

**Mohammed Hazi**

**Topologie: Au delà des travaux dirigés**

**Tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques  
Exercices et problèmes corrigés**

2ème année des universités et Grandes Ecoles Scientifiques

**A**

**la mémoire de mes parents**

## Avertissement

Les 294 Exercices et Problèmes qui composent le présent tome ambitionnent la présentation des cinq notions fondamentales habituellement rencontrées dans les espaces topologiques: en l'occurrence: Topologie usuelle de la droite réelle à titre d'illustration, Définitions et propriétés générales des espaces topologiques, Continuité, Compacité et connexité. Un chapitre est consacré à chacune d'elles:

- La première est couverte par 45 exercices (1 à 45),
- La seconde est couverte par 112 exercices (46 à 157),
- La troisième est couverte par 45 exercices (158 à 202),
- La quatrième est couverte par 41 exercices (203 à 243),
- La cinquième est couverte par 51 exercices (244 à 294).

Nous y avons pris soin de rappeler les définitions fondamentales de chaque notion introduite et veillé à varier et détailler, autant que faire ce peut, les démonstrations et diverses illustrations afin d'assurer à l'utilisateur un accès facile et attrayant.

C'est aussi une occasion de revisiter mes ouvrages "Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier" et "Introduction aux espaces normés", ainsi que leur version arabe, qui ont vu le jour sous les presses de l'Office des Publications Universitaires, il y a maintenant plus de dix ans. L'essentiel du présent livre, y est puisé. Mes tentatives auprès de cet organisme pour susciter une deuxième chance de réédition de ces ouvrages, qui m'offrirait l'occasion de les corriger et les améliorer, sont restées vaines. C'est là une autre raison d'être de ce travail.

Bab Ezzouar le 29 Octobre 2005  
Mohammed Hazi

## Un mot d'Histoire

Il n'est guère aisé de donner une définition du mot *topologie* dans des termes qui, habituellement permettent à l'étudiant, dans d'autres contextes, de saisir le sens des notions nouvelles qui se présentent à lui. C'est un domaine extrêmement vaste des mathématiques dont il est difficile de définir avec exactitude l'objet dont il fait l'étude. Ce que nous pouvons dire dans un premier temps, c'est que la topologie est très intimement liée à la théorie des ensembles, à l'analyse fonctionnelle, aux suites et séries, aux calculs intégral, différentiel et vectoriel à la géométrie et encore beaucoup d'autres domaines. Voici cependant un essai de définition de la topologie qui reste toujours à compléter.

Vu sous l'angle linguistique, ce terme (du grec) signifie étude des lieux. Les mathématiciens l'ont adopté pour désigner une branche de la géométrie s'intéressant à définir ce qu'est qu'un lieu et à la position d'une chose géométrique par rapport à d'autres, sans prêter attention ni à sa forme ni à son volume.

En réalité l'émergence de cette branche des mathématiques remonte au milieu du dix-neuvième siècle. Elle a pris la forme d'une nouvelle orientation de la géométrie analytique. Möbius<sup>1</sup> est le premier à faire les premiers pas dans cette branche. Il est suivi de Listing<sup>2</sup> qui, dans sa lettre de 1836, a utilisé pour la première fois le mot topologie. Plus tard, en 1847, il publia son ouvrage "Vorstudien zur Topologie", qui fut le premier à introduire le terme *Topologie*. Riemann<sup>3</sup> est considéré par un grand public de mathématiciens comme le fondateur de la topologie. Il est le premier à essayer de cerner la notion d'espace topologique et de poser les premiers jalons des techniques ayant aidé à l'évolution et développement de cette branche.

L'étude des ensembles numériques, en particulier celui des réels, avec l'avènement des intervalles ouverts et des intervalles fermés, dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, a permis de donner un nouvel essor à la théorie générale des espaces topologiques telle qu'elle est décrite par Riemann. Cantor<sup>4</sup>, l'inventeur de la théorie des nombres, vient en tête des mathématiciens qui se sont illustrés dans ce domaine. C'est lui qui a posé la définition d'un ensemble ouvert, d'un ensemble fermé et du point d'accumulation sur la droite réelle.

Hilbert<sup>5</sup> est, quant à lui, le premier à utiliser la notion de voisinage. A l'orée du vingtième

---

<sup>1</sup>. August Ferdinand Möbius est un mathématicien et astronome Allemand, né le 17 novembre 1790 à Schulporta et mort le 26 septembre 1868 à Leipzig. Il a étudié sous Gauss et a laissé beaucoup d'objets mathématiques, comme la fonction et la formule d'inversion qui portent son nom.

<sup>2</sup>. Johanne Benedict Listing est un mathématicien Allemand, né le 25 juillet 1808 à Frankfurt et mort le 24 décembre 1882 à Göttingen (Allemagne). Son professeur Gauss l'adopta dans le cercle restreint de ses amis. C'est lui qui lui conseilla d'étudier la topologie.

<sup>3</sup>. Bernhard Riemann est un mathématicien Allemand, né le 17 septembre 1826 à Hanovre (Allemagne) et mort le 20 juillet 1866 à Selasca (Italie). En 1851, Il soutient sa thèse, préparée sous la direction de Gauss. Elle portait sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques.

<sup>4</sup>. Georg Cantor est né le 3 mars 1845 à St Petersburg et mort le 6 janvier 1918 à Halle. Brillant mathématicien d'origine Russe, il étudia en Allemagne sous Weierstrass et Kronecker. Ses travaux l'ont conduit, en 1872, à introduire la notion de nombre réel, comme limite d'une suite de nombres rationnels. Il est l'auteur de plusieurs découvertes en théorie des nombres. Celles-ci sont à l'origine de l'hostilité que lui ont témoignée les grands mathématiciens de l'époque, Poincaré et Kronecker notamment.

<sup>5</sup>. David Hilbert, né le 23 janvier à Königsberg (actuelle Russie) et mort le 14 février 1943 à Göttingen (Allemagne), est l'un des grands mathématiciens du 20ème siècle. Son œuvre est immense. Au second Congrès International des Mathématiciens de Paris, le 8 août 1900, Hilbert a posé 23 Problèmes qui ont été le moteur de plusieurs recherches tout

siècle. A l'orée du vingtième siècle, autour de l'année 1914 précisément, Hausdorff<sup>6</sup> a pu simplifier, sur la base des travaux de Fréchet<sup>7</sup> sur les espaces métriques, la "forêt" d'axiomes qui entouraient la notion de topologie et a réussi à en extraire trois portant son nom, qui sont les plus usités à ce jour. Il est, à ce titre, le père fondateur de la théorie de la topologie.

Bien entendu, et comme toute science, la topologie a connu un développement rapide et une extension à plusieurs autres branches des mathématiques, dépassant toutes les prévisions de ses concepteurs. C'est ainsi que sont nées la topologie algébrique et la topologie différentielle entre autres. Bien plus, elle jouit de ramifications en algèbre, où on parle de groupes et anneaux topologiques. Quant à l'analyse, son emprise est totale: presque aucune étude ne peut se passer d'outils topologiques lui conférant précision et ... beauté!

---

au long du siècle dernier. Le nom de Hilbert est cependant connu des étudiants surtout pour ces célèbres espaces de Hilbert qu'il a introduit vers 1909, au cours de son travail sur des équations intégrales.

<sup>6</sup>. Félix Hausdorff est un mathématicien Allemand, né le 08 novembre 1868 à Breslau (actuelle Pologne) et mort le 26 janvier 1942 à Bonn (Allemagne). Il est considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne. Il contribua significativement à la théorie des ensembles et à l'analyse fonctionnelle. Il est aussi l'auteur de plusieurs travaux philosophiques et littéraires.

<sup>7</sup>. Maurice René Fréchet est un mathématicien Français, né le 2 septembre 1878 à Maligny et mort le 4 juin 1973 à Paris. C'est en 1906 qu'il a introduit la notion d'espace métrique, (l'appellation d'espace métrique étant due à Hausdorff). Il a, entre autres, défini et fondé la théorie des espaces abstraits. Il a aussi plusieurs contributions en statistiques et calcul de probabilités.