

محمد حازي

السبيل إلى الأعداد الحقيقية

مفروش بتمارين مطولة

و

محفوف بأخرى للحلّ

لفرعي العلوم الدقيقة والتكنولوجيا

من السنة الأولى الجامعية

و

فرعي الرياضيات وعلوم الطبيعة والحياة

من السنة النهائية الثانوية

إلى ولدي

عبد الغفار

في عامه الأوّل

أنشودة السبيل"

صه خليلي واقطع القيل

جاء الديوان⁽¹⁾ يزفّ السبيل

هيا نلق الطالب نبشّره

حقّ أن يفرح وينثر التهليل

علاقات ومجموعات في الجبر عدّت

تراص وترايط تملأ التحليل

الطاء⁽²⁾ والصاد⁽³⁾ بالكاف⁽⁴⁾ أُرِدِفَت

جاءت لضيقها الحاء⁽⁵⁾ إكليلا

تمارينه نجوم يستنار بها

يعمرّ في كنفها النجاح طويلا

قهرت خميس الرسوب فولّت

فلوله القهقري خزيا نليلا

لما أيقن ألا سلطان على الطالب له

علا صوته إلى السماء عويلا

القبة في 01 نوفمبر 1999

(1) ديوان المطبوعات الجامعية

(2) مجموعة الأعداد الطبيعية

(3) مجموعة الأعداد الصحيحة

(4) مجموعة الأعداد الناطقة

(5) مجموعة الأعداد الحقيقية

مقدمة

"الحمد لله الذي له ما في السموات وما في الأرض، وله الحمد في الآخرة، وهو الحكيم الخبير. أحمده على تتابع آلائه وتواتر نعمائه وترادف مننه، وأستهديه وأستوفقه لما يرضيه؛ وأشهد أن لا إله إلا الله الذي لا شبيه له ولا نظير، وأشهد أن محمدا عبده ورسوله وأمينه ونبيّه، ابتعثه لينذر من كان حياّ ويحقّ القول على الكافرين".
أما بعد:

لقد أوحى إليّ إشرافي على وحدة ع.د.ر 300، الكثيفة عناوينها، والتي تمثل مقرّر الرياضيات الوحيد في السنة الأولى الجامعية في كل الاختصاصات العلميّة، أو تكاد، بملحوظتين رئيسيتين، لا أخال كل مدرّس لها بمنأى عن التفكير فيهما. إنهما:

1. التعرّض لمضمونها، المشتمل على معظم مفاهيم التحليل والجبر القاعديين، بالتفصيل والتعمّق في المعاني والإسهاب في الأمثلة والتطبيقات كما يقتضيه الحال. لقد تراءى لي أنّ الأخذ بهذا الاتجاه له مآخذه ومحاذيره. ذلك لأنّ الوحدة مكتظة العناوين وعريضة المضامين، وقد أظهرت التجربة أنّ الوقت المسخّر لها ينفق بسرعة ولما يوصل بعد، في أحسن الأحوال، إلى ثلاثة أرباع البرنامج. وفي هذا ما فيه من عيوب، وفي هذا ما فيه من فجوات لما يلي من مقرّرات مضارعة غالبا ما لا يتأتّى للطالب درؤها. وهو أمر لا يمكن لمشرف نزيه على الوحدة أن يستبيحه ويفرّه؛ إنّ أدبيات المهنة وأخلاقيها تنكره وتحظره.

2. ركوب السهولة واصطناع التشبّث بروح البرنامج دون جسده، واللجوء هكذا إلى الاكتفاء بشيء من السطحية في استعراض بعض العناوين وطمس بعضها طلبا لإنهاء المطلوب. إنّ هذا، أيضا، درب لا يخلو من ضروب الجدل والنقاش.

لقد تولّد لديّ اقتناع أنّ الأخذ بأحد المنهجين دون الآخر يعدّ إجحافا في حقّ الطالب الذي يقذفه ذلك إلى تكبّد مشاق في دراسته وأخطار تضطرّه إلى تكلف أهوال وتجشّم صعاب لإتمام ناقص في الحالة الأولى، وتعميق شارد وإدراك كنه مبهم في الثانية. ولن يتأتّى له ذلك إلاّ بعد حيلة وجهاد.

إنّ السؤال الطبيعيّ الذي يتبادر إلى الذهن، والذي ما انفكّ الأساتذة المؤطّرون يبحثون عن جواب عقلائي له هو:

" أيّ نهج أسلك وبأيّ فريق أقتدي ؟ "

لم أجد، فيما يخصّني، ردّا مقنعا ولا مستساغا والظروف هذه - قد يتبدّل الحال إن فكّر أولي الأمر في إعادة النظر في هذه الوحدة وعكفوا على صوغها بما يتلاءم وحجمها الزمني - إلاّ الأخذ بالخاطرة الأولى واستدراك مغزى الثانية (إتمام البرنامج) باللجوء إلى إنجاز وطبع الدروس. ستشكّل مجموعة الدروس هذه عوناً للطالب يرجع إليها بايعاز من المدرّس أو بدونه كلّما تطلّب الأمر ذلك. ولئن رأى البعض أنّ ذلك لا يخلو من المبالغة واستنبأني عن الدافع أنبأته بأنّ أفقي لم يدلّني على غير ذلك ولم تجد قريحتي بغيره. ولهذا البعض أن يدلّو بدلوهم فينيرنا ...

إنّ لي من القرائن ما يرخّص لي بالجزم بأنّ لهذه النظرة صداها الحسن في نفوس الطلبة وهو ما حفّزني على الشروع في إعداد مؤلّف شامل يتناول هذه الوحدة الهامّة.

بعدّ الكتاب الحاضر أمامنا جزءا من هذا المشروع الكبير؛ خصّصناه لبنيتي مجموعة الأعداد الحقيقيّة المسلميّة والطبولوجيّة التي انبرينا لها تفصيلا ومحصا نظرا لما تكتسيه من أهمية مشهودة. وقد عجلنا بنشرها حرصا منا على أن تأخذ مكانها في عالم مراجع طلبتنا.

قد ينقسم فريق المتمرّسين في وحدة ع.د.ر 300 بشأن هذا الكتاب إلى منتصر له وإلى مؤاخذ عليه إفراد ه للبنيتين المارّ ذكرهما. وأتصوّر هذا الأخير مستغريا إجرائي هذا مدّعا تشبّيت الوحدة وانفصام عروتها، وإنّي بذلك قد أخطأت قصد السبيل ! إنّ هذا طرح سليم. غير أنّ الأصداء التي ترجع من جمهور الطلبة، مركز اهتمامنا أولا وأخيرا، استوقفتنا وجعلتنا نذهب هذا الذي ذهبنا.

لقد تبين أنّ بنية \mathbb{R} الطبولوجيّة، بالخصوص، ليست موفورة الحظّ دراسة ولا تُوفّى حقّها عناية ولا يمتحن فيها الطلبة إلّا لماما؛ حتّى أنّ بعض المولعين بالطرافة من هؤلاء ذهب بشأن هذه البنية حدّ اتّهام المشرفين على تدريسها في السنتين الأولى والثانية بتقاذفها : فكان الفريق الأوّل يسوّف بالنظر في أمرها في مستقبل غالبا ما لا تكتب له الحياة، في حين كان الثاني يسرف في إرجاع الطلبة إلى ماض لم يشهدوا فيه في الحقيقة شيئا !

نحن نرى لجدوى هذا الأفراد رديين جوهريين هما:

(1) فهم وهضم مميّزات \mathbb{R} الجبريّة والطبولوجيّة يسهم في تنوير الطالب، فتسهل له وإلى حدّ بعيد، استساغة بنى أوسع، هي من التعقيد والتجريد بما لم يداهمه من قبل قطّ.

(2) إتاحة مساحة وفضاء أرحب لدراسة مفصّلة ومستفيضة حدّ الابتدال. وغوص أعمق في المفاهيم لدى مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تعتبر مزاياها همزة وصل بي الطورين الثانوي والجامعي؛ وفي هذا ما فيه من عامل ألفة واستئناس واستحباب وتقريب لجمهور الوافدين الجدد من عالم البراهين الإبتدائيّة الحدسيّة إلى عالم الدقة والتجريد. من البديهي، إذن، أنّ استعراض الوحدة بأكملها يقلّص من المساحة المرغوبة ويقف أمام الغوص العميق في المضمون ويفوّت الفرصة من بلوغ الغايتين السابقتين.

لست أريد أن أطيل عليك، بل أخشى أن أكون قد فعلت. ولا أن أسرف في تشويقك أمل صادقاً أن تجد في هذا الكتاب الصديق المعين. حرصت على أن يشمل كلّ ما تحتاج إليه في الدائرة التي أعرضها عليك تحت عنوان: السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة. فقد يكون هذا العنوان غريبا، وقد لا يخلو من بعض النفرة، بل قد يكون غامضا بعض الشيء. ولكن توضيحه يسير، ومتى فهمت معناه واطّلت على مضامينه المتضمّنة بين دفتيه أحسب أنّك تقرّه ولا تتكره. إنّي أردته مسيرة ممتعة أصطحبك فيها لتوجيه خطاك في مسالك الدرب الوعر الموصل إلى الأعداد الحقيقيّة.

ننتقل من محطة العلاقات، نرى من خلالها خصال التوابع والتطبيقات وكذا مفهومي التكافؤ والترتيب خلالهما (الفصل الأوّل). ولما كانت المجموعات العددية تُنشأ من المنظور التاريخي انطلاقا من النقائص

والمأخذ التي اقتضت، في كلِّ مرّة، التفكير في مجموعة عددية أوسع، توقّفنا عند مجموعة الأعداد الطبيعيّة \mathbb{N} .
 تبقى في ضيافة هذه المجموعة ردحا من الزمن لاستعراض مفهوم القابليّة للعدّ (الفصل الثاني).
 وفي الفصل الثالث، الذي قد يبدو وكأنّه خارج حلقة مسيرتنا، نجد مفهوم التحليل التوفيقي الذي يوظّف أدوات وعناصر وخصائص مستمدّة من الفصلين الأوّلين.
 نستأنف السير لنصل إلى مجموعتي الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} والأعداد الناطقة \mathbb{Q} اللتين تؤلّفان مادة الفصل الرابع في الفصل الخامس والأخير، نعد إلى الدراسة المركزيّة لبنيتي \mathbb{R} المسلماتيّة والطبولوجية.
 ولتيسير السير فيه لجأت إلى زرع أمثلة موضّحة مسهّلة للفهم والاستيعاب، وأكثرت فيه من التمارين المحلولة¹ منها وغير المحلولة دعما للوضوح ودفعا للملل.
 ومع أنّي حرصت على تنوّع المصادر المرجعيّة وكثرتها إلاّ أنّي أرى بأنّه حقيق بي أن أشيد بالطاقمين المشرفين على وحدة ع.د.ر 300 بالمدرسة العليا للأساتذة والمدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبة-الجزائر.
 فلقد عرفت دونما تحقّظ أو قيد من سلاسل الأعمال الموجّهة التي أعدّها تمارين بما لا أحصي له عددا.
 فليعذرني أعضاءهما المشكورون إن خصصت بالذكر منهم الزميلين الأستاذين إسماعيل أجبالي وشريف بوزيدي.
 إنّ كلّ ما أرجوه لهذا الكتاب أن يكون مساهمة طيّبة في إحياء وإنعاش دائرة مراجع طلبتنا. وأملي كبير في أن يحظى بعناية هؤلاء وكل مستخدميه على العموم. فبنقدّمهم ونصائحهم يستقيم الكتاب وينفع. والله من وراء القصد وهو وليّ النجاح والتوفيق.

¹ تحمل رقما تعلوه نجمة (*).