Mohammed Hazi

De mes cahiers d'analyse …

Equations différentielles ordinaires du premier et second ordre: Assise théorique et applications

Cours détaillé et exercices résolus

Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14. المقعّد المجلّي للتحليل الداليّ.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العدديّة.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصليّة: شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبتين الأولى والثانية: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدّة متغيّرات حقيقيّة: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصّلة وتمارين منوّعة.
21. De mes cahiers d'analyse : Tout sur $\mathbb{R}$: Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.
22. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques. Cours détaillé et exercices résolus.
23. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites, continuité … Cours détaillé et exercices résolus
24. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivabilité, dérivées et développements limités. Cours détaillé et exercices résolus.
25. De mes cahiers d'analyse : Intégrale de Riemann, calcul de primitives et intégrales généralisées. Cours détaillé et exercices résolus.

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.
7. Cours d'algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.

A mes deux oncles:
Mohamed dit Bourazoz et Mouloud dit Chabane!

Qu'Allah nous aide à supporter la dispartition de Dahmane.

0.0 Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce sixième cahier, les cinq parus et le dernier à venir, sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux-Kouba, Alger ;
Ecole Nationale des Travaux publiques de Kouba, Alger ;
Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;
Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyr avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exiguïté du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétrônable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Youcef Atik et Smail Djebali de l'ENS de Vieux-Kouba,
Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;
Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;
Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

0.1 Notes introductives

"Prévisibilité : le battement d'aile d'un papillon au Mexique peut-il provoquer une tornade au Texas ?"

Edward Norton Lorenz, 1972.

L'apparition[1] de la notion d'équation différentielle dans le monde mathématique remonte à l'avènement du calcul différentiel et intégral, inventé indépendamment par Newton[2] et Leibniz[3] dans les trente dernières années du 17ème siècle.

Aussitôt que le concept de la dérivée fut suffisamment compris et que les scientifiques eurent assez d'éléments pour la travailler, elle commença à faire son apparition dans des équations issues des problèmes d'origine d'abord géométrique comme la détermination d'une courbe dont les tangentes sont soumises à une condition donnée ; puis mécanique pour traiter des problèmes de dynamique comme par exemple :

- Mouvement du pendule circulaire,
- Problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonienne.
- Problème de l'étude de mouvements de corps "élastiques" (tiges, ressorts, cordes vibrantes).

Ainsi, l'histoire de cette notion, dont le terme est dû à Leibniz en 1676, connaît un développement riche et marqué par la géométrie, la mécanique et l'astronomie.

Née en tant qu'outil, comme pratiquement tout concept mathématique, la notion d'équation différentielle fit tout d'abord l'objet d'études en vue d'une résolution algébrique pendant les deux premiers siècles de son apparition. Jusqu'à l'arrivée en scène de Liouville[4] au $19^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens ne cessèrent d'espérer trouver un jour ou l'autre une méthode complète de résolution applicable à toute sorte d'équations différentielles. L'une des premières tentatives remonte à Newton dans son « *Treatise on Fluxional Equations* », écrit vers 1671 et publié en 1736, et qui ne trouve pas suffisamment d'échos dans le développement de la théorie. Tout en classant les équations différentielles en trois groupes : celles de la forme $y' = f(x)$ ou $y' = f(y)$; celles de la forme $y' = f(x, y)$ et enfin celles à dérivée partielle, il proposa une résolution par des séries infinies, et prétendit que cette méthode permettait de résoudre toute équation différentielle.

Un obstacle important relativement à la résolution algébrique fut franchi par J. Bernoulli[5] qui découvrit la méthode d'intégration des équations différentielles à variables séparables, développée

---

1. Ces notes sont inspirées en grande partie de l'approche historique de la thèse citée dans [9],

2. Isaac Newton (04 /01/1642 – 31/03/1727) : c'est l'un des plus grands savants britanniques de tous les temps. Il a travaillé dans les domaines de la physique, des mathématiques et de l'astronomie. Il est avec Leibniz le père fondateur du calcul différentiel.

3. Gottfried Wilhelm Leibniz (01 /07/1646 – 14/11/1717) : Mathématicien allemand. Il a, avec Newton, fondé le calcul différentiel. C'est à lui que reviennent beaucoup de symboles mathématiques utilisés de nos jours dont celui de l'intégrale $\int$.

4. Jacques Liouville (24/3/ 1809-8/9/1882) : Mathématicien et académicien français. Il a travaillé dans de nombreux domaines, de l'astronomie aux mathématiques pures, sur les équations aux dérivées partielles notamment. Il est le découvreur en 1844 des nombres transcendants.

5. Jacques Bernoulli (21/12/ 1654-16/8/1705) : Mathématicien et astronome suisse d'origine belge. Ses travaux sont de première importance dans de nombreux domaines : calcul différentiel, calcul intégral (le terme est de lui), séries, probabilités et étude de courbes qui l'amène à résoudre certaines équations différentielles.

et généralisée par la suite par Leibniz qui aussitôt, fut capable d'intégrer les équations différentielles homogènes et ensuite les équations linéaires du premier ordre. Un peu plus tard, Taylor[6] utilisa les séries pour résoudre les équations différentielles.

Dès le début du 18ème siècle, munis de ces techniques élémentaires, les mathématiciens se lancèrent dans la découverte de ce que J. Bernoulli appelle «le continent inconnu» peuplé par les équations différentielles qui régissent des phénomènes mécaniques. Ils commencèrent à adapter ces équations et les méthodes de résolution découvertes à des problèmes issus de l'astronomie et de la mécanique. Comme les deux grands traités, celui de mécanique analytique (1788) de Lagrange[7] et celui de mécanique céleste (paru entre 1799 et 1825) de Pierre-Simon de Laplace[8] - en témoignent, la mécanique, considérée comme la «science du siècle», est exploitée au maximum pour les applications de ce continent.

Grâce aux discussions avec D. Bernoulli[9] sur ce qu'est une fonction et ce qu'est une solution d'une équation différentielle,

Euler[10], qui maîtrisait désormais les fonctions, ne tarda pas à constater que les fonctions étaient la clef primordiale pour comprendre les équations différentielles. Dans «*Mechanica*» publié en 1736, il développa des méthodes de résolution, basée sur des séries et certaines fonctions spéciales. Il développa par ailleurs des stratégies générales pour obtenir des solutions pour beaucoup de genres d'équations différentielles. C'est à lui, en 1739, que nous devons la méthode de variation des constantes, une des étapes principales dans le développement de la théorie. A la fin du 18ème siècle, Gauss[11], percevant le rôle fondamental de la théorie des fonctions complexes pour les équations différentielles, démontra la nécessité de l'introduction des nombres complexes dans le champ, faute de quoi la nature des équations manipulées restera limitée. C'est ainsi que la théorie des fonctions analytiques conduisit à une nouvelle théorie dans le domaine complexe. Cauchy[12] fut le premier à apprécier l'importance de ce point de vue, et dans les années 1820, il donne une nouvelle direction à la théorie en démontrant que dans certaines limites, toute équation différentielle est solvable.

---

6. Brook Taylor (18/08/1685-29/12/1731): Mathématicien anglais. Il est pour beaucoup dans l'introduction de nouvelles branches et méthodes mathématiques telles que le calcul des différences finies, l'intégration par parties et surtout sa fameuse formule connue sous "le développement de Taylor".

7. Joseph Louis Lagrange (25 /01/1736 – 10/04/1813) : Mathématicien italien. Ses travaux concernent la physique, l'analyse mathématique et la théorie des nombres. Il a d'une manière notable contribué à la mécanique analytique et à l'astronomie. C'est à lui que revient le symbole de la dérivée f'.

8. Pierre Simon de Laplace (23 /3/1749 – 5/3/1827) : Mathématicien français. Son œuvre la plus importante concerne le calcul des probabilités et la mécanique céleste. Il a aussi des travaux en chimie avec Lavoisier et en mécanique avec Lagrange.

9. Daniel Bernoulli (8/2/1700-17/3/1782): Médecin, physicien et mathématicien suisse. Les différents problèmes qu'il tenta de résoudre en théorie de l'élasticité notamment l'ont conduit à développer des outils mathématiques tels que les équations différentielles ou les séries.

10. Leonhard Euler (15/4/1707-18/9/1783) : Mathématicien suisse. Il est reconnu mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Il est le père des symboles, aujourd'hui usuels : $f(x)$ pour la fonction (1734), e pour la base des logarithmes (1727), i pour la racine carrée de -1 (1777) et π pour le nombre pi (1755) et beaucoup plus encore …

11. Carl Friedrich Gauss (30/4/1777 - 23/2/1855) : Mathématicien, physicien et astronome allemand .Grande figure scientifique du19ième siècle. Son influence est prédominante dans la plupart des domaines des sciences. Il est élu par l'Histoire *prince des mathématiciens de tous les temps*.

12. Augustin Louis Cauchy (21/8/1789-22/5/1857) : Mathématicien français. Son immense œuvre scientifique renferme plus de 800 articles sur les sujets mathématiques et physiques les plus variés. Il est à l'origine de l'analyse moderne.

Or aux mêmes périodes que les travaux de Abel[13] et de Galois[14] annonçant que certaines équations différentielles, notamment les équations non linéaires, n'avaient pas de solutions qui puissent être décrites par des formules, Liouville montra en 1841 l'impossibilité de résoudre certaines équations différentielles même d'ordre peu élevé, telle $y' = x^2 + y^2$. Il faut savoir qu'en proportion, très peu d'équations différentielles possèdent une solution analyti-que exprimable avec les fonctions usuelles. Par ailleurs, même quand une solution analytique existe, elle est quelquefois si compliquée qu'elle perd toute utilité.

Les théorèmes d'existence pour des solutions des équations différentielles du premier ordre ne furent établis qu'en 1876 par Lipschitz[15]. Ainsi le 19ème siècle a été dominé par la problématique d'existence et d'unicité de solutions et de fonctions de variables complexes mais également par la naissance de la résolution numérique.

Dans ce registre, il y a lieu de relever que les équations linéaires du premier ordre sans second membre à coefficients constants, qui apparaissent aujourd'hui parmi les plus simples, n'ont pu être intégrées que tard aux environs de l'année 1739 grâce à Euler. Il est vrai qu'à cette époque, la manipulation de la fonction exponentielle, outil fondamental de cette résolution, n'était pas courante.

Confrontés à toutes ces difficultés, les mathématiciens s'orientèrent tout d'abord vers un moyen palliatif qui est à la fois simple, peu coûteux et efficace pour approcher les solutions d'une équation différentielle : il s'agit de la résolution approximative. Certaines contributions d'Euler débouchèrent en 1840 sur une méthode connue aujourd'hui sous le nom de «la méthode d'Euler». Mais si les premières méthodes numériques datent du 19ème siècle, le développement de l'analyse numérique de ces méthodes ne fut entrepris que depuis 1950 simultanément avec l'apparition des premiers calculateurs électroniques permettant la mise en œuvre effective des algorithmes construits. Dans la dernière moitié du 20ème siècle, beaucoup de mathématiciens et informaticiens appliquèrent des méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles. Le développement des moyens informatiques conduisit à générer une panoplie de méthodes numériques. Aujourd'hui l'ampleur de ces méthodes est tellement grande qu'elles permettent de prouver le théorème d'existence.

Pour s'attaquer, en particulier, aux équations différentielles non linéaires, le début du 19ème siècle témoigna d'un autre axe de recherche, avec au départ Cauchy dont les traces furent suivies entre autres par C. Briot[16], J. C. Bouquet[17] et L. I. Fuchs[18]. Les mathématiciens commencèrent à étudier les propriétés des courbes intégrales au voisinage d'un point, laissant ainsi de côté le point

---

13. Niels Henrik Abel (5/8/1802- 06/04/1829) : Mathématicien norvégien. Il a travaillé sur les équations fonctionnelles et intégrales.

14. Evariste Galois (25/10/1811-31/5/1832) : Mathématicien français. Il a des travaux en théorie des Équations et celle fonctions Intégrales. Ses recherches sont à la base de l'algèbre moderne.

15. Rudolf Otto Sigismund Lipchitz (14/6/1832-7/10/1903) : Mathématicien allemand. Son champ d'intérêt est très vaste. Il s'étend de la théorie des nombres les fonctions de Bessel, les séries de Fourier, les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles à la mécanique analytique et la théorie du potentiel.

16. Charles Auguste Briot (19/7/1817- 20/9/1882) : Mathématicien et physicien français. Il a publié plusieurs traités avec Bouquet concernant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes. Il a aussi publié des travaux de physique mathématique: Essai sur la théorie mathématique de la lumière et Théorie mécanique de la chaleur

17. Jean-Claude Bouquet (7/9/1819- 9/9/1885) : Mathématicien français. Il a collaboré avec Charles Briot sur les fonctions doublement périodiques.

18. Lazarus Emmanuel Fuchs (5/5/1833- 26/4/1902) : Mathématicien polonais. Ila laissé son empreinte sur la théorie des fonctions et la théorie des équations différentielles, celles linéaires notamment.

de vue analytique. Se fondant sur ces résultats, Poincaré[19], tout en introduisant de nouvelles fonctions transcendantes, se lança dans l'étude des comportements globaux des courbes solutions rompant ainsi avec le point de vue local inauguré par ses prédécesseurs. La théorie qualitative des équations différentielles fut ainsi inaugurée. L'objet principal de cette théorie est d'étudier qualitativement les courbes représentatives des solutions, les points singuliers et l'allure de la courbe au voisinage d'un point singulier.

L'intérêt des travaux de Poincaré n'est redécouvert qu'au début des années 60. Un météorologue du « *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) », E. Lorenz[20], lors de sa simulation de l'atmosphère de la terre par des équations différentielles qui permettront de calculer à partir de données initiales le temps à des instants donnés, redécouvre le caractère chaotique des conditions météorologiques liées à la sensibilité des conditions initiales : une modification infime des données initiales entraînait des résultats entièrement différents. On a aussi remarqué que la différence, entre une situation calculée par ordinateur et une situation météo réelle, peut s'accroître à tel point qu'au bout d'une semaine, la situation simulée risque de n'avoir rien de commun avec la situation réelle. Pour illustrer sa découverte Lorenz avança l'image métaphorique suivante :

« *La sensibilité aux conditions initiales est tellement importante qu'un vol d'un papillon au-dessus de Pékin peut causer l'apparition d'un cyclone dans le sud des États-Unis quelques semaines après.* »

La découverte de Lorenz intrigue un certain nombre de physiciens et de mathéma-ticiens, ouvrant ainsi au début des années 70 la voie à l'étude des phénomènes non linéaires et chaotiques …

Arrêtons-là cette histoire !!!…

Le présent cahier est composé de trois chapitres et trois index.

Chapitre Premier : Equations différentielles du premier ordre

Six sections le garnissent :
Section une : Définitions et propriétés générales ;
Section deux : Type un : Equations différentielles du premier ordre à variables séparables;
Section trois :Type deux :Equations différentielles homogènes du premier ordre;
Section quatre : Type trois : Equations différentielles linéaires du premier ordre;
Section cinq : Equations différentielles se ramenant aux équations homogènes du premier ordre;
Section cinq : Equations différentielles particulières du premier ordre.

Chapitre Deuxième : Equations différentielles du second ordre

Six sections le composent :
Section une : Définitions et propriétés générales ;
Section deux : Résolution de l'équation homogène;

19. Henri Poincaré (29/4/1854-17/7/1912) : Mathématicien, physicien et philosophe français. Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques de son époque. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Il est le fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos. Il est aussi un précurseur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques.

20. Edward Norton Lorenz (23/5/1917-16/4/2008) :Mathématicien et météorologiste américain. Largement considéré comme le fondateur de la théorie moderne du chaos, Lorenz a également fait d'importantes contributions à la compréhension de la dynamique de l'atmosphère et les prévisions météorologiques. Certains scientifiques ont vu dans ses travaux la troisième révolution scientifique du 20ème siècle après celles de la relativité et de la mécanique quantique.

Section trois : Résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre ;

Section quatre : Cas de seconds membres particuliers ;

Section cinq : Quelques cas d'équations différentielles ordi-naires du second ordre à coefficients variables ;

Section six : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

Chapitre Troisième : Exercices

Trois sections le composent :

Section une : Exercices résolus ;

Section deux : Solutions ;

Section trois : Exercices Test.

Chapitre quatrième : Trois Index

Index terminologique :

Index des savants cités ;

Index bibliographique.

Pour apprécier cette marche et la rendre accessible, voire agréable, on a pas lésiné sur les moyens à même d'apporter la clarté boostant la compréhension et assurant l'assimilation. C'est dans cette optique qu'il est fait appel à beaucoup d'exemples d'illustration et exercices de consolidation dont certains résolus et d'autres laissés comme compléments pour évaluation et agrément.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant sociétalement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet… etc.)

- Etre animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quel que soit l'effort physique, temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.

- Etre habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués ou de livres consultés et avoir l'envie vivace de toujours en faire et consulter davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions↓ qu'il peut s'améliorer et être plus utile.

Alger 17 Janvier 2016

Mohammed Hazi.

↓ Il suffit d'un clic à cette adresse : hazi@hotmail.fr