

Mohammed Hazi

De mes cahiers d'analyse ...

Suites numériques

Cours détaillé et exercices résolus

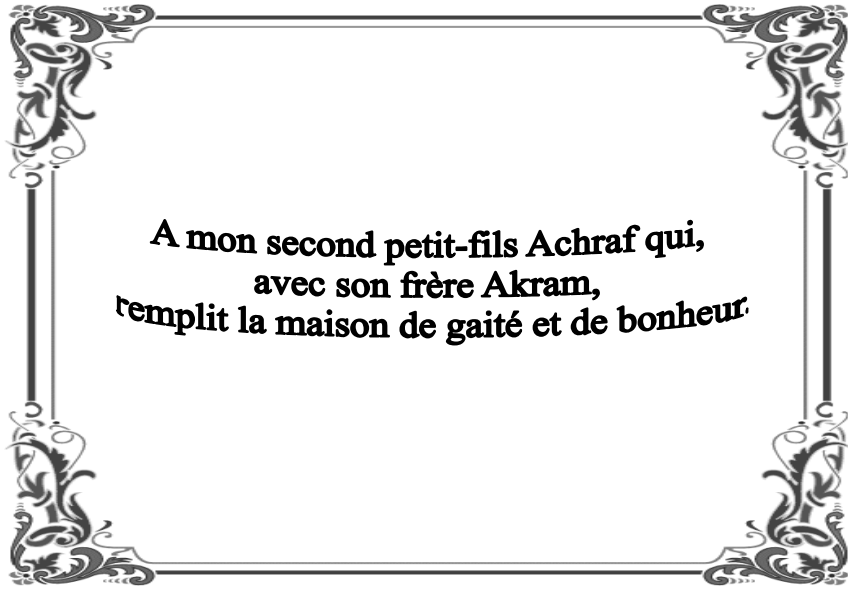
Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1:
Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2:
Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3:
Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المترية.
14. المقعد المحلي للتحليل الدالي.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العددية.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: تعيد نظري وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصلية: شق نظري وآخر تطبيقي.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبين الأولى والثانية: تعيد نظري وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدة متغيرات حقيقية: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصلة وتمارين متنوعة.
21. Tout sur \mathbb{R} : Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.
7. Cours d'algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.



0.0 Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce deuxième cahier, le premier et les cinq à venir, sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux Kouba, Alger ;
Ecole Nationale des Travaux publics de Kouba, Alger ;
Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;
Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyr avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exiguïté du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétronable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Atik Youcef et Smail Djebali de l'ENS de Vieux-Kouba,
Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;
Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;
Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

0.1 Notes introductives

« Il est vraiment étonnant que les mathématiques, par essence abstraites, s'avèrent très efficaces pour résoudre les difficultés de la vie courante. »

Georges Glaeser

S'il vous arrive de jeter un coup d'œil sur le programme de licence de tout profil scientifique dans le système d'enseignement universitaire, ancien et nouveau, ou classique et LMD, et si vous feuillotez la partie analyse de la première année, vous trouverez que le chapitre traitant des suites vient en deuxième position après celui portant sur l'introduction de l'ensemble des nombres réels. Cette position n'est pas fortuite. En zébrant d'un vu le dit programme on constate qu'il prône la bonne maîtrise de l'étude de fonctions. Comme la notion de limite s'adjuge un rôle privilégié dans cette étude, quoi de plus normal que de placer l'étude des suites comme portail d'entrée de cette notion et un outil maniable et puissant la servant et simplifiant beaucoup de ses côtés ardu.

La notion de limite est la charnière centrale de l'analyse mathématique. Elle est sa première caractéristique par excellence. Même si elle n'a connu sa formulation explicite rigoureuse que vers la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, son omniprésence dans les confins et dédales mathématiques est sentie longtemps bien avant, prenant ses racines plusieurs siècles avant l'ère chrétienne. C'est ainsi, qu'au IV^{ème} siècle avant l'ère chrétienne, les travaux de Zénon¹ à travers ses paradoxes philosophiques dévoilent une profonde réflexion autour de la notion du continu et renferment des graines en relation directe avec la notion de limite. Dans son paradoxe de dichotomie on y lit :

« Si un mobile démarrant d'un point A veut atteindre un point C il doit d'abord arriver au point B situé entre A et C . Or pour rejoindre B il doit arriver au point B' situé entre A et B et ainsi de suite ... à l'infini. De ce fait, le mobile ne pourra jamais rejoindre C dans un temps fini. »

Nul doute que la dépendance des suites d'une variable discrète (de source \mathbb{N}) fait d'elles un outil étoffant des notions, simplificateur des formes et facilitateur des preuves. La limite en général et la continuité en particulier ne connaissent leur aspect descriptif attrayant et leur maniabilité opérationnelle efficace que lorsqu'elles s'expriment via les suites. C'est aussi le cas de l'introduction des nombres réels de Cantor² par les suites de Cauchy³.

L'étude d'une suite peut être résumée en une seule phrase : déterminer sa **nature**, autrement dit, examiner sa **convergence** ou sa **divergence**, ou ce qui revient au même, **l'existence ou non** de sa limite.

Le présent cahier aspire à mettre la main sur un maximum de techniques et « astuces » avec lesquelles on assoit la maîtrise de cette « nature ». Bien entendu, cette prospection s'est donnée des bornes à ne pas dépasser, dictées essentiellement par le plafond des exigences du programme de 1^{ère} année visé. Par exemple, on a bien viré par les suites récurrentes linéaires du premier ordre, avec un arrêt sur deux cas particuliers (progressions arithmétiques et géométriques) mais on a toutefois délibérément occulté les suites récurrentes linéaires du second ordre. Celles-ci nécessitent des outils algébriques que le public visé n'a pas encore entre les mains.

1. Zenon (480-420 A.J) : Philosophe Grec. Célèbre pour ses paradoxes, dont celui rapporté.

2. Georg Ferdinand Cantor (3/3/1845-6/1/1866) : Mathématicien d'origine Russe Il étudia en Allemagne sous Weierstrass et Kronecker. En 1872, il a introduit la notion de nombre réel comme limite d'une suite de nombres rationnels. Sa contribution en théorie des nombres est immense. Certains de ses résultats étaient source de discordes avec ses contemporains dont Poincaré et Kronecker au point de détériorer sa santé.

3. Augustin Louis Cauchy (21/8/1789-22/5/1857) : Mathématicien Français. Son immense œuvre scientifique renferme plus de 800 articles sur les sujets mathématiques et physiques les plus variés. Il est à l'origine de l'analyse moderne.

Il est peut être utile de signaler au sujet du premier type qu'il a vu le jour vers 1202 avec l'exemple présenté par le mathématicien Italien Fibonacci⁴, repris dans l'exercice test 56. Cette suite entre dans le cadre d'un problème de mathématiques récréatives décrivant la reproduction de lapins :

«Une paire de lapins est posée dans un lieu isolé de tout côté par un mur. Quel est le nombre de paire obtient-on au bout d'une année sachant que toute paire met bas chaque deux mois une nouvelle paire à partir du troisième mois de sa vie. »

Le présent cahier est réparti en treize sections et trois index:

- 1) Convergence : Définitions et propriétés générales ;
- 2) Suites bornées ;
- 3) Propriétés algébriques ;
- 4) Suites monotones
- 5) Sous-suites extraites ;
- 6) Suites récurrentes ;
- 7) Suites récurrentes particulières
- 8) Suites de Cauchy ;
- 9) Limites infinies ;
- 10) Encore quelques autres critères ;
- 11) Énoncés des exercices résolus ;
- 12) Solutions ;
- 13) Exercices Test.

Les notions de chacune des dix premières sections, charriant la partie dite du cours, sont détaillées avec minutie de façon qu'elles soient accessibles sans peine à la première lecture. Beaucoup d'exemples illustratifs y participent ce qu'il en soit ainsi. Il est aussi fait appel en renfort à une série de 77 exercices éclairants, triés à dessein, dont les solutions, aussi variées que possible, sont rapportées avec soin. Le cahier est clos par une planche de 67 exercices d'entraînement et d'évaluation, présentant au lecteur une occasion de plus pour tester ses acquis et élargir son horizon.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant socialement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet... etc.)

- Être animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quel que soit l'effort physique, temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.

- Être continuellement habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués et avoir l'envie vivace de toujours en faire davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions qu'il peut s'améliorer et être plus utile[↓].

4. Fibonacci (1170-1250) : Mathématicien Italien. De son vrai nom Léonardo de Pise (ou Pisano). Il est pour beaucoup dans le transfert des mathématiques arabes vers l'Europe via l'Italie.

↓ Pour cela, il suffit d'un clic à cette adresse : hazi@hotmail.fr

Alger le 20 Avril 2015
Mohammed Hazi.