إليهما من قبل.

يعدّ مفهوم النهاية القطب المركزي في التحليل الرياضي وميزته الأساسية على الإطلاق. إنّه ولئن لم يعرف القولية الرياضياتية الصريحة إلاّ في الأزمنة المتأخرة إلاّ أنّ تواجده الضمني في التحليل ضارب في القدم، تمتد جذوره إلى قرون عديدة قبل الميلاد.

لعلّ إحدى بدايات هذا المفهوم في الظهور بصفة جلية تعود إلى أعمال الفيلسوف اليوناني زينون<sup>1</sup> الشهير بمفارقاته الفلسفية. تكشف هذه المفارقات عن تأمل عميق حول مفهوم المستمر وتنطوي على بذور مفهوم النهاية. في هذا الصدد، نجد زينون يقول في غضون القرن الرابع قبل الميلاد في المفارقة الموسومة بمفارقة الانشطار أو التفرّع الثنائي، إنّه " إن أراد متحرك من  $A$  بلوغ  $C$  عليه أن يصل قبل ذلك إلى  $B$  الموجودة بين  $A$  و  $C$ . ولكن للوصول إلى  $B$  ينبغي عليه قبل ذلك، الوصول إلى  $B'$  الموجودة بين  $A$  و  $B$ ، وهكذا دواليك ... إلى اللانهاية. لا يمكن للمتحرك والحال هذه، أن يصل إلى  $C$  في مدة زمنية منتهية "

ليس سهلاً البتة للملمّن تقديم مفهوم النهاية. والأمر أصعب للمتلقّي لاستساغته وفهمه ليس في الطور الثانوي فحسب، بل ولدى كثير من الجامعيين. فالألفاظ التي تحيط به كثيرة ومتنوعة: من نهاية، ويؤول إلى، ويقترّب من، وينتهي إلى، ويدنو من، ويجوم حول، ... وصغير، وصغير جداً، وصغير بقدر كاف، وكبير، وكبير جداً، وكبير بقدر كاف، ... وهي لا تفي بالمعنى ولاسيما للمتشبع بالبنية المعقدة لمجموعة الأعداد الحقيقية. ولسان حاله يقول معبراً عن حيرته "متى نكون قريبين من الصفر ونحن نعلم أنّ بين الصفر وأي عدد حقيقي آخر " لصيق " به (وهذا لفظ آخر !!!) أعداداً حقيقية لا تعدّ ولا تحصى". في الواقع، يزول اللبس إذا وضّحنا أنّ الألفاظ المعنية على اختلافها تنوب عن لفظ واحد

1. Zénon d'Élée: فيلسوف يوناني. ولد عام 480 وتوفي عام 420 قبل الميلاد. اشتهر بمفارقات حيرت قدماء الرياضياتيين والفلاسفة، ولم تجد حلاً إلاّ بعد القرن السابع عشر الميلادي إثر التطور الذي طال الرياضيات على مستوى المتتاليات غير المنتهية بالخصوص والتحليل عموماً.

وهو الجوار. إنّ الإغفال عن هذا المفهوم يصعب من الخوض في النهايات. فلو عرضنا، على سبيل المثال، على جمهور من الطلبة لم يتشبع بهذا المفهوم، النظر في وجود النهاية عند النقطة  $\frac{1}{2} = a$  للدالة الحقيقية (مقلوب الجزء الصحيح):

$$f(x) = \frac{1}{E(x)},$$

لسمعنا ورأينا فسيفساء من الإجابات التي تجانب الصواب ...  
هيكل الدفتر الحالي وفق أربعة أقسام هي:

### القسم الأول : النهايات

وفيه خمسة مقاطع هي:

- تعاريف وخصائص عامة،
- مبرهنات أساسية،
- النهايات غير المنتهية،
- أشكال عدم التعيين،
- مقارنة الدوال في جوار نقطة.

### القسم الثاني : الاستمرار

وفيه ثلاثة مقاطع هي:

- تعاريف وخصائص عامة،
- الاستمرار المنتظم،
- مبرهنات أساسية.

### القسم الثالث : الدوال الأولية وعكوسها

وفيه أربعة مقاطع تستعرض الدوال :

- اللوغاريتمية وعكوسها،
- الأسية وعكوسها،
- الزائدية وعكوسها،
- الدائرية وعكوسها.

### القسم الرابع : تمارين

وفيه ثلاثة مقاطع:

- تمارين محلولة،
- حلول،

○ تمارين للبحث.

## القسم الخامس: دليلان

هما:

- دليل المصطلحات،
- دليل الرياضياتيين المذكورين.

دَجَّنا الجانب الدرسيّ في هذا الكراس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا. جلبنا إليه ما رأيناه ضروريًا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكّمل. ثمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها ست وأربعون وحدة، تصدّينا حلّها بحذق وإمعان. غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل ما استطعنا إلى ذلك سبيلا. ختمنا الكراس بلوحة من التمارين التدريبيّة، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها ولم نكن فيها من الزاهدين. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعدّدة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا بل وفي الثانويات، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين. أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القراء مدعوّة لتتبع كلّ واردة مطمسة وتقّي كلّ مبهمة منقّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ...

فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

الجمعة 02 مارس 2012

محمد حازي