

محمد حازي

# المسائل الكاسحة في امتحانات الطبولوجيا

مسائل وتمارين محلولة

لطلاب السنتين الثانية والثالثة في الجامعات والمدارس العليا.

الكتب الصادرة عن ديوان المطبوعات الجامعية لنفس المؤلف:

أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés..
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. الطلع النضيد للطلاب والمعيد، مسائل وتمارين محلولة في التحليل.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
9. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
12. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
13. الطلع النضيد للطلاب والمعيد.
14. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.
15. الدروس الوافية في الفضاءات المترية.
16. المقعد المجلي للتحليل الدالي.
17. من دفاتر التحليل: المتتاليات العددية.
18. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: نهاياتها واستمرارها.
19. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: تقعيد نظري وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصلية: شق نظري وآخر تطبيقي.
21. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبين الأولى والثانية: تقعيد نظري وتطبيقات.
22. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدة متغيرات حقيقية: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصلة وتمارين منوعة,
23. De mes cahiers d'analyse : Tout sur  $\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels : structures algébrique et topologique.
24. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques.
25. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites, continuité et ...
26. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Dérivabilité et Développements limités.
27. De mes cahiers d'analyse : Intégrales de Riemann et Calcul de primitives.
28. De mes cahiers d'analyse : Equations différentielles ordinaires du premier et second ordres : Assise théorique et applications.
29. De mes cahiers d'analyse : Fonctions de plusieurs variables réelles : Limites, continuité, différentiabilité et ... Cours détaillé et exercices variés.
30. Au carrefour des examens de topologie.

ب. في الترجمة:

1. معادلات الفيزياء الرياضية (جزآن).
2. دروس في الطوبولوجيا.
3. سلاسل وتكاملات.
4. المصفوفات: دروس ومسائل.

5. مسائل وتمارين محلولة.
6. مدخل إلى الطوبولوجيا العامة.
7. دروس في الجبر الخطي.
8. الجبر الخطي.
9. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.
10. أطلس الرياضيات.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

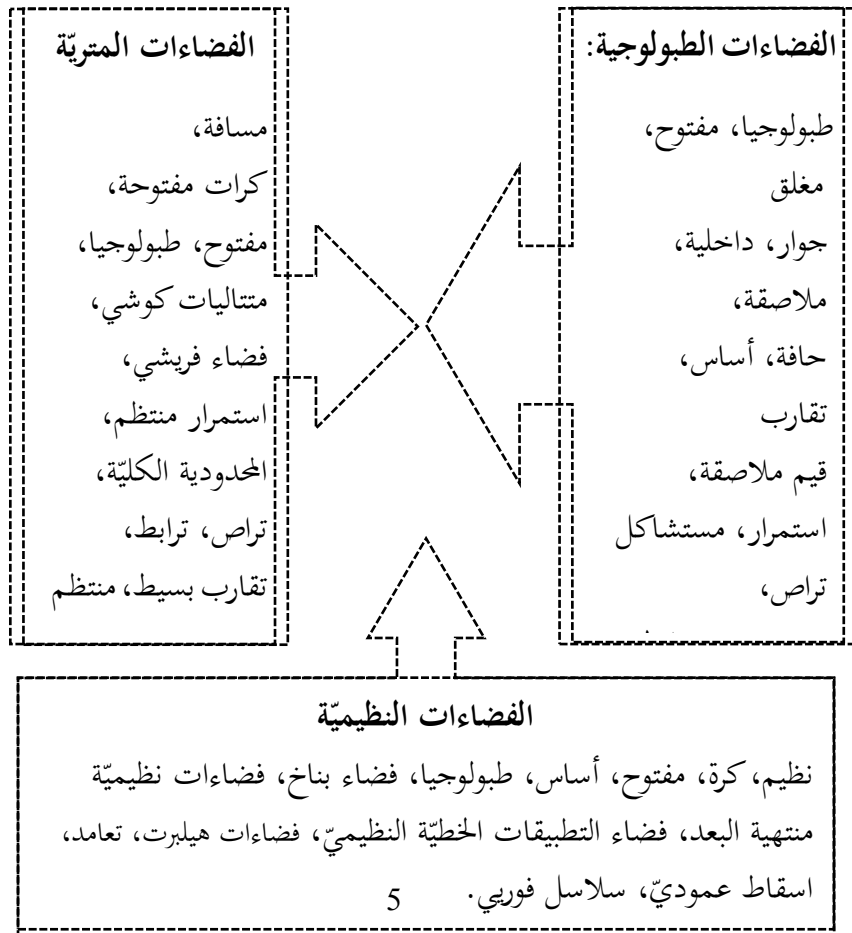
## تصدير

"إنّ الفضاءات المترابطة من الطوبولوجيا العامة بمثابة الفضاءات المنتهية من نظرية المجموعات،"

جون ديودوني

إنّ المواضيع المستعرضة هنا مستقاة في معظمها من خزّان الامتحانات المنظّمة في قسم الرياضيات بالمدرسة العليا للأستاذة بالقبة (الجزائر) خلال السنوات العشر الأخيرة. إنّها تخصّ الوحدة 216 المشهورة لدى جمهور الطلبة تحت تسمية "مقياس الطوبولوجيا". وبالطبع، لقد مكّنتنا فسحة الإطار من أن نعطي لأنفسنا الحرّية ونطلق لها العنان لإضافة مواضيع جلبناها من هنا وهناك. وأكثر من هذا، فقد عمدنا إثراء للمؤلّف، إلى إنشاء عدد معتبر من التمارين والمسائل خارج الخزّان، نرى أنّه بالإمكان أن تشكّل مواضيع امتحانات، تلبي حاجة مستخدمين من آفاق أخرى، مثل أولئك الذين هم معيّنون بوحديتي 3 و4 من ليسانس الرياضيات في النظام ل.م.د.

يدور عدد الامتحانات السنويّ في المدرسة العليا بالقبة، في العموم حول أربعة: ثلاثة منها تعدّ الركائز التقويمية للوحدة خلال السنة الدراسية، بينما يقتصر الرابع المكثى بالاستدراكي، على الطلبة الراسبين في الدورة الأولى. قد يرقى هذا العدد إلى خمسة ليشمل امتحانا معروفا بالامتحان التعويضي ومخصّصا للطلبة المتغيّبين بعذر في أحد الامتحانات الرسمية الثلاثة. إنّها امتحانات تتراوح مدّتها ما بين ساعة ونصف على الأقلّ إلى ساعتين على الأكثر. لقد نظّمت وربّبت مواد هذه الامتحانات حسب التقدّم في البرنامج الموالي:



يغطّي الامتحان الأول عادة المفاهيم الأساسية للفضاءات الطوبولوجيّة كما هي مدوّنة أعلاه. يتولى الامتحانان الثاني والثالث أمر المفاهيم الواردة في البابين الثاني. والثالث على التوالي. أخيراً، يعدّ الامتحان الرابع (الاستدراكيّ) حوصلة تشمل مفاهيم منتقاة من البرنامج في مجمله. من أجل هذا، أعدنا ثلاثة رفوف لاستعراضها :

رفّ طوبولوجيّ من 28 موضوعاً بـ 97 تمريناً ومسألة ورفّ متريّ من 14 موضوعاً بـ 46 تمريناً ورفّ نظيميّ من 21 موضوعاً بـ 67 تمريناً ومسألة.

وبالطبع، عمدنا قصد ضمان هذا التوزيع العمليّ للمستخدم، إلى تفكيك بعض الامتحانات العابرة لرفّين (الأول مع الثاني والثاني مع الثالث) وجعلها لا تشمل سوى مفاهيم الرفّ الذي تردّ فيه. أعدنا إدراج مضامينها في مواضيع أخرى أدخلنا كلّ واحد منها في الفئات الثلاثة الأولى ضمناً للترتيب التسلسليّ للمفاهيم التي تعالجها. لقد حرصنا قدر المستطاع خلال هذه العملية على جعل المواضيع الناتجة تواكب بقية المواضيع وذلك بأن ضمنا توازنها من حيث درجة الصعوبة في المفاهيم وطول المدّة في الزمن.

من اليقين الراسخ في عالم التعلّم، وعالم الرياضيات بالخصوص، أنّ إعادة امتحانات سبق إجراؤها أداة لا تضاهي نجاعتها وطريقة لا يجارى سدادها، أثبتت حضورها لدى المحضّرين لامتحانات قادمة، تعضد معلوماتهم وتمثّن استقلالهم حين الشروع في براهين جديدة. ما هذا بخاف على الطلاب! ألم نعظهم ونحثهم على أن يجعلوا من الفضول إحدى أهمّ خصالهم في التحصيل العلميّ وتوسيع الآفاق؟!

إنّ هذا الاعتقاد الجازم هو ما شحذ عزمنا وولّد فينا الطاقة اللازمة التي شحنتنا للقيام من جديد بزيارة لخزان امتحانات العقد الماضي، أوليناها محصاً وتنقيها وفرزاً وتنظيماً وتفصيلاً في الحلول حتّى تمّ إخراجه على الهيئة التي بين يديك. لعلّ من المفيد أن نشير إلى أنّه حتّى ولو أنّ العنوان يوحي بأنّ الكتاب موجّه للمراجعة والتحضير ويقتضي بالتالي تقدّمنا في البرنامج، إلّا أنّنا ننصح بإمكانية استخدامه واستغلاله منذ البدء في البرنامج بالاكتفاء والتوقّف مرحلياً في كلّ مرة عند المفاهيم المعالجة في المحاضرات.

من نافلة القول أنّه لن يسع المستخدم الاستفادة من الكتاب الحاضر واستثماره ما لم يتحصّن بدرسه (تعاريف، خصائص، مبرهنات، ... الخ). كما تجدر الإشارة إلى أنّ الحلول التي شدّدنا الحرص على الإتيان بها مدقّقة ومفصّلة وسليمة من كلّ شائبة ما أمكن، إلّا أنّه ينبغي أن تؤخذ على الدوام استثنائية. فعلى المستعمل، الطالب بالخصوص، البحث عن تجاوزها ووضع ما هو أحسن.

في الأخير، لنا اعتقاد جازم بأنّه لا أمل لكتاب في أن يحيى ويعمر، وهذا مهما بدر من صاحبه من حرص شديد وعزم عنيد وعناية لا تلوها عناية، إلّا بتفاعل مع مستعمليه. فكما أنّ هذا الجمهور المستعمل يستمدّ منه عوناً في تكوينه فإنّه يمكنه ردّ الصنيع له بالإبلاغ<sup>↓</sup> عن كلّ أشكال المنغصات من هفوات تسوّده وأخطاء تدلّجه.

سمّاش في 7 أوت 2017

محمد حازي

↓ تكفي نقرة على هذا العنوان : mohammed.hazi@gmail.com

## عوارض في الصميم

### 1. همستان

- يلجأ السواد الأعظم من الطلبة وكثير من الزملاء الأساتذة عند الشروع في حلّ المسائل إلى وضع كلمة "الحل" هكذا معرّفة. أرى بضرورة الحرص على أن يؤتى بهذه الكلمة نكرة لهاذين الداعيين الأساسيين :
- أ. أخلاقيّ ويندرج ضمن تلقين الأخذ بأسباب الحذر والتواضع؛
- ب. تعليميّ تعلّميّ درءا لغلغلق أبواب البحث والاجتهاد أمام الغير، الطلبة بالخصوص، طلبا لما هو جديد وأفضل. فما الحلّ الذي يوضع إلا نتاج الحين الذي يوضع فيه، قد يحسّنه واضعه أو يفسح باب الاجتهاد لغيره ليأتي بتحسين أو جديد بشأن المسألة موضوع الفلّك. وأوّل المعنيتين بهذا الغير هم طلبتنا أنفسهم، إذ ما لإعادة طرق حلّ المسائل من أوجه وزوايا عدّة من فوائد جمّة. فسعادة الأستاذ لما يأتيه طالبه بمقاربة حلّ مختلفة لما لقن لا تضاهيها سعادة ...
- ثلاث رذائل في الآداب العامّة هي فضائل في طلب العلم:  
الفضول؛ التعنّت والعناد؛ الجشع وعدم القناعة.

### 2. العودة إلى امتحان سابق لماذا؟

- لا يختلف إثنان في خصوصية الامتحان التعليميّة وتمييزه عن الدرس العاديّ وفائدته التعليميّة والتحصيليّة. يحضّر له تحضيرا خاصا وتوضع له أهداف مسطّرة مسبقا. إنّه عصارة ما في الفصول الذي تسبقه. فهو جامع وشامل لما قبله. يسخر له واضعه من ذهنه وجهده ووقته تدبّرا وإمعانا أضعاف ما يقدمه في تحضير دروسه
- فلا شكّ أنّ الإلمام بمكوّنات الامتحانات السابقة إلمام بغالبية المفاهيم والأفكار التي زرعت من ذي قبل.

### 3. كلمة حول كلمة "طبولوجيا"

- من من الجمهور الجديد الوافد القادم من السنة الأولى الجامعية بكلّ أطرافها وتخصّصاتها، لم تمر عليه يوما دراسة مفهوم نهاية دالة حقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ عند نقطة ما ؟ لن نحيد عن الصواب إن زعمنا أنّ الترميزه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  هي السيدة في غالبية الإجابات على السؤال المعالج لهذا المفهوم. لو طلبنا من بعضهم ماذا فهموا أو تعلّق بأذهانهم من تعريف هذه النهاية لسمعنا منهم سيفساء من الإجابات، لعلّ الشائع ذكرها يفيد أنّ:
- "  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  مع مآل  $x$  إلى  $a$  (من دون أن يصله)"
- إلى جانبها نجد أيضا بدائل تلتّم كلّها حول فعل "آل" مثل : اقترب من، دنا من، أبّج نحو، قريب من، صغير، صغير جدا، كبير، كبير بقدر كاف، كبيرا جدا، ... الخ.

- إنّ طالبا نبها يتفطنّ بسرعة، إذا ما تمعّن فيها مليّا، إلى أنّ هذه الألفاظ تقريبيه بل عديمه الجدوى. وهل يكون الأمر غير ذلك، وهو المسلّح والمحصّن بإحدى خصائص الأعداد الحقيقيّة الأساسيّة التي تنصّ على أنّ "بين عددين حقيقيّين ما لا نهاية له من الأعداد الحقيقيّة". فما المعنى الذي يبقى للتعبير السابقة في هذا الإطار؟ ماذا يفيد الادّعاء بأنّ

عددا حقيقياً " قريب من آخر؟ كيف يزعم المآل نحو الصفر مثلا من يوقن مسبقاً بأنه كلما خطا خطوة نحو الصفر فصله عن الصفر من الأعداد ما لا يحصى ولا يعدّ؟ !

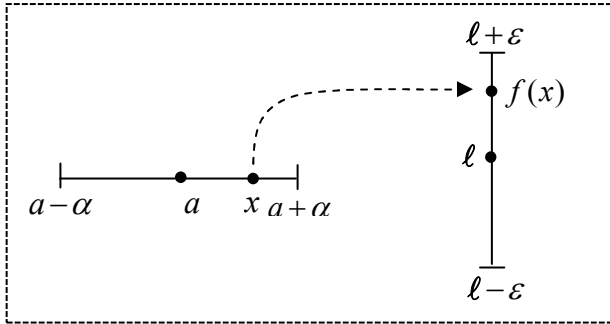
والأدهى في هذا المضمار أننا لو تناولنا مفهوم النهاية هذا بإدراج  $\infty$  في  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  مثلا، فالوضع يصير غير مطاق، إذ  $\infty$  غير معروف موضعه أصلا. فأَيّ منطق يخوّل لأحدهم الزعم بالاقتراب من نقطة مجهل مسبقاً محلّها! أيّ موقف يوقف وأيّ سبيل يسلك؟

إنّ بداية للإجابة تكمن كما هو الحال دوما في عودة نبهة متأنّية إلى التعريف. نجد هذا الأخير ينصّ على:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho(\varepsilon, x_0) > 0 / \forall x \in D_f : 0 < |x - x_0| \leq \rho \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon,$$

أو:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho(\varepsilon, x_0) > 0 / \forall x \in D_f : x \in ]a - \rho, a + \rho[ \Rightarrow f(x) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[.$$



وبعبارة أخرى، يكون العدد  $l$  نهاية للدالة  $f$  لما "يؤول"  $x$  إلى  $a$  إذا أذعنت لهذا الشرط:

مهما يكن المجال المفتوح  $I_l$  المتمركز عند  $l$  يوجد مجال مفتوح  $I_a$  متمركز عند  $a$  بحيث :

$$f(I_a \cap D_f) \subset I_l.$$

إذا ما اصطللحنا على تسمية المجالين  $I_a$  و  $I_l$  جوارا ل  $a$  و  $l$  على الترتيب نقرأ أخيرا:

يكون  $l$  نهاية ل  $f$  عند  $a$  إذا وجد من أجل كلّ جوار  $I_l$  ل  $l$  جوار  $I_a$  ل  $a$  يضمّ صورة كلّ نقطة  $x$  من  $I_a$

(تكون  $f$  معرّفة فيها).

إنّ أحد الأوجه المستحسنة لهذه الصيغة أنّها تبعد الألفاظ التقريبيّة السابقة الذكر وتحرّر هذا المفهوم من المعنى

السائد المتداول المتعلّق به في الحياة العادية والذي عشّش في ذهن الطالب يجرّه معه.

إنّ هذه المقاربة الهندسيّة هي في صميم ما تدور حوله كلمة "طبولوجيا". فالدور الرئيس المنوط بها يكمن في دراسة

محلات ووضعيّات النقاط بعضها إزاء بعض دونما أخذ في الحسبان أيّ اعتبار آخر أيّا كان نوعه، مثل عددها أو

أشكالها أو ألوانها أو... الخ. هذا المعنى نجده محمولا في أصل الكلمة ذاتها. إنّها يونانيّة من شقين. الأول

"طبوس" (topos) ويعني مكان و"لوفوس" (logos) ويفيد "دراسة"! ومن هنا تبدأ الحكاية ...