

Mohammed Hazi

De mes cahiers d'analyse ...

**Fonctions réelles d'une variable réelle:
Dérivabilité, dérivées
Développements limités**

Cours détaillé et exercices résolus

Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المترية.
14. المقعد المجلي للتحليل الدالي.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العددية.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: تععيد نظري وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصلية: شق نظري وآخر تطبيقي.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبين الأولى والثانية: تععيد نظري وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدة متغيرات حقيقية: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصلة وتمارين منوعة.
21. De mes cahiers d'analyse : Tout sur \mathbb{R} : Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.
22. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques. Cours détaillé et exercices résolus.
23. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites, continuité ... Cours détaillé et exercices résolus

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.
7. Cours d'algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.



0.0 Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce premier cahier et les six à venir sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux Kouba, Alger ;
Ecole Nationale des Travaux publics de Kouba, Alger ;
Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;
Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyr avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exigüité du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétronable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Youcef Atik et Smail Djebali de l'ENS de Vieux-Kouba,
Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;
Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;
Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

0.1 Notes introductives

« Le nez de Cléopâtre, s'il eut été plus court, toute la face de la Terre aurait été changée ».
Blaise Pascal.

Dans la quête de nouvelles facettes des fonctions réelles d'une variable réelle, cette quatrième escale dévoile deux importantes notions : la dérivée et le développement limité.

La dérivée a une longue histoire. Elle est solidement liée à la tangente. Leur association remonte aux temps très anciens, ceux des Grecs notamment, pendant lesquels les travaux géométriques ont connu un essor fantastique. La dérivée a « vécu » à l'ombre de la tangente jusqu'au XVII^e siècle où l'importance de sa maîtrise s'est accentuée du fait de l'avènement de nouveaux développements dans ses applications. Il est bien assis que la notion de dérivée a fait ses premiers pas vers la lumière avec les écrits de Leibniz¹ et Newton². Elle fut ensuite au centre des travaux des grands savants du XVIII^e siècle, ceux de l'Europe occidentale notamment. Et avec l'achèvement de la maîtrise minutieuse de la notion de limite dans la deuxième moitié du XIX^e siècle les travaux de Lagrange³, Bolzano⁴ et Weierstrass⁵ ont permis la pose de la définition précise de la dérivée telle qu'elle est connue de nos jours.

On ne connaît presque pas de domaine de la physique et encore moins des mathématiques, où la dérivée n'est pas présente d'une manière ou d'une autre, tellement ses applications sont multiples et diverses. Ainsi, on la trouve centrale dans l'étude locale d'une fonction. C'est le grand arbitre dans ses variations, sa monotonie, sa jouissance d'extrémums, la convexité ou la concavité de son graphe, l'existence ou non de tangente à ce graphe, ... etc. Chez la voisine la physique, la cinétique est quasiment bâtie sur la dérivée. Dès qu'une personne entame une discussion sur la vitesse ou l'accélération elle est vite happée par le recours à la dérivée, lui facilitant une formulation concise et lui enjolivant un exposé limpide ...

Quatre chapitres charpentent le présent cahier.

Chapitre Premier : Dérivabilité : Assise théorique et Applications

Trois sections le composent :

Section une : Définitions et propriétés générales ;

Section deux : Règles de calcul ;

Section trois : Théorèmes fondamentaux.

-
1. Gottfried Wilhelm Leibniz (01/07/1646 – 14/11/1717) : Mathématicien Allemand. Il a, avec Newton, fondé le calcul différentiel. C'est à lui que reviennent beaucoup de symboles mathématiques utilisés de nos jours dont celui de l'intégrale \int .
 2. Isaac Newton (04/01/1642 – 31/03/1727) : L'un des plus grands savants Britanniques de tous les temps. Il a travaillé dans les domaines de la physique, des mathématiques et de l'astronomie. Il est avec Leibniz le père fondateur du calcul différentiel.
 3. Joseph Louis Lagrange (25/01/1736 – 10/04/1813) : Mathématicien Italien. Ses travaux concernent la physique, l'analyse mathématique et la théorie des nombres. Il a d'une manière notable contribué à la mécanique analytique et à l'astronomie. C'est à lui que revient le symbole de la dérivée f' .
 4. Bernhard Bolzano (5/10/1781-18/12/1848) : Mathématicien et philosophe Tchèque de langue Allemande. Ses travaux portent essentiellement sur les fonctions, la logique et la théorie des nombres.
 5. Karl Theodor Weierstrass (31/10/1815-19/2/1897) : Mathématicien Allemand. Son œuvre mathématique renferme la théorie des fonctions abéliennes et elliptiques et la théorie des fonctions analytiques.

Chapitre Deuxième : Développements limités : Assise théorique et Applications

Trois sections le composent :

Section une : Développement limité au voisinage zéro,

Section deux : Développement limité au voisinage d'un point x_0 ;

Section trois : Développement généralisé au voisinage d'un point.

Chapitre Troisième : Exercices

Trois sections le composent :

Section une : Exercices résolus ;

Section deux : Solutions ;

Section trois : Exercices Test.

Chapitre Quatrième : Trois Index

Index terminologique :

Index des savants cités ;

Index bibliographique.

Pour apprécier cette marche et la rendre accessible, voire agréable, on a pas lésiné sur les moyens à même d'apporter la clarté, boostant la compréhension et assurant l'assimilation. C'est dans cette optique qu'il est fait appel à beaucoup d'exemples d'illustration et exercices de consolidation dont certains résolus et d'autres laissés comme compléments pour évaluation et agrément.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant socialement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet... etc.)

- Etre animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quel que soit l'effort physique temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.

- Etre habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués ou de livres consultés et avoir l'envie vivace de toujours en faire et consulter davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions[↓] qu'il peut s'améliorer et être plus utile.

Semmache le 12 Aout 2015

Mohammed Hazi.

[↓] Il suffit d'un clic à cette adresse : hazi@hotmail.fr