رياضيات

التسوّق في المدينة

ألبرتو أ. بِنتوا Alberto A. Pintoa

جامعة بورتو Porto ، البرتغال

تلمو بريريا Telmo Parreira

جامعة منيو Minho، البرتغال

هل حدث أن عُدْت محبطًا بسبب قلة الخيارات في السوق الذي أردت أن تقتني منها بعض الحاجيات؟ لماذا يميل منتجو البضاعة التي نشتريها إلى جعل منتوجاتهم مشابهة، قدر المستطاع، لبضاعة غيرهم من المنتجين؟ إذا وضعنا نموذجا لكيفية اختيار متسوقي مدينة من المدن للمتجر الذي سيشترون منه حاجياتهم فإن النتائج الرياضياتية تجعلنا نقدر قيمة قانون هوتلينگ Harold Hotelling (1895–1973) الذي ينص على أن جعل منتوجاتك مشابهة لمنتوجات منافسك هو في الواقع قرار صائب. يقودنا ذلك أيضا إلى نظرية الألعاب وتوازن ناش Nash Equilibruim.

1. مقدمة

نعتبر قرية أغلبية سكانها يقطنون على طول الشارع الرئيسي، ونفترض أنه يوجد في هذه القرية متجران فقط : متجر مانويل Manuel ومتجر جواكيم Joaquim؛ يستطيع القرويون الشراء في أيّ من المتجرين.

نمثل الشارع الرئيسي بقطعة مستقيمة $[0,L]$. ولتبسيط النموذج، نفترض أن متجر مانويل يقع في بداية الشارع عند النقطة O وأن متجر جواكيم يقع في نهايته عند النقطة L. نرمز بـ C_M و C_J لتكلفة المنتوج في متجر مانويل ومتجر جواكيم على الترتيب، وبـ P_M و P_J لسعر نفس المنتوج في كلا المتجرين.

يقيم أنطونيو في منزل رقمه $d \in \{0,1,\ldots,L\}$ في الشارع الرئيسي. إذا اشترى أنطونيو من متجر مانويل فسيكلفه ذلك مبلغا قدره $P_M + dt$، وإذا اشترى من متجر جواكيم فسيكلفه المبلغ $P_J + (L-d)t$ حيث t هي كلفة وحدة التنقل في أحد اتجاهي الشارع على السواء. قرر أنطونيو الشراء من المتجر الأقل كلفة، بمعنى:

– في حالة : $P_M + dt < P_J + (L-d)t$ فسيشتري من متجر مانويل.

– وفي حالة : $P_M + dt > P_J + (L-d)t$ فسيشتري من متجر جواكيم. لقد وُصف هذا النوع من المنافسة بين شركتين (بائعين) في نموذج هوتلينگ (انظر المرجعين [1] و [4]).

الآن، نفترض أن كل مقيم في القرية سيشتري وحدة واحدة من منتوج ما من أحد المتجرين. وهكذا فإن عدد الوحدات k المباعة في متجر مانويل يساوي عدد الزبائن الذين سيشترون من هذا المتجر، وربحه

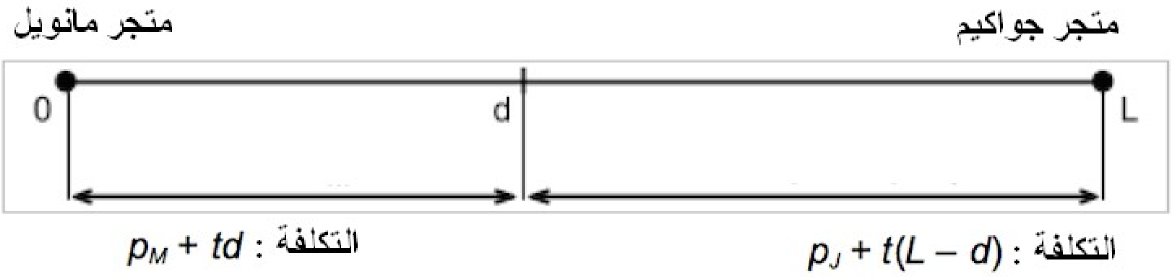
سيكون $k\,(P_M - C_M)$، حيث يمثل k عدد الوحدات المباعة و $(P_M - C_M)$ الربح عند بيع كل وحدة. وبنفس الطريقة نحسب ربح متجر جواكيم. ما هو السعر P_M و P_J الذي ينبغي أن يختاره كل من متجر مانويل ومتجر جواكيم على الترتيب لتحقيق أفضل الأرباح؟

هل يجب على كل من متجري مانويل وجواكيم التعاون في وضع أسعار مرتفعة؟ إذا أقدما فعلا على ذلك، فسيكون لدى كل منهما حافز لتخفيض السعر لأن هذا سيؤدي إلى إرتفاع حصته في السوق، وبالتالي ارتفاع ربحه. لكن بما أنهما يتنافسان، ولا يتعاونان فسيتّبعان هذا المسلك ذاته لتغيير الأسعار. ستؤدي هذه الظاهرة إلى سلسلة من التغييرات في الأسعار عند مانويل وجواكيم مع مراعاة كل منهما السعر الذي يراه عند منافسه. المشكلة الجادة التي تُطرح هنا هي معرفة ما إذا كانت هذه الديناميكية التحفيزية لتغيير الأسعار ستؤدي إلى نوع من التوازن في الأسعار؟ الإجابة عن هذا السؤال معروفة جيدا: إنه توازن ناش! توازن ناش هو إستراتيجية مثالية : يحدث توازن ناش في أسعار جواكيم ومانويل عندما لا يكون لدى أيّ منهما دافع لتغيير الأسعار مجددا. دعنا نشرح الآن كيفية حساب سعر ناش المتوازن لجواكيم ومانويل.

2. نموذج هوتلينگ

ليكن P_J و P_M السعريْن اللذين اختارهما جواكيم ومانويل. ونعتبر مستهلكا محايدا يقيم في المنزل $d_0 \in [0, L]$. بالنسبة لهذا المستهلك نفترض أن تكلفة الذهاب وشراء منتوج في متجر جواكيم تساوي تكلفة الذهاب وشراء نفس المنتوج من متجر مانويل (أنظر الشكل 1)، أي :

$$P_M + td_0 = P_J + t\left(L - d_0\right)$$



الشكل 1. شارع هوتلينگ

نلاحظ أن موقع المستهلك المحايد d_0 هو نقطة تلاقي الخط $P_M + td$ مع الخط $P_J + t(L-d)$ حيث d متغير مستقل. ومن ثمّ فالمستهلك المحايد يسكن في المنزل الواقع في العنوان:

$$d_0 = \frac{tL + P_J - P_M}{2t}.$$

إذا كان $d_0 \leq 0$ فلا أحد سيشتري من متجر جواكيم والنتيجة ستكون إفلاس المتجر. وإذا كان $d_0 \geq L$ فلا أحد سيشتري من متجر مانويل، ومن ثمّ سيكون الإفلاس عاقبته. أما إذا كان $d_0 \in (0, L)$ فكلا المتجرين سيأتيه زبائن ولن يفلس أي منهما، وعندها سيكون السوق تنافسيا.

لنعتبر السوق تنافسيا. عندئذ فالأشخاص الذين يقيمون على طول القطعة $[0, d_0]$ سيشترون من متجر مانويل، والذين يقيمون على طول القطعة $[d_0, L]$ سيشترون من متجر جواكيم. ليكن N عدد الأشخاص الذين تتوزع منازلهم بانتظام على طول الشارع. وعليه سيكون عدد المقيمين الذين سيشترون من متجر مانويل يساوي $d_0 N / L$، وعدد الأشخاص الذين سيشترون من متجر جواكيم سيكون $(L - d_0) N / L$.

وهكذا فإن ربح مانويل تحدده العلاقة:

$$\pi_M(P_M) = (P_M - C_M) d_0 \frac{N}{L} = (P_M - C_M)\left(\frac{tL + P_J - P_M}{2t}\right)\frac{N}{L},$$

كما أن ربح جواكيم معطى بـ:

$$\pi_J(P_J) = (P_J - C_J)(L - d_0)\frac{N}{L} = (P_J - C_J)\left(\frac{tL + P_M - P_J}{2t}\right)\frac{N}{L}.$$

يرغب مانويل وجواكيم في تحديد السعرين P_M و P_J لتبلغ أرباحهما $\pi_M(P_M)$ و $\pi_J(P_J)$ أقصى ما يمكن. من أجل ذلك نضع $x = P_M$ و $f(x) = \pi_M(P_M)$ فنحصل على:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - C_M)\left(\frac{tL + P_J - x}{2t}\right)\frac{N}{L} \\ &= -\frac{N}{2tL}x^2 + \frac{N\left(tL + P_J + C_M\right)}{2tL}x - \frac{N(C_M tL + C_M P_J)}{2tL}. \end{aligned}$$

بما أن معامل x^2 سالب تماما فإن الدالة f لها قيمة عظمى وحيدة تُدرك عند x^* (منتصف الجذرين)، أي $x^* = \left(C_M + P_J + tL\right)/2$ (لاحظ أن C_M و $P_J + tL$ هما جذرا $f\left(x\right) = 0$). وبذلك فإن الثمن P_M الذي يجب أن يضعه مانويل لتحقيق أعلى ربح هو:

$$P_M = \frac{1}{2}\left(C_M + P_J + tL\right).$$

وبالمثل، فالثمن P_J الذي ينبغي أن يختاره جواكيم لتحقيق أعلى ربح هو:

$$P_J = \frac{1}{2}\left(C_J + P_M + tL\right).$$

وهكذا، فإن السعرين اللذين يجب أن يختارهما مانويل وجواكيم هما حلاً جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} P_M = \left(C_M + P_J + tL\right)/2 \\ P_J = \left(C_J + P_M + tL\right)/2 \end{cases}$$

ذات المجهولين P_M و P_J.

بتعويض قيمة كل من P_M و P_J في الجملة فإن السعرين المعلنين في المتجرين بهدف تحقيق الزيادة في الربح هما كالتالي:

$$\begin{cases} P_M = tL + \frac{2}{3}C_M + \frac{1}{3}C_J, \\ P_J = tL + \frac{2}{3}C_J + \frac{1}{3}C_M. \end{cases} \qquad (1)$$

نلاحظ أن المتجر يجب أن يبيع المنتوج بسعر أكبر من التكلفة، أي : $P_M > C_M$ و $P_J > C_J$.

وبالنظر إلى (1)، نلاحظ أن هذين الشرطين معًا يكافئان القول:

$$|C_M - C_J| < 3tL. \qquad (2)$$

وهكذا، إذا كان هذا الشرط محققا فإن السوق يكون تنافسيا، أي أن مانويل وجواكيم سيكون لهما زبائن وأسعارهما هي المبينة في (1). تمثل ثنائية الأسعار (P_M, P_J) توازن ناش للمسألة المطروحة (انظر [5]). يعني ذلك أن (P_M, P_J) تمثل أفضل الأسعار التي يمكن أن يتبنّاها مانويل وجواكيم عند مراعاة كل منهما سعر الآخر. عندئذ يحقق مانويل وجواكيم على الترتيب الربح :

$$\pi_M = (P_M - C_M)\frac{N}{L}\left(\frac{tL + P_J - P_M}{2t}\right) = \frac{N}{L}\frac{(3tL + C_J - C_M)^2}{18t},$$

$$\pi_J = (P_J - C_J)\frac{N}{L}\left(\frac{tL + P_M - P_J}{2t}\right) = \frac{N}{L}\frac{(3tL + C_M - C_J)^2}{18t}.$$

من المعلوم أن الربح، شأنه شأن الأسعار، يتم تحديده من خلال تكلفة النقل t، وتكلفة الإنتاج C_M و C_J.

نلاحظ أنه:

أ) إذا كان $C_M > C_J + 3tL$ فسيؤدي ذلك إلى إفلاس متجر مانويل و $d_0 = 0$.

ب) إذا كان $C_J > C_M + 3tL$ فإن متجر جواكيم سيفلس و $d_0 = L$.

في كلتا الحالتين، فالعلاقة (2) غير محققة، وبالتالي فإن الصيغة (1) المحدِّدة للأسعار تصبح غير صالحة إن كان السوق تنافسيا.

تمرين: نعتبر مدينة عدد سكانها $N = 1000$، حيث طول الشارع الرئيسي فيها يساوي 1 كلم، ونفترض أن وحدة تكلفة النقل هي $t = 1$ (للمتر).

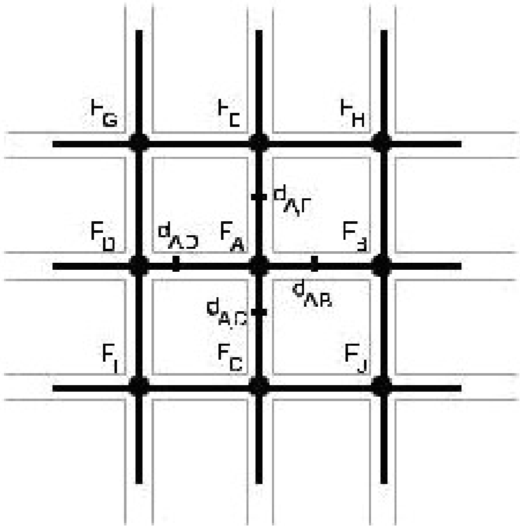
أ) نفترض أنه عندما تكون التكلفتان $C_M = 2100$ و $C_J = 5200$ فسيفلس أحد المتجرين. حدد في هذه الحالة المتجر المفلس.

ب) هب أن التكلفتين $C_M = 2100$ و $C_J = 2700$ تجعلان السوق تنافسيا، احسب السعر والربح لكل متجر.

3. التسوق في المدينة

نعتبر الآن أن مدينتنا تتكوّن من مجموعة شوارع رئيسية (ممثّلة في مستقيمات البيان الظاهر في الشكل 2) بحيث تقع المتاجر عند تقاطعات k شارعا (باعتبار $k > 2$). يمثل عدد الحواف، k، درجة العقدة.

يتشر الزبائن الذين يشترون المنتوجات المباعة في هذه المتاجر في كل مكان من المدينة. عندما يقع متجر F_A في عقدة ذات درجة k، فهو يتنافس مع k متجرا، وهذه المتاجر هي تلك الواقعة في جوار العقدة. نرمز بـ V_A إلى مجموعة المتاجر البالغ عددها k المجاورة للمتجر F_A. انظر المثال في الشكل 2، حيث يقع المتجر F_A في عقدة درجتها 4 ويتنافس مع المتاجر المجاورة F_B، F_C، F_D، F_E.



الشكل 2. مدينة هوتلينگ

نفترض أن تكلفة المنتوج في المتجر F_A هي C_A وأن سعره يساوي P_A لكل المستهلكين. ومن ثمّ فالمستهلكون من مختلف الأماكن المجاورة لمفترق الطريق يدفعون السعر P_A للمتجر F_A. ثم تضاف إلى ذلك تكلفة التنقل التي تكون متناسبة مع المسافة التي يقطعونها بين المنزل والمتجر F_A. نفرض أن طول المسار بين متجرين F_A و F_B هو L وأن عدد السكان بينهما هو N وذلك لتبسيط النموذج الرياضياتي.

وهكذا، فالمستهلك المحايد سيكون على مسافة $d_{A,B}$ من المتجر F_A، وعلى مسافة $L - d_{A,B}$ من المتجر F_B. وعليه نحصل على المعادلة

$$P_A + td_{A,B} = P_B + t\left(L - d_{A,B}\right). \qquad (3)$$

بحل (3)، نجد الموقع $d_{A,B}$ للمستهلك المحايد :

$$d_{A,B} = \frac{tL + P_B - P_A}{2t}$$

ومن ثم فربح المتجر F_A في هذه السوق معطى بـ:

$$\pi_{A,B} = \left(P_A - C_A\right)\frac{N}{L}d_{A,B} = \frac{N}{2tL}\left(P_A - C_A\right)\left(tL - P_A\right) + \frac{N}{2tL}\left(P_A - C_A\right)P_B.$$

من أجل كل متجر F_A –نرمز بـ k_A هنا للعدد k المعرف أعلاه عندما يرتبط بـ F_A– ومتجر مجاور $F_B \in V_A$، فإن دالة الربح π_A هي مجموع الأرباح المحققة في هذه السوق، بمعنى:

$$\pi_A(P_A) = k_A \frac{N}{2tL}(P_A - C_A)(tL - P_A) + \frac{N}{2tL}\sum_{B\in V_A} P_B(P_A - C_A)$$
$$= \frac{N}{2tL}(P_A - C_A)\left(k_A . tL - k_A P_A + \sum_{B\in V_A} P_B\right).$$

إذن، باعتبار شبكة تنافسية من الشوارع ذات M عقدة، فإن الأسعار P_A المختارة في المتاجر F_A ضمن توازن ناش هي حلول جملة المعادلات الخطية المؤلفة من M معادلة :

$$P_A = \frac{1}{2}\left(C_A + tL + \frac{1}{k_A}\sum_{B\in V_A} P_B\right) \qquad (4)$$

من أجل $A \in \{1,\ldots,M\}$.

برهان هذه النتيجة ما هو إلا تعميم لما قمنا به ضمن العنوان الفرعي السابق. انظر المرجعين [2] و [3]. إذا اعتبرنا شبكة متاجر فِعلية فحل هذه الجملة من المعادلات يتم باستخدام الحاسوب.

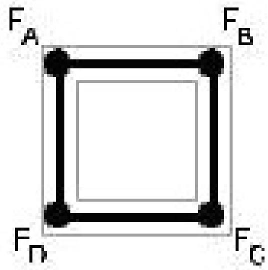
تمرين: نعتبر مربعًا فُتح في كل ركن منه متجر كما في الشكل 3. ومن ثمّ فعدد العقد هو $M = 4$. هب أن عدد سكان كل شارع يساوي $N = 1000$ وأن طول كل شارع 1 كلم، وأن وحدة تكلفة النقل هي $t = 1$ (للمتر).

أ) نفترض أن التكاليف هي : $C_A = C_B = C_C = C_D = 2000$.

بيّن أن الأسعار التنافسية هي $P_A = P_B = P_C = P_D = 3000$، وأن الربح لكل متجر هو 1000000.

ب) هب أن التكاليف هي $C_B = C_D = 2100$ و $C_A = C_C = 1800$.

أثبت أن الأسعار التنافسية هي $P_A = P_C = 2900$ و $P_B = P_D = 3000$، وأن الربح الناتج هو $\pi_A = \pi_C = 1210000$ و $\pi_B = \pi_D = 810000$.



الشكل 3. حيّ المدينة

4. الخاتمة

يُعتبر نموذج هوتلينگ بالغ الأهمية في الرياضيات الصناعية ونظرية الألعاب (انظر نماذج أخرى، مثلا في [3]). لقد وجدنا الإستراتيجية المثلى (= السعر) لكل لاعب (= المتجر) مع مراعاة إستراتيجيات اللاعبين الآخرين، كما حددنا ما يعرف باسم "توازن ناش". وعلى وجه الخصوص، رأينا كيف تقوم سلسلة المتاجر التي تبيع نفس المنتوج في سياق التنافس داخل المدينة بتحديد أسعارها. كما اتضح من أي متجر يجب أن يقتني المستهلك حاجياته حتى تكون الأسعار أنسب له.

المثال النموذجي لنظرية الألعاب هو "معضلة السجين" Prisoner's dilemma التي يمكن وصفها بسهولة، ونحن نقترحها للدراسة مستقبلا. إن مجال تطبيقات نظرية الألعاب واسع، ومن بين تلك التطبيقات دراسة سلوكات الإنسان.

المراجع

[1] H. Hotelling. Stability in Competition, The Economic Journal 39 (1929) 41-57.

[2] A. A. Pinto & T. Parreira. A hotelling-type network. Editors: M. Peixoto, A. A. Pinto, and D. Rand. Dynamics, Games and Science I. Springer Proceedings in Mathematics series 1, Chapter 45, (2011) 709-720.

[3] A. A. Pinto. Duopoly Models and Uncertainty. Interdisciplinary Applied Mathematics series. Springer-Verlag (2012).

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Location_model

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Nash_equilibrium

ترجمة : الطالبتين نسيمة حمودي ونجيمة جلولي

في إطار إعداد مذكرة تخرج بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

تحت إشراف : أبو بكر خالد سعد الله

عنوان المقال الأصلي : Trading in a Town

مصدر المقال الأصلي : http://blog.kleinproject.org/?p=3692