محمّد حازي

من دفاتر التحليل ...

الدوال ذات عدّة متغيّرات حقيقيّة:
نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و...

دروس مبسّطة وتمارين منوّعة

للمرحلة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها

للمؤلّف في ديوان المطبوعات الجامعيّة:

أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général.
2. المختصر في الطبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés..
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14. المقعّد المحلّي للتحليل الداليّ.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العدديّة.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
18. التكامل الريماني وحساب الدوال الأصليّة: شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ.
19. المعادلات التفاضلية العادية من الرتبتين الأولى والثانية: تقعيد نظريّ وتطبيقات.

ب. في الترجمة:

1. معادلات الفيزياء الرياضيّة (جزآن).
2. دروس في الطبولوجيا.
3. سلاسل وتكاملات.
4. المصفوفات: دروس ومسائل.
5. مسائل وتمارين محلولة.
6. مدخل إلى الطبولوجيا العامّة.
7. دروس في الجبر الخطيّ.
8. الجبر الخطّيّ.
9. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

أنشودة الفالج[↓]

يا من معدّله عن العشرة قد طفا
فزتَ، فانعم اليوم بالتهاني و"الوفا"
قل للذي دون ذلك لا تراع
كلّ امرئ عن أمره يوما قد غفا
ما له أن يركن حين الملمات إلى
اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"
لئن لم يضرب الفوز في حزيران له
موعدا، ولم ينج من أيلول ضيفا
فله في " الفالج المقروض " خير معين
على الاستذكار، ومن الهم خير "الشفا"
يجلي عن وجهه غلس الأسى
فيغدو مثل السماء حين "الصفا"
يأتي ركبَكم يرفل بوشاحه
يحمد اللّه و" الفالج " الذي رفا.

[↓] كلام شبه منظّم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويج له لدى جمهور مستخدميه. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم الكرّاس الحاضر

الإهداء

إنّ الحاجّة "محجوبة نذادا" من أهلي...
كلّما تذكّرتها تراءت لي السنوات الأولى من دراستي
بدءا من عين الزاوية وانتهاء بالبويرة،
أخلصت في خدمتي وإخوتي دونما كلل...
فإليها أهدي هذا الدفتر ...
تحيّة إكبار لها و... ذكرى لتلك الأيّام ...

لسم الله الرحمن الرحيم

0. تصدير

1.0 كلمة لابدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:

المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة؛

المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بڤاريدي– القبّة؛

المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛

المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة.

إنّها وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة"[↓]، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السبيل" قاطرة لها.

أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرّين
في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحيّيه منحنيا على ما بذله من جهد وأغدقه من عطاء وتجشّمه من صعاب وتحمّله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.

أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار الزمن بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود ...

- الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبّة؛
- الأستاذ ابراهيم كاشة من المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛
- الأستاذ مسعود جباربي من المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛
- الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة.

2.0 مقدّمة

لا يحتاج طالب نبه مثلك إلى حجج للاقتناع بأنّ جلّ ظواهر الحياة المحيطة بنا، إن لم نقل كلّها، توابع لعوامل متعدّدة تضبطها.

[↓] صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

أليس نجاحك في الدراسة متوقّفا على ركائز عدّة، منها المواظبة والمثابرة والمراجعة و...؟

ألا يتوقّف نموّ نبتة بنوع التربة ومقوّمات البذرة والسقي و...؟

أيصل بلدتك مطر دون مياه تتبخّر وغيوم تتلبّد ورياح تسوق و...؟

إنّ هذا نذر من غيث.

ومن منظور القولبة الرياضياتيّة، يزخر حضور الدوال المتعدّدة المتغيّرات في محيطنا المعيشيّ بشواهد لا تعدّ ولا تحصى وهو ملموس لا يكاد يخفى. نجده في :

- مساحة ومحيط قطعة مستطيلة دالّتان لمتغيّرين، طولها وعرضها؛
- حجم مسبح متوازي مستطيلاتيّ دالة لثلاثة متغيّرات، هي أبعاده: طولا وعرضا وارتفاعا؛
- درجة الحرارة عند نقطة ما في مسكن دالّة للإحداثيات الفضائية الثلاثة؛
- ارتفاع نقطة من الكرة الأرضيّة إزاء سطح البحر دالّة لمتغيّرين، هما خطّا الطول والعرض المحدّدان لها؛

إلخ ...

كانت بداية دراسة الدوال الحقيقيّة المتعدّدة المتغيّرات مع القرن الثامن عشر؛ غير أنّ أسسها المتينة لم توضع إلاّ مع مطلع القرن العشرين. كان مفهوم المشتقّ الجزئيّ معروفا مع نهاية القرن السابع عشر، غير أنّ المعادلات ذات المشتقّات الجزئيّة لم تظهر سوى انطلاقا من منتصف القرن الثامن عشر في مسائل ميكانيكيّة.

يعتبر الرياضيّاتيّ الفرنسيّ كليرو[1] ثمّ السويسريّ أولر[2] الأبوين اللذين كانا وراء المشتقّات الجزئيّة. لقد درسا ما شاع الآن تحت تسمية التفاضلية الكلّية لدوال ذات متغيّرين:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy.$$

يبدو أنّ أوّل من استخدم رمز الاشتقاق الجزئيّ هو الفرنسيّ كوندورسيه[3] ضمن مذكّرة حول المعادلات التفاضليّة ذات المشتقّات الجزئيّة عام 1770، ثمّ لوجاندر[4] عام 1786؛ غير أنّ هذا الأخير سرعان ما تركه. تمّت إعادته للاستعمال

---

1. Clairaut Alexis-Claude : عالم فرنسيّ. ولد في 03 ماي 1713 بباريس ومات بها في17 ماي 1765. اهتمّ مبكّرا بالرياضيّات. يعدّ من الأوائل الذين استخدموا المشتقّات الجزئيّة إلى جانب أولر.

2. Leonhard Euler : رياضيّاتيّ سويسريّ موهوب، ولد في 15 أفريل 1707 في بازل ومات في 18 سبتمبر 1783 بسانبترسبورڤ (روسيا). له تركة ضخمة في الرياضيّات. أُعترف له بأنّه أغزر الرياضيّاتيّين إنتاجا لكلّ الأوقات. يرجع إليه الفضل في إدراج الرمز $f(x)$ لدالّة (1734) وe لأساس اللوغاريتم (1727) وi لجذر 1- التربيعيّ (1777) و π للعدد پي (1755) وغيرها كثير...

3. Marie Jean Antoine de Condorcet : فيلسوف ورياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 17 سبتمبر 1743 بريمون ومات في 29 مارس 1794 ببور لارين. اشتهر بأعماله السبقيّة في الإحصاء والاحتمالات وبنشاطه السياسي قبل وأثناء الثورة الفرنسية.

4. Adrien-Marie Legendre: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 18 سبتمبر 1752 بباريس ومات بها في 10 جانفي 1833. كان أهمّ أعماله حول الدوال الناقصيّة، وقد نشره في ثلاثة مجلّدات تحت عنوان " تمارين الحساب التكامليّ"، في الأعوام 1811 و1817 و1819.

من قبل الرياضيّاتيّ الألمانيّ جاكوبي[5] 1841.

لم تتم دراسة المعادلات ذات المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى بصفة شاملة سوى في حدود عام 1770.

في القرن الثامن عشر وأمام مشكلات أفرزت في ميكانيك الجسوم القابلة للتشوّه ونظرية المرونة ظهرت المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الثانية وبالخصوص عند دراسة معادلة الحبال المهتزّة، ومعادلة انتشار الحرارة اللتين كانتا وراء ميلاد سلاسل فوريي[6].

يعود فضل اقتراح الترميزة المألوفة حاليا للمشتقّات الجزئيّة الثانية المزدوجة $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ للعالم جاكوبي.

في عام 1873 أثبت الرياضيّاتيّ الألمانيّ شوارز[7] أنّ صحّة الدستور:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

الشهير في الأدب الرياضيّاتيّ بمبرهنة أو مقياس شوارز، قائمة إذا كان أحد الطرفين مستمرّا بالنسبة إلى كافة المتغيّرات. في هذا الصدد، قدّم الريّاضيّاتيّ الإيطاليّ بيانو[8] الدالّة الواردة في المثال المعالج في الملحوظة 7.1.2:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ;\ (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

للاستشهاد بها على انتفاء الصحّة عن هذا الدستور في حال مبادلة المشتقّات الجزئيّة في غياب الاستمرار ...

هيكل الدفتر الحالي وفق ثلاثة فصول ودليلين هي:

- الأول: النهايات والاستمرار،
- الثاني: الاشتقاق الجزئي والقابليّة للمفاضلة،
- الثالث: النشر التايلوريّ والنقاط الحدّية؛
- دليل المصطلحات؛
- دليل الرياضيّاتيّين المذكورين.

---

5. Carl Gustav Jacobi: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 10 ديسمبر 1804 ببوستدام ومات في 16 فيفري 1851 ببرلين. اشتغل في ميادين مختلفة, له اكتشافات هامّة لا سيما في نظرية الأعداد. اشتهر بأعماله في المحدّدات التي خصّص لها مذكّرة نشهرها 1841.
6. Joseph Fourier: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 مارس 1768 بأكسير ومات في 16 ماي 1830 بباريس. درس بمدرسة باريس العليا للأساتذة على أيدي لاڤرانج ولابلاس. بدأ بالتدريس بالمدرسة المتعدّدة التقنيات قبل أن يشارك في حملة نابليون على مصر. نشر عددا هامّا من البحوث في الرياضيّات الصرفة والتطبيقيّة.
7. Hermann Amandus Schwarz: رياضيّاتيّ نمساويّ. ولد في 25 جانفي 1843 بهرمسدورف (بولونيا الحالية) ومات في 30 نوفمبر 1921 ببرلين. درس الكيمياء ثمّ الرياضيّات تحت تأثير فيرشتراس. يحتفظ له التاريخ بمتباينته في التكاملات.
8. Giuseppé Peano : فيلسوف ورياضيّاتيّ إيطالي. ولد في 27 أوت 1858بكونيو (إيطاليا) ومات في 20 أفريل 1932 بطورينو. انصبّ اهتمامه حول المنطق والإنشاء الصوري لكائنات رياضيّاتيّة. له السبق في استعمال رمزي الاتحاد والتقاطع.

دبّجنا الجانب الدرسيّ في هذا الكرّاس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا.

جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل. ثُمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها ناف عن تسع وخمسين وحدة، تصدّينا لحلّها بحذق وإمعان. غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل جهد الإمكان. ختمنا الكرّاس بلوحة من مئة وأربعة تمارين تدريبيّة، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها ولم نتقشّف. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعّددة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين.

أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القرّاء مدعوّة لتتبّع كلّ واردة مطمسة وتقفّي كلّ مبهمة منفّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ... فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

الرباط في 06 جانفي 2014

محمّد حازي