République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE-KOUBA
El cheikh Mohamed El Bachir El Ibrahimi

Département de Mathématiques

N° d'ordre : 19/2020

T H È S E

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : **Mathématiques**
Option **: Équations différentiels partielles**

Présenté par

BOUKASSA SALIHA

Thème

Existence and Regularity of Solutions for a Model in MagnetoHydrodynamics

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	**Grade**	**Institution**	**Statut**
M A. MOKRANE	Pr	ENS-Kouba	Président
M^{r} E. OUAZAR	MCA	ENS- Kouba	Directeur de thèse
M^{r} C. AMROUCHE	Pr	Univ. de Pau ^{r}	Co-Directeur de
M^{r} A. AIBECHE	Pr	Univ. Sétif	Examinateur
M^{r} A. CHOUTRI	Pr	ENS-Kouba	Examinateur
M^{me} O. SAIFI	MCA	Univ. Alger 3	Examinateur

Soutenance le : **05/11/2020 à 10h :00**

Existence and Regularity of solutions for a Model in Magnetohydrodynamics

---

ملخص باللغة العربية

في هذه الأطروحة، سندرس نموذج لمشكلة الهيدرو ديناميكية المغناطيسية. من مزايا هذا النوع من النماذج هو أنه يستخدم في العديد من التطبيقات ويلعب دورا حاسما في الفيزياء الفلكية، الجيوفيزياء، المغناطيسية الكوكبية، الهندسة والإنصهار النووي الخاضع للرقابة.
نتحكم في التدفق بواسطة معادلات نافيير ستوكس (Navier-Stokes) لسرعة الموائع ومعادلات ماكسويل (Maxwell) للمجال المغناطيسي. المعادلات غير الخطية مقترنة من خلال قانون أوم (Ohm) وقوة لورنتز (Lorentz) .
بتعبير أدق، نثبت وجود حل للمشكل التالي:

$$\begin{cases} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - \dfrac{1}{\rho\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} + \dfrac{1}{2\rho\mu}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right) + \dfrac{1}{\rho}\nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega, \\ -\lambda\Delta\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{u} = \operatorname{div}\,\boldsymbol{B} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

مع الشروط الحدية التالية:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \mathbf{curl}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma,$$

حيث Ω جزء مفتوح ومحدود من $\mathbb{R}^3$ من الصنف $C^{1,1}$ و قد يكون غير مترابط ببساطة. في هذه الحالة توجد قطوع ومن الضروري إضافة شرط يتعلق بتدفقات المجال المغناطيسي من خلال هذه القطوع

$$\int_{\Sigma_j} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant J.$$

الطريقة التي إتبعناها هي إستخدام نظرية النقطة الصامدة للوراي شاودر (Leray-Schauder) . للحصول على خصائص التراص للمؤثر، نستعين أولا ببعض التقديرات للأشعة (weak vector potentials) المطابقة لحقل الأشعة الذي ينتمي إلى بعض فضاءات سوبولاف (Sobolev) السالبة. كذلك ندرس ملوسة الحل حسب النظرية (L^p) . بدقة أكبر، سنثبت وجود حل عام في الفضاء $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ من أجل $p \geq 2$ وحل قوي في الفضاء $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ من أجل $p \geq \frac{6}{5}$.

Existence and Regularity of solutions for a Model in Magnetohydrodynamics

---

Short Summery of the thesis

In this thesis, we study a model of magnetohydrodynamics problem. One of the advantages of this type of model is that it is used in many applications and plays a crucial role in astrophysics, geophysics, planetary magnetism, engineering and controlled nuclear fusion. It describes the behavior of a fluid conducting electric current in the presence of electromagnetic fields. The flow is governed by the Navier-Stokes equations for the fluid velocity and Maxwell's equations for the magnetic field. The equations are non-linearly coupled via Ohm's law and the Lorentz force. More precisely, we prove the existence of solution to the problem

$$\begin{cases} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - \dfrac{1}{\rho\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} + \dfrac{1}{2\rho\mu}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right) + \dfrac{1}{\rho}\nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega, \\ -\lambda\Delta\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\,\boldsymbol{u} = \operatorname{div}\,\boldsymbol{B} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

with the following boundary conditions:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \mathbf{curl}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma,$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^3$ of class $C^{1,1}$ and possibly non simply-connected. Then there exists connected open surfaces and it is necessary to have a condition relating to the magnetic field through the cuts.

$$\int_{\Sigma_j}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \qquad 1\leqslant j\leqslant J.$$

Our approach is to use the Leray-Schauder fixed point theorem. To obtain the compactness properties of the operator, one main tool is given by some estimates for weak vector potentials corresponding to vector fields belonging to some negative Sobolev spaces. We also investigate the L^p-theory for the solution. More precisely, we will prove the existence of generalized solution in $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ for $p\geq 2$ and strong solution in $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ for $p\geq\frac{6}{5}$.

Existence et Régularité des Solutions pour un Problème en Magnetohydrodynamique

Résumé

Le sujet de la thèse porte sur l'étude d'un modèle mathématique issu de la magnétohydrodynamique (MHD)qui est utilisé dans de nombreuses applications. La MHD joue un rôle crucial en astrophysique, géophysique, magnétisme planétaire, ingénierie et fusion nucléaire contrôlée. Elle décrit le comportement d'un fluide conducteur du courant électrique en présence de champs électromagnétiques. L'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes pour la vitesse du fluide et les équations de Maxwell pour le champ magnétique. Les équations sont couplées de façon non linéaire via la loi d'Ohm et la force de Lorentz. Plus précisément, nous prouvons l'existence de solution au problème:

$$\begin{cases} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - \dfrac{1}{\rho\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} + \dfrac{1}{2\rho\mu}\nabla\left(|\boldsymbol{B}|^2\right) + \dfrac{1}{\rho}\nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ -\lambda\Delta\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = \text{div } \boldsymbol{B} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \mathbf{curl}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^{1,1}$ éventuellement non simplement connexe. Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir une condition portant sur les flux du champs magnétique à travers les coupures .

$$\int_{\Sigma_j} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant J.$$

Notre approche consiste à utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. Nous avons donné des estimations sur les potentiels vecteurs faibles correspondant à des champs vectoriels appartenant à certains espaces de Sobolev négatifs pour montrer la compacité de l'opérateur. Nous faisons également l'étude de la régularité en théorie L^p. Plus précisément, nous prouvons l'existence d'une solution généralisée dans $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ pour $p \geq 2$ et d'une solution forte dans $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ pour $p \geq \frac{6}{5}$.