

Mohammed Hazi

De mes cahiers d'analyse ...

**Fonctions réelles d'une variable réelle:
Limites, Continuité, et ...**

Cours détaillé et exercices résolus

Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المترية.
14. المقعد المجلي للتحليل الدالي.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العددية.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: تقعيد نظري وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصلية: شق نظري وآخر تطبيقي.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبين الأولى والثانية: تقعيد نظري وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدّة متغيرات حقيقية: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصلة وتمارين منوعة.
21. De mes cahiers d'analyse : Tout sur \mathbb{R} : Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.
22. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques. Cours détaillé et exercices résolus.

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.
7. Cours d'algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.

0.0 Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce premier cahier et les six à venir sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux Kouba, Alger ;
Ecole Nationale des Travaux publics de Kouba, Alger ;
Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;
Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyr avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exiguïté du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétrônable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Youcef Atik et Smail Djebali de l'ENS de Vieux-Kouba,
Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;
Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;
Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

0.1 Notes introductives

« La démonstration a deux aspects : convaincre et expliquer :
Le premier permet d'aboutir à la conclusion qu'un résultat est vrai, le deuxième permet d'expliquer pourquoi il est vrai. »

Gilbert Arsac.

Fonction, limite et continuité, voilà trois mots par lesquels vous n'avez aucune chance de rencontrer un étudiant du premier cycle universitaire, de toutes spécialités confondues, à qui ils ne sont pas familiers. Cela ne peut être autrement puisque ce trio de termes, du reste inséparables, les côtoie et d'une manière quasi journalière, depuis le Secondaire. Et pourtant rares sont ceux qui sont au fait des cheminements empruntés par chacune de ces notions, les deux premières notamment. Leurs parcours sont si disparates que rien ne présageait leur rencontre.

Le concept de fonction a pris des chemins « tortueux » pour asseoir son existence puis sa formalisation et son sens. Un bref survol historique permet de constater que, bien qu'il ait été pressenti depuis l'antiquité, il s'est surtout développé à partir des travaux de Descartes¹ en géométrie analytique. Il a longtemps été associé à une expression analytique ou représentable analytiquement.

Aux premières prémices de l'analyse mathématique au XVII^e et XVIII^e siècle, alors que les fonctions étaient principalement considérées sous leurs seuls aspects graphiques «les lignes », la continuité ne pouvait qu'aller de soi, et donc passer quasiment inaperçue.

C'est Euler² qui donna implicitement le véritable coup d'envoi au courant de définition d'une fonction comme une règle de correspondance entre deux ensembles. Selon lui, ce sont les apports de Lobatchevski³ et Dirichlet⁴ qui amenèrent les mathématiciens à définir la fonction avec la notion de correspondance. Par contre, pour Lebesgue⁵, c'est Newton⁶ qui fut le premier à avoir cette idée de correspondance pour la fonction. Cependant, ses réflexions ne l'amènèrent pas à une formalisation mathématique.

Cette idée de correspondance fut graduellement reprise en algèbre et les livres d'analyse commencèrent à définir la fonction comme une correspondance entre un ensemble E et un ensemble F telle que usitée de nos jours.

La notion de limite est la charnière centrale de l'analyse mathématique. Elle est sa première caractéristique par excellence. Même si elle n'a connu sa formalisation et sa formulation explicite rigoureuse que vers la deuxième moitié du XIX^e siècle, son omniprésence implicite dans les confins et dédales mathématiques est sentie longtemps bien avant, prenant ses racines plusieurs

-
1. René Descartes (31/3/1596-11/2/1650) : Grand Mathématicien et Philosophe Français. Il est le fondateur de la géométrie analytique.
 2. Leonhard Euler (15/4/1707-18/9/1783) : Mathématicien Suisse. Il est reconnu mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Il est le père des symboles, aujourd'hui usuels : $f(x)$ pour la fonction (1734), e pour la base des logarithmes (1727), i pour la racine carrée de -1 (1777) et π pour le nombre pi (1755) et beaucoup plus encore...
 3. Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (01/12/1792 - 24/2/1856) : Mathématicien Russe. Célèbre pour sa géométrie non euclidienne
 4. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/2/1805-5/5/1859) : Mathématicien Allemand, d'origine Belge. Ses travaux portent sur l'analyse, l'algèbre et la mécanique.
 5. Henri Léon Lebesgue (28/6/1875 - 26/6/1941) : Mathématicien Français. Il soutient sa thèse en 1902 sous le titre: *Intégrale, longueur, aire*. Il y présente la théorie d'une nouvelle intégrale, qui porte son nom de nos jours.
 6. Isaac Newton (4/1/1642 - 31/3/1727) : Grand mathématicien, physicien et astronome Anglais.

siècles avant l'ère chrétienne. C'est ainsi, qu'au IV^{ème} siècle avant cette ère, les travaux du Grec Zénon⁷ à travers ses paradoxes philosophiques dévoilent une profonde réflexion autour de la notion du continu et renferment des graines en relation directe avec la notion de limite. Dans son paradoxe de dichotomie on y lit :

« Si un mobile démarrant d'un point A veut atteindre un point C il doit d'abord arriver au point B situé entre A et C. Or pour rejoindre B il doit arriver au point B' situé entre A et B et ainsi de suite ... à l'infini. De ce fait, le mobile ne pourra jamais rejoindre C dans un temps fini. »

Il est nullement aisé pour l'enseignant de présenter la notion de limite. Il est encore plus ardu de l'approprié et l'assimiler, non seulement pour les élèves du Secondaire mais aussi pour beaucoup d'étudiants du premier cycle universitaire.

Les expressions langagières « rodant » autour de cette notion sont nombreuses et diverses : tend vers ; s'approche de ; ... et petit ; très petit ; suffisamment petit ; ... et grand ; très grand ; suffisamment grand, ... etc. Aucune ne cerne le sens, surtout pour celui bien au fait de la structure complexe de l'ensemble des nombres réels. Il ne peut en effet, être que perplexe ne sachant pas, par exemple, quand est ce qu'on est proche de zéro alors qu'on sait qu'entre zéro et tout autre réel lui collant (et c'est là une autre expression !) existe une quantité non dénombrable d'autres réels !

En fait, l'ambiguïté peut sinon disparaître, du moins s'atténuer si l'on s'accorde à dire que le sens commun visé par les expressions citées dans leur diversité est celui de **voisinage**. Perdre de vue cette notion rend ardue voire délicate toute entreprise d'approche des limites. Si l'on propose par exemple à un public d'étudiants, pas au fait de cette notion, d'examiner l'existence de la limite de la fonction réelle $f(x) = \frac{1}{E(x)}$, ($E(x)$ étant la partie entière de x) au point $x_0 = \frac{1}{2}$ il est fort à parier que nous verrons et entendrons une mosaïque de réponses obsolètes tapant à côté ...

Le présent cahier comporte cinq chapitres.

Chapitre Premier : Limites

Il se compose de cinq sections qui sont :

- Définitions et propriétés générales ;
- Théorèmes fondamentaux ;
- Limites infinies ;
- Formes indéterminées ;
- Comparaison de fonctions au voisinage d'un point.

Chapitre deuxième : Continuité

Il se compose de trois sections qui sont :

- Définitions et propriétés générales ;
- Continuité uniforme ;
- Théorèmes fondamentaux.

Chapitre Troisième : Fonctions élémentaires et leurs inverses

Il se compose de quatre sections qui sont :

- Fonctions logarithmes et leurs inverses ;
- Fonctions exponentielles et leurs inverses ;
- Fonctions hyperboliques et leurs inverses ;

7. Zenon (480-420 A.J) : Philosophe Grec. Célèbre pour ses paradoxes, dont celui rapporté.

- Fonctions circulaires et leurs inverses.

Chapitre Quatrième : Exercices

Il se compose de trois sections qui sont :

- Exercices résolus ;
- Solutions ;
- Exercices Test.

chapitre Cinquième : Index

Ils sont trois :

- Index terminologique ;
- Index des Savants cités ;
- Index bibliographique.

Comme ces deux prédécesseurs, le présent cahier a bénéficié de tous nos soins pour lui assurer une approche accessible et agréable. Dans cette optique, il est fait appel à beaucoup d'exemples d'illustration et exercices de consolidation dont certains résolus et d'autres laissés comme compléments pour évaluation et agrément.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant socialement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet... etc.)
- Etre animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quel que soit l'effort physique temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.
- Etre habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués ou de livres consultés et avoir l'envie vivace de toujours en faire plus et consulter davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions[↓] qu'il peut s'améliorer et être plus utile.

Alger le 5 Juillet 2015
Mohammed Hazi.

[↓] Il suffit d'un clic à cette adresse : hazi@hotmail.fr