محمّد حازي

من دفاتر التحليل ...

التكامل الريمانيّ وحساب الدوال الأصليّة:
شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها

للمؤلّف في ديوان المطبوعات الجامعيّة:

في التأليف:

1) Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général. (1
2) المختصر في الطبولوجيا.
3) Introduction aux espaces normés..
4) السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5) الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6) الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7) S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8) S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9) Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10) Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11) Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12) مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13) الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14) المقعّد المحلّي للتحليل الداليّ.
15) من دفاتر التحليل: المتتاليات العدديّة.
16) من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: نهاياتها واستمرارها.
17) من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: تقعيد نظريّ وتطبيقات.

ب. في الترجمة:

1) معادلات الفيزياء الرياضيّة (الجزء الأول).
2) معادلات الفيزياء الرياضيّة (الجزء الثاني).
3) دروس في الطبولوجيا.
4) سلاسل وتكاملات.
5) المصفوفات: دروس ومسائل.
6) مسائل وتمارين محلولة.
7) مدخل إلى الطبولوجيا العامّة.
8) دروس في الجبر الخطيّ.
9) الجبر الخطّيّ.
10) الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

أنشودة الفالج[↓]

يا من معدّله عن العشرة قد طفا

فزتَ، فانعم اليوم بالتهاني و"الوفا"

قل للذي دون ذلك لا تراع

كلّ امرئ عن أمره يوما قد غفا

ما له أن يركن حين الملمات إلى

اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"

لئن لم يضرب الفوز في حزيران له

موعدا، ولم ينج من أيلول ضيفا

فله في " الفالج المقروض " خير معين

على الاستذكار، ومن الهم خير "الشفا"

يجلي عن وجهه غلس الأسى

فيغدو مثل السماء حين "الصفا"

يأتي ركبَكم يرفل بوشاحه

يحمد اللّه و" الفالج " الذي رفا.

[↓] كلام شبه منظّم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض في الامتحانات والفروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويج له لدى جمهور مستخدميه. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم الكرّاس الحاضر...

الإهداء

إلى

زوجتي وأولادي

الذين جلبت لهم كتبي حرمانا مزدوجا:

فلا هي تركت لي فراغا زمنيّا فألهيهم

ولا هي درّت عليّ مالا فأغنيهم ...

لسم الله الرحمن الرحيم

0 تصدير

« وهبت له خمسا من العمر كاملا وسبعا وتسعا ثمّ ولّى وأعرضا
وقال قليل قلت عندي زيادة فزدت له ثلثي سبع الذي قد مضا
وأبقيت لي عشرين عاما أعش بها وذاك قليل للبقاء إن تمرّضا»
ابن الياسمين[↓]

كلمة لابدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:

المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة؛

المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بقاريدي– القبّة؛

المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛

المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛

إنّها وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة"[↓]، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السبيل" قاطرة لها.

أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرّين في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحيّيه منحنيا على ما بذله من جهد وأغدقه من عطاء وتجشّمه من صعاب وتحمّله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.

أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار السنين بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود ...

الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبّة؛

[↓] من رسالة ماجستير موسومة بـ "الأعمال الرياضيّة لابن الياسمين" لصاحبها الأستاذ التهامي زمولي، المدرسة العليا للأساتذة، القبّة الجزائر؛ 1993.

[↓] صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

الأستاذ ابراهيم كاشة المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛
الأستاذ مسعود جباري من المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛
الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة.

نحن الآن معا على موعد مع درّة من درر برنامج السنة الأولى الجامعيّة بكلّ تخصّصاتها وفروعها. إنّها محطّة الحساب التكامليّ ببوّابتيه: **التكامل الريمانيّ وحساب الدوال الأصليّة**. لقد سبق وأن نثرنا لك أربعا منها، لا شكّ أنّها أنارت لك أفقك وأعانتك على شقّ دربك في الفهم والتحصيل.

2.0 نافذة على التاريخ

ترجع جذور المكاملة دون ريب إلى المسائل ذات الصبغة الهندسيّة التي كانت تواجه المجتمعات البشريّة منذ عهود سحيقة كتلك التي كان يطرحها ويعالجها المصريّون والصينيّون والإغريقيّون الأقدمون: حساب المساحات والحجوم والأطوال ومراكز الثقل والعزوم ... إلخ. فهناك بصمات تاريخيّة على استخدام التكامل في عهد قدماء المصريّين. لقد تأكّد علمهم بصيغ تسمح بحساب الحجوم والمساحات وذلك بتقسيمها إلى أشكال صغيرة غير منتهية معلومة المساحة أو الحجم.

يضع التاريخ العالم الفيلسوف اليونانيّ أرخميدس[1] في مكانة مرموقة بالنظر إلى حجم وأهميّة تركته في هذا الميدان. فقد طوّر هذه الطريقة أكثر واستعملها في حساب مساحات أشكال هندسيّة مثل القطع المكافئ بالخصوص وكذا حساب تقريب لمساحة الدائرة.

تمكّن العرب المسلمون بدورهم من توسيع أعمال الإغريق وتدقيقها، بدءا من القرن الحادي عشر الميلاديّ. فقد قاموا بحسابات شتّى للمساحات والحجوم مستخدمين فيها "المجاميع الريمانيّة[2]". إنّ في أعمال العالم الموسوعة ابن الهيثم[3] آثارا بارزة دالّة على ذلك.

---

1. Archimède: عالم يونانيّ. ولد حوالي 287 قبل الميلاد في سيراكوز. نبغ في الهندسة. برهن باستعمال مضلّعات منتظمة من 69 ضلعا دستوره المشهور لتقريب العدد π:
$$\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}.$$
2. Bernhard Riemann: نسبة إلى الرياضيّاتيّ الألمانيّ ريمان. ولد هذا العالم في 17سبتمبر 1826 بهانوفر ومات في 2 جويلية 1866 بسيلاسكا بإيطاليا. فحص الجوانب الهندسية لدى الدوال ذات متغيّر عقديّ. شكّل هذا العمل فحوى موضوع رسالة الدكتوراه التي حضرها تحت إشراف ڤاوص وناقشها عام 1851.
3. محمّد بن الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو على البصريّ. عالم فيزيائيّ ورياضيّاتيّ عربيّ موهوب. ولد بالبصرة عام 965 م (354 هـ)، وتوفّي بالقاهرة عام 1039 م (430 هـ). له العديد من المؤلّفات والمكتشفات العلميّة، لا سيّما في البصريّات والهندسة. أقرّ بعبقريّته العلم الحديث.

لم يبدأ ظهور التقدّم الملحوظ في علم التكامل إلاّ مع القرن السادس عشر مع أعمال كافاليري[4] وفيرمه[5]. لقد كانت بمثابة الانطلاقة نحو وضع الأسس لعلم التكامل الحديث. جاء بعدهما نيوتن[6] وتورتشيلي[7] مع مطلع القرن السابع عشر فوسّعا هذا العلم وقدّما التلميحات الأولى في وجود صلة بين التكامل والاشتقاق.

تمّ اكتشاف المبرهنة الأساسيّة للتكامل من قبل نيوتن وليبنيز[8]. هذا نصّها:

"لكلّ دالّة حقيقيّة مستمرّة f على $[a,b]$ دالّة أصليّة F. وفضلا عن ذلك، فإنّ تكامل f على $[a,b]$ يعدل الفرق $F(b)-F(a)$ "

لقد أحدثت هذه المبرهنة تقدّما باهرا في علم الحسابين التفاضليّ والتكامليّ. يمكن بدمج هذه العلاقة مع قرينتها الاشتقاق حساب العديد من التكاملات.

اكتسب التفاضل والتكامل مع تطوّر علم النهايات وضوحا ودقّة وهو ما كان ينقصه في عهد نيوتن وليبنيز. وتوطّدت أركانه بفضل كوشي[9] في منتصف القرن التاسع عشر. أوّل من لجأ إلى استعمال النهايات في صياغة التكامل بدقّة كان ريمان. عرف تعميما عبر صور أخرى من قبل لوبيڤ[10] أدّى إلى وضع أسس نظرية جديدة وهي القياس. وتلك حكاية أخرى ...

---

4. Bonaventura Francesco Cavalieri: رياضيّاتيّ وفلكيّ إيطاليّ. ولد في 1598 بميلانود ومات في 30 نوفمبر 1647 ببولوني. كانت أعماله بمثابة إعلان ميلاد الحساب التكامليّ.

5. Pièrre de Fermat: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 17 أوت 1601 ببومان ومات في 12 جانفي 1665 بكاستر. كان وراء مبرهنات عديدة في الجبر والهندسة. ويظلّ اسمه مقرونا بتخمينته الشهيرة التي عبرت به القرون وتعاقب عليها كبار الرياضيّاتيّين: ليست للمعادلة $x^n + y^n = z^n$، حيث n عدد طبيعيّ يفوق 2، حلول صحيحة.

6. Isaac Newton: أعظم علماء انڤلترا على الإطلاق. ولد في 04 جانفي 1642 بوولستورب ومات في 31 مارس 1727 بلندن. اشتغل بالفيزياء والفلك والرياضيّات.

7. Evangelista Torricelli : رياضيّاتيّ وفيزيائيّ إيطاليّ. ولد في 15 أكتوبر 1608 بفائنزه ومات في 25 أكتوبر 1647 بفلورنسا. درس الرياضيات والفلسفة. عند وفاة الفلكيّ غاليليو أخذ مكانه في تدريس الرياضيّات بأكاديمية فلورنسا.

8. Leibniz Gottfried Wilhelm: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 1 جويلية 1646 بليبزيڤ ومات في 14 نوفمبر 1716 بهانوفر. متعدّد الاهتمامات والمواهب. أسّس بأعماله للحساب التفاضليّ. يعود إليه الفضل في وضع رمز التكامل وكثير من الرموز الرياضيّاتيّة المتداولة اليوم.

9. Augustin Louis Cauchy: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أوت 1789 بباريس ومات في 23 ماي 1857 بصو. يعتبر الرياضياتيّ الفرنسيّ الأغزر إنتاجا. تنطوي أعماله العلميّة على أزيد من 800 بحثا في مواضيع متنوّعة في الرياضيات والفيزياء. له باع طويل في تأسيس التحليل الحديث.

10. Henri Léon Lebesgue : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 28 جوان 1875 ببوفيه ومات في 26 جويلية 1941 بباريس. قدّم عام 1902 نظرية تكامل جديد، يحمل اليوم اسمه.

هيكل الدفتر الحالي وفق ثلاثة أقسام هي:

القسم الأوّل : التكامل الريمانيّ وحساب الدوال الأصليّة

وفيه أربعة مقاطع هي:

تكامل الدوال الدرجيّة الريمانيّ،

الدوال المحدودة القابلة للمكاملة ريمانيّا،

دستور تكامل دالّة مستمرّة الريمانيّ،

حساب دوال أصليّة.

القسم الثاني : التكاملات المعمّمة

وفيه ثلاثة مقاطع:

التكاملات المعمّمة من الصنف الأوّل

التكاملات المعمّمة من الصنف الثاني

أشكال أخرى ...

القسم الثالث : تمارين

وفيه ثلاثة مقاطع:

تمارين محلولة،

حلول،

تمارين للبحث.

القسم الرابع : دليلان

دليل المصطلحات،

دليل الرياضيّاتيّين المذكورين.

دبّجنا الجانب الدرسيّ في هذا الكرّاس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا. جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل. ثُمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها ثمانية عشر وحدة، تصدّينا لحلّها بحذق وإمعان. غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل ما استطعنا إلى ذلك سبيلا. ختمنا الكرّاس بلوحة من التمارين التدريبيّة والتقويميّة، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها وكنّا فيها ناصحين. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعّددة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا بل وفي الثانويات، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين.

أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القرّاء مدعوّة لتتبّع كلّ واردة مطمسة وتقفّي كلّ مبهمة منفّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ... فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

القبّة في 19 أفريل 2012

محمّد حازي