

السنة الثالثة رياضيات بكالوريا + 5 و بكالوريا+4

الوحدة : قياس 1

الرمز : 313

الحجم الزمني الأسبوعي، دروس : 1 سا و 30 د

أعمال موجهة: 1 سا و 30 د

النظام : سنوي

المعامل : 2

تقديم

قسمت هذه الوحدة إلى شطرين : نظرية القياس والمكاملة 1 ، وتقدم في السنة الثالثة لجميع الطلبة ونظرية القياس والمكاملة 2 ، وتقدم في السنة الرابعة للطلبة الذين يدوم تكوينهم 5 سنوات.

الهدف من هذه الوحدة هو تقديم نظرية تكامل لوبيغ. تقدم بعد أن عرف الطالب تكامل ريمان في السنة الأولى والتكاملات الموسعة (المعممة) في السنة الثانية وهي تدرّس بالتوازي مع وحدة التحليل العقدي، التي تحتوي على قسط كبير من المكاملة. لذا فوحدتنا تسعى إلى تعميق وتمتين السند النظري للمكاملة. فلا ينبغي إذن التركيز على الجانب التقني لحساب التكاملات.

توجد، كما هو معروف، عدة كفاءات لتقديم نظرية مكاملة لوبيغ. إن الكيفية المتبعة هنا تعتمد على مفهوم القياس الموجب.

(أ) يستحسن قبل الشروع في التدريس أن تقدم رؤوس أفلام البرنامج للطلبة مع التعليق على كل فصل فيه. كأن تقول بأن الهدف من الجزء الأول، وهو "تكامل ستيلجس" هو تقديم بكيفية "محسوسة" موضوع نظرية المكاملة المتمثل في إعطاء معنى لمفهوم مساحة حيز من المستوي (مثلا). يمكن للأستاذ أن ينطلق من مسألة تربيع القطع المكافئ لأرخميدس، ثم يعمم حديثه ليتكلم عن تكامل ريمان فتكامل ستيلجس، مع ذكر تطبيقه في المسائل الفيزيائية. وبعد ذكر قصور تكاملي ريمان وستيلجس يتحدث عن تكامل لوبيغ ثم نظرية القياس التي تمكن من ادخاله بكيفية ملائمة، مجردة وعامة جدا. ويسعى الأستاذ عند ذكر كل هذا أن يبرر الفصول المختلفة التي تكوّن الوحدة. كما يغتنم هذه المناسبة لتقديم نبذة تاريخية سريعة حول نظرية المكاملة والقياس.

(ب) لا يخفي على أحد أن نظرية القياس والمكاملة صعبة بمكان وهي تحتاج إلى توظيف كل المفاهيم التحليلية والمجموعاتية التي تقدم في السنتين الأولى والثانية. لذا يتعين على الأستاذين المحاضرين والمطبق أن يقدموا وفي الأسبوع الأول وعلى شكل سلسلة تمارين مايلي :

1. مفهومي النهاية السفلى والعليا لمتتالية حقيقية ومنتتالية مجموعاتية وخواصها.
2. مفهومي النهايتين السفلى والعليا لتابع عند نقطة مع الخواص.
3. الاستمرار العادي والمنتظم ومفهومي التوابع اللبشيتزية والهولدرية.
4. النهايتين البسيطة والمنتظمة لمتتالية تابعة.
5. حساب تكامل ريمان لتوابع بسيطة بالحساب الفعلي لنهاية مجاميع ريمان.
6. دراسة المرور إلى النهاية تحت تكامل ريمان.
7. دراسة مكاملة سلسلة بسيطة عنصر بعنصر.

من المؤكد أن تناول كل التمارين التمهيدية سابقة الذكر يحتاج إلى أكثر من شهر، فعلى المسؤول على الأعمال الموجهة أن ينسق مع المسؤول على المحاضرات لكي ينتهي منها مع نهاية الفصل المتعلق بتكامل ريمان، على أن يعود إلى هذه التمارين من حين إلى آخر عندما يحتاج إلى نتائجها لتوضيح مسألة نظرية ما. (ج) أما فيما يخص تقديم البرنامج نفسه فينبغي فقط القول إن الشرط الأول من الوحدة (أي I) يتجنب الحديث عن قياس الجداء والمكاملة في عدة ابعاد وربطها بالمكاملة في بعد واحد بواسطة مبرهنة فوبيني، ويترك كل هذا إلى الشرط الثاني من الوحدة. لذا عند تناول قياس لوبيغ على R^N فينبغي أن ينظر إليه كقياس على هذا الفضاء دون ربطه بقياس لوبيغ على R ، على أن تقدم الأمثلة الخاصة بالتكاملات على R .

I تكامل ستيلجس

1. تكامل ريمان: تذكير سريع بتقسيمات مجال وبتعريف تكامل ريمان وخواصه الأساسية. تقديم التعاريف الثلاث التقليدية لتكامل ريمان وإثبات تكافؤها. تقديم مثال لتابع ريمان كمول على مجال لكنها متقطع عند كل نقطة ناطقة من مجال تعريفه. تعريف أجزاء R ذات قياس معدوم. مجموعة كانتور. الثلاثية. الشرط اللازم والكافي للقابلية للمكاملة حسب ريمان. تذكير بالتتابع الليبشترزية والهولدرية. تقديم الإستمرار المطلق والعمليات على التتابع المستمرة مطلقا على مجال متراص. التتابع ذات التغير المحدود. تفكيك التتابع ذات تغير محدود. حساب التغير الكلي بواسطة تكامل ريمان. العلاقة بين التغير المحدود والاستمرار المطلق. التابع "سلم كانتور. ولوبيغ".

2. تكامل ستيلجس :

تعريف تكامل ستيلجس $\int_a^b f dg$ بأنه $\lim_{\delta P \rightarrow 0} S(f, g, P, Q)$ حيث δP هو تنظيم التقسيم P للمجال $[a, b]$ و Q تقسيم وسط نسبة إليه. الشرط اللازم والكافي للقابلية للمكاملة حسب ستيلجس. قابلية تابع مستمر f للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى تابع رتيب g . العلاقة بين تكاملي ريمان وستيلجس في حالة g' مستمر على $[a, b]$. ثنائية خطية تكامل ستيلجس. المكاملة بالتجزئة. تبديل المتغير. التتابع المعرفة بواسطة تكامل ستيلجس. المرور إلى النهاية في تكامل ستيلجس. تكامل ستيلجس المعمم. دور النقطعات في تكامل ستيلجس المعمم. تكامل ريمان وستيلجس.

II. نظرية القياس والمكاملة

1. الجبر والعشائر

تعريف الجبر البوليوية، الجبر المولد من فئة مجموعات. تعريف العشائر، العشيرة المولدة من فئة مجموعات. العشيرة البوريلية. الفئات الرتبية. الفضاءات القبوسية.

2. التتابع القبوسية

تعريف التتابع القبوسية. معيار القابلية للقياس. العمليات على التتابع القبوسية. التقارب البسيط للتتابع القبوسية. الغلاف العلوي للتتابع القبوسية. مبرهنة تقرب تابع قبوس بمتتالية توابع بسيطة. العشائر المولدة من جماعات. توابع. التتابع القبوسية الحقيقية، العقدية.

3. القياسات الموجبة والقياسات الخارجية

عموميات حول القياسات الموجبة. أمثلة. خواص القياسات الموجبة (ومنها الاستمرار من الأسفل ومن الأعلى وتوطئة بوريل وكانتلي).

الانتميم. القياسات الخارجية. تمديد القياسات. التقاربات المختلفة لمتتاليات التوابع القياسية.

4. قياس لوبيغ

إنشاء قياس لوبيغ على \mathbb{R}^N إنطلاقاً من قياسه الخارجي: العشيرة $L(\mathbb{R}^N)$ لأجزاء \mathbb{R}^N القياسية حسب لوبيغ. البرهان على أن هذه العشيرة تحتوي على العشيرة البوريلية. القياسات النظامية.

5. المكاملة

تكامل تابع حقيقي بسيط. تكامل تابع حقيقي قيس وموجب. مبرهنة التقارب الرتيب. توطئة فاتو. تكامل تابع حقيقي، عقدي قيس. مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ. تكامل ستيلجس ولوبيغ على \mathbb{R} . المقارنة بين تكاملي ريمان ولوبيغ. تمييز التوابع الكاملة حسب ريمان على مجال $[a, b]$. مبرهنة الاشتقاق تحت إشارة التكامل. مبرهنة تبديل التغيرات.

6. الفضاء $L^1(X, A, \mu)$ للوبيغ

الفضاء $L^1(X, A, \mu)$ كفضاء شعاعي نظمي تام. التقارب في $L^1(X, A, \mu)$ والتقارب الـ μ شبه الكلي. كثافة الفضاء $C_0(\mathbb{R}^N)$ (للتوابع الحقيقية المستمرة على \mathbb{R}^N والمعدومة خارج جزء متراص) في الفضاء $L^1(\mathbb{R}^N)$ (للتوابع الكاملة على \mathbb{R}^N نسبة إلى قياس لوبيغ). الإستمرار بالمتوسط في $L^1(\mathbb{R}^N)$. مبرهنة الاشتقاق للوبيغ في حالة بعد واحد. المشتقين العلوي والسفلي لتابع حقيقي معرف على مجال من \mathbb{R} ، قابليتهما للقياس. تغطية ومبرهنة فيتالي (Vitali). قابلية تابع رتيب على مجال للاشتقاق شبه كلياً. حالة التوابع ذات تغير محدود. قابلية التوابع المعرفة بواسطة تكامل لوبيغ للاشتقاق شبه كلياً. تمثيل التوابع المستمرة مطلقاً بواسطة دستور نيوتن وليبنيتز.

ص 4/4

بعض المراجع حول نظرية القياس والمكاملة

(1) ف. ي. سميرنوف (1973، ص 318)، دروس في الرياضيات العليا، الجزء الخامس (القسم الأول). ترجمة

لفيف من الأساتذة، مطبعة جامعة دمشق.

(2) ي. عتيق (1997، ص 131)، حول نظرية القياس والمكاملة. تذكير نظري، تمارين ومسائل للحل وأخرى مع حلولها المفصلة - مطبوعة، المدرسة العليا للأساتذة، القبة.

(3) أ. كولموغوروف و س. فومين (1973، 1987، ص 786)، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي، ديوان المطبوعات الجامعية، ترجمة ابوبكر خالد سعد الله.

1. Jean-Pascal ANCEL & Yves DUCCEL (125p.), Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration, Ellipses. Paris.
2. Claude W. BURRILL & John R. KNUDSEN (1969, 419p.), Real variables, Holt, Rinebart and Winston, Inc., New York

3. Jean DIEUDONNE (1968. 406p.), *Eléments d'analyse*, Tome 2, Gauthiers-Villars, Paris.
 4. Claude GEORGE (1980, 432p.), *Exercices et problèmes d'intégration*, Gauthier-Villars, Paris.
 5. Roger V. JEAN (1989, 327 p.), *Mesure et intégration*, Presses de l'Université du Québec, Québec.
 6. Henri LEBESGUE (1904, 138 p.), *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gathier-Villars, Paris.
 7. Lakhdar MEZIANI (1978. 237p.), *Mesures et intégration*, Cours photocopié, Université d'Alger.
 8. Walter RUDIN (1966, 412p.), *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Prentice-Hill, New York.
 9. Malempati Madhusudana RAO (1987, 540p.), *Measure theory and intégration*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
 10. M. SAMUELIDES & L- TOUZILLIER (1993, 391 p.) *Problèmes d'analyse fonctionnelle et d'analyse harmonique*, Cépaduès-editions, Toulouse.
 11. Angus E. TAYLOR (1965. 437 p.) *General theory of finction and integration*, Dover Publications, Inc., New york.
 12. Alberto TORCHINSKY (1988, 403 p.), *Real variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York.
 13. Richard L. WHEEDEN & Antoni ZYGMUND (1977, 274 p.), *Measures and integral : An introduction to real analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York.
-