بعض تطبيقات القطوع المخروطية

كريستيان روسو Christiane Rousseau وإيفان سانت–أوبان Yvan Saint-Aubin
أستاذان بقسم الرياضيات والإحصاء، جامعة موتريال، كندا

1. الخاصية المميزة للقطع المكافئ

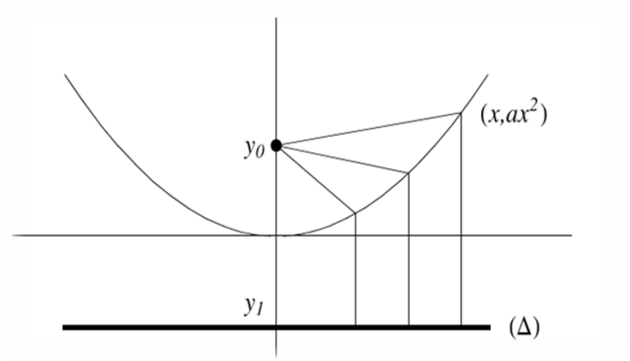
تقول الأساطير إن أرخميدس (287–212 ق.م) أحرق الأسطول البحري الروماني الذي كان يحاصر سرقوسة Syracuse، مدينته الأصلية في جزيرة صقلية الإيطالية. نفرض أنه استعمل الخاصية المميزة للقطع المكافئ التي سنناقشها في الأسفل.

كلنا يتذكر المعادلة الجبرية للقطع المكافئ $y = ax^2$، الذي تكون ذروته في مبدأ المعلم ومحوره شاقوليا. كما يوجد تعريف هندسي سنستعمله لاحقا.

تعريف 1

القطع المكافئ هو المحلّ الهندسي لنقاط المستوي التي تكون متساوية البعد عن النقطة F، (تدعى بؤرة القطع المكافئ) وعن المستقيم (Δ)، الذي يدعى دليل القطع المكافئ (الشكل 1).

إنه من السهل تحديد موضع وبؤرة دليل القطع المكافئ ذي المعادلة $y = ax^2$.



الشكل 1. التعريف الهندسي للقطع المكافئ.

قضية 2

بؤرة القطع المكافئ $y = ax^2$ هي النقطة ذات الإحداثيات $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$، ودليله معطى بالمعادلة $y = -\frac{1}{4a}$.

برهان

بالتناظر، تقع بؤرة القطع المكافئ على محور تناظره (المحور y)، وهذا في حالة ما إذا كانت معادلة القطع المكافئ هي $y = ax^2$، والدليل يجب أن يكون عموديا على هذا المحور. إذن

$(\Delta)=\{(x,y_1)/x\in\mathbb{R}\}$ و $F=(0,y_0)$.

من الواضح أن $y_1=-y_0$ لأن $(0,0)$ تنتمي للقطع المكافئ. كل نقطة من القطع المكافئ تكون إحداثياتها (x,ax^2)، وهذه النقطة متساوية البعد عن البؤرة والدليل. إذن

$$\left|(x,ax^2)-(0,y_0)\right|=\left|(x,ax^2)-(x,-y_0)\right|.$$

نربع الطرفين كي نتخلص من الجذر:

$$\left|(x,ax^2)-(0,y_0)\right|^2=\left|(x,ax^2)-(x,-y_0)\right|^2.$$

تعطي هذه المعادلة

$$x^2+(ax^2-y_0)^2=(x-x)^2+(ax^2+y_0)^2$$

أي

$$x^2+a^2x^4-2ax^2y_0+y_0^2=a^2x^4+2ax^2y_0+y_0^2.$$

وبالتالي

$$x^2(1-4ay_0)=0$$

من أجل كل x. ومن ثمّ يجب أن يكون معامل x^2 يساوي الصفر. إذن $1-4ay_0=0$، وعليه $y_0=\frac{1}{4a}$.

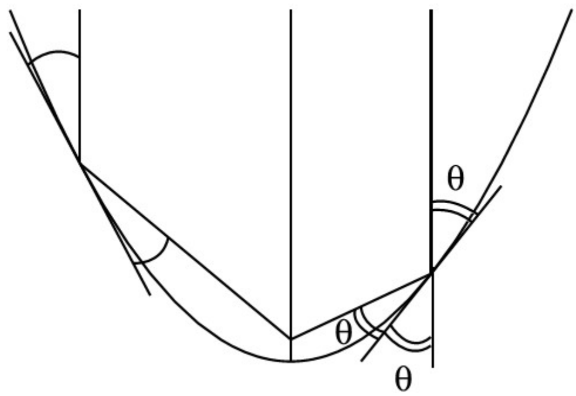
ولذلك فإحداثيات البؤرة هي $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$، كما أن الدليل معطى بـ $y=-\frac{1}{4a}$.

لفهم الخاصية المميّزة التي سنقوم بوصفها الآن، يجب تخيّل أن المنطقة الداخلية للقطع المكافئ عبارة عن مرآة. يخضع كل شعاع ضوئي ينعكس في نقطة من هذه المرآة لقانون الانعكاس: الزوايا التي يصنعها الشعاع الساقط والشعاع المنعكس مع مماس القطع المكافئ تكون متساوية.

المبرهنة التالية تصف الخاصية المميّزة للقطع المكافئ.

مبرهنة 3 (الخاصية المميزة للقطع المكافئ)

جميع الأشعة التي تنعكس على القطع المكافئ والموازية لمحوره، تمرّ من البؤرة F.



الشكل 2. خاصية مميزة للقطع المكافئ.

برهان

نعتبر القطع المكافئ ذي المعادلة $y=f(x)$ حيث $f(x)=ax^2$. نحتفظ بالتابع f لاستعماله في المبرهنة 4. لتكن (x_0,y_0) نقطة من القطع المكافئ والزاوية التي يصنعها الشعاع الساقط مع القطع المكافئ (معناه مع مماس القطع المكافئ في النقطة (x_0,y_0)).

بفضل التناظر، نستطيع أن نختار $x_0\geq 0$. بالنظر للشكل 2 وباستعمال حقيقة كون كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتين، نرى أن الشعاع المنعكس يصنع زاوية 2θ مع الخط الشاقولي، وهذا يعني زاوية $\frac{\pi}{2}-2\theta$ مع الخط الأفقي. إذن معادلة الشعاع المنعكس هي

$$y-y_0=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)(x-x_0) \qquad (1)$$

(نستعمل هنا $x_0\geq 0$ ، لأنه ينبغي لنا إضافة الإشارة – في حالة $x_0<0$) يجب حساب $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$ في التابع عند x_0 . يُعطى ميل مماس القطع المكافئ بـ $f'(x_0)=2ax_0$. كما أن الزاوية التي يصنعها المماس مع الخط الأفقي هي $\frac{\pi}{2}-\theta$ ، لدينا

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=f'(x_0)=2ax_0 .$$

ولدينا

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cot 2\theta .$$

بما أن $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ و $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ، نحصل على

$$\cot 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}}{\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}}=\frac{\cos^2\theta-1}{2\cot\theta}.$$

ومن ثمّ

$$\cot 2\theta=\frac{\left(f'(x_0)\right)^2}{2f'(x_0)}=\frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0}.$$

بأخذ $x=0$ في المعادلة (1) وبملاحظة أن $y_0=f(x_0)$ نجد نقطة تقاطع الشعاع المنعكس مع المحور العمودي. نحصل على

$$y=f(x_0)-x_0\frac{\left(f'(x_0)\right)^2-1}{2f'(x_0)}.$$

نستخدم الآن $f(x)=ax^2$ ، فنحصل على

$$y=\frac{1}{4a},$$

هذا معناه أن نقطة تقاطع الشعاع المنعكس مع المحور العمودي للقطع المكافئ $(0,y)$ تكون مستقلة عن الشعاع الساقط الشاقولي. علاوة على هذا، نعرف أن النقطة $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$، هي نقطة تقاطع جميع الأشعة المنعكسة، وهي بالضبط بؤرة القطع المكافئ.

العكس أيضا صحيح.

مبرهنة 4

القطع المكافئ هو المنحني الوحيد بحيث يوجد اتجاه من أجله، تكون جميع الأشعة الموازية لهذا الاتجاه والمنعكسة على هذا المنحنى تمرّ بنفس النقطة.

مخطط البرهان

إذا اعتبرنا منحنى معادلته $y=f(x)$ ، يجب حل المعادلة التفاضلية

$$f(x_0)-x_0\frac{\left(f'(x_0)\right)^2-1}{2f'(x_0)}=C$$

حيث C ثابت، وهو ما يكافئ حل المعادلة التفاضلية (نضع $x_0=x$)

$$2f(x)f'(x)-x\left(f'(x)\right)^2-2Cf'(x)+x=0\,.$$

لن نقدم الحل هنا. بينما الذين يعرفون نظرية المعادلات التفاضلية يلاحظون أن هذه المعادلة غير خطية من الدرجة الأولى.

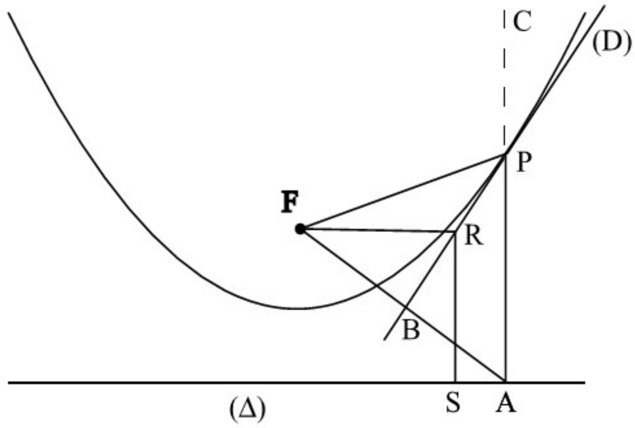
سنقدم برهانا هندسيا للمبرهنة 3 نستعمل فيه فقط التعريف الهندسي للقطع المكافئ المقدم في التعريف 1.

برهان هندسي على المبرهنة 3

لنستغل على الشكل 3.

نعتبر قطعا مكافئا بؤرته F ودليله (Δ). لتكن P نقطة من القطع المكافئ، ولتكن A المسقط العمودي لـ P على (Δ). من تعريف القطع المكافئ، نعلم أن $|PF|=|PA|$. لتكن B منتصف القطعة FA وليكن (D) المستقيم الذي يشمل P و B. من معلوم أن المثلث FPA متساوي الساقين، و $\widehat{FPA}=\widehat{APB}$. يتم إثبات المبرهنة إذا أثبتنا أن المستقيم (D) هو مماس للقطع المكافئ في P. ننظر إلى التمديد PC لـ PA، وهو الشعاع الساقط. الزاوية التي يصنعها PC مع المستقيم (D)، أي الزاوية بين الشعاع الساقط والمستقيم (D)، تساوي الزاوية $\widehat{APB}$ (زاويتان متقابلتان بالرأس) التي تساوي الزاوية

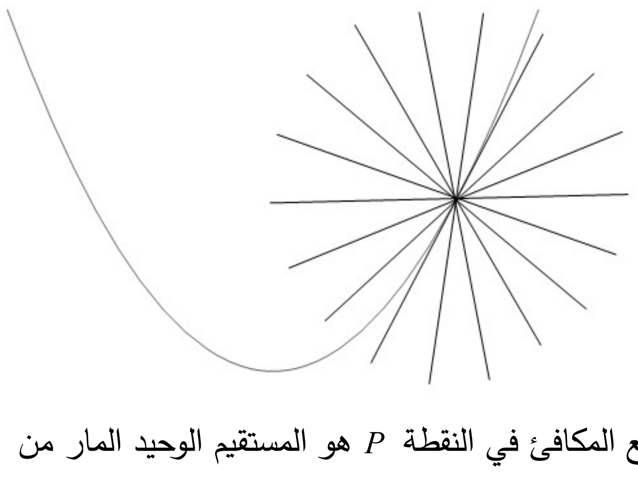
$\widehat{FPB}$. لذا، إذا اعتبرنا أن المستقيم (D) يتصرف كمرآة وإذا كان PC هو الشعاع الساقط، فيكون PF هو الشعاع المنعكس.



الشكل 3. البرهان الهندسي على الخاصية المميزة للقطع المكافئ.

يجب إثبات أن المستقيم (D) المحدد أعلاه هو مماس القطع المكافئ في النقطة P.

يتبين لنا أن جميع نقاط المستقيم (D) ماعدا النقطة P، تقع تحت القطع المكافئ. في الواقع، من السهل أن نقتنع بأن كل مستقيم يمر من النقطة P ويختلف عن المماس لديه نقاط تقع أعلى القطع المكافئ (انظر الشكل 4).



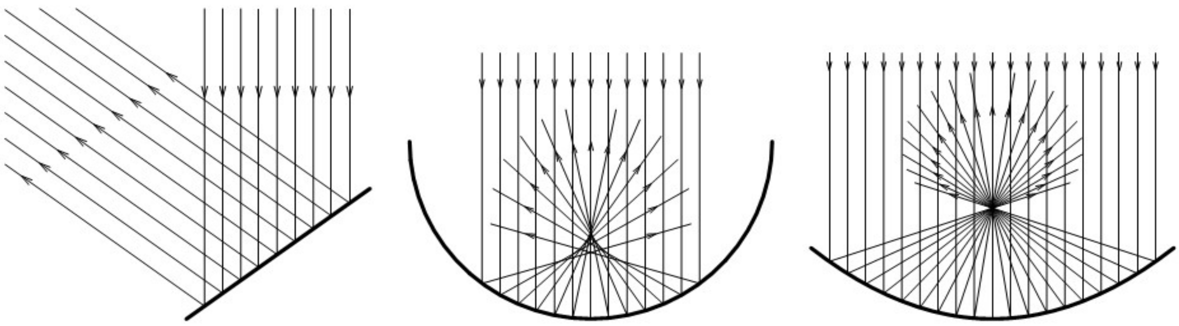
الشكل 4. مماس القطع المكافئ في النقطة P هو المستقيم الوحيد المار من P وليس لديه نقاط تقع أعلى القطع المكافئ.

تُعرّف الخاصية الهندسية القطع المكافئ، التي يمكن إعادة صياغتها كما يلي: لتكن R نقطة من المستوي و S المسقط العمودي لـ R على الدليل. إذن

$$\begin{cases} |SR|<|FR| \text{ إذا كانت } R \text{ فوق القطع المكافئ،} \\ |SR|=|FR| \text{ إذا كانت } R \text{ تقع على القطع المكافئ،} \\ |SR|>|FR| \text{ إذا كانت } R \text{ أسفل القطع المكافئ.} \end{cases} \qquad (2)$$

لتكن R نقطة كيفية من (D) تختلف عن P، ولتكن S مسقطها العمودي على (Δ). المثلثان FPR و PAR متقايسان، لأنه لدينا زاويتان متقايستان بين ضلعين متقايسين. إذن $|AR|=|FR|$. من ناحية أخرى، بما أن AR وتر في المثلث RSA، فإن $|SR|<|AR|$. إذن $|SR|<|FR|$، وهذا يعني أن R يقع أسفل القطع المكافئ حسب العلاقات (2).

هل هذه الخاصية حقا مميّزة؟ تؤكد المبرهنة 4 أن هذه الخاصية تميّز القطع المكافئ. كيف نترجم هذا عمليا؟ في الشكل 5 مرآة مسطحة تحول كل الأشعة المتوازية إلى أشعة متوازية أخرى، مرآة دائرية تحول كل الأشعة المتوازية إلى حزمة من الأشعة لا تتمركز في البؤرة، بينما تلقي المرآة المكافئية كل شعاع من الأشعة المتوازية على محورها، التي تتمركز في نقطة. لهذا لا نستغرب كثيرا إذا ما وجدنا القطع المكافئ في العديد من التطبيقات التكنولوجية.



(أ) مرآة مكافئية (ب) مرآة دائرية (ج) مرآة مسطحة

الشكل 5. مقارنة الأشعة المنعكسة من طرف مرآة مكافئية ومرآة دائرية ومرآة مسطحة.

الهوائيات المقعرة

يوجَه المحور المركزي للهوائي المقعر في العادة نحو مصدر الإشارة (غالبا ما يكون قمر صناعي). ثم يتموضع المستقبِل على بؤرة الهوائي. تُظهر الصورة الموضحة في الشكل 6 هوائي مقعر في مدخل مدينة هوفن Hofn بإيسلندا التي تكثر فيها الجبال والمضائق، ولذا يتعذّر أحيانا توجيه الهوائي مباشرة نحو القمر الصناعي المرجو. وبالتالي عند المرور بالمضائق بين الجبال نلاحظ أزواجا من الهوائيات المقعرة، كل منها موجّه نحو قاع الوادي (المضيق) : الأول منها يعمل بمثابة مستقبل، يمرر المعلومات الواردة للهوائي الآخر والذي بدوره يبعث تلك المعلومة المستقبلة.

الشكل 6. هوائي مقعر في مدخل مدينة هوفن بإيسلندا.

الرادار

يأخذ الرادار شكل القطع المكافئ، لكن هناك اختلافا بينه وبين الهوائي المقعر، فتوجيه محور الرادار يكون متغيّرا، وهو الذي يبعث أمواجا كهرومغناطيسية في ذلك الاتجاه. عندما تضرب الموجات الكهرومغناطيسية الهدف، تنعكس ولا تعود إلى الرادار إلا تلك التي تضرب الهدف عموديا، وهي بدورها تسقط على البؤرة حيث يوجد المستقبل. يظل الرادار في حالة دوران ويبقى محوره أفقي تقريبا لأجل ضمان تغطية العديد من الاتجاهات.

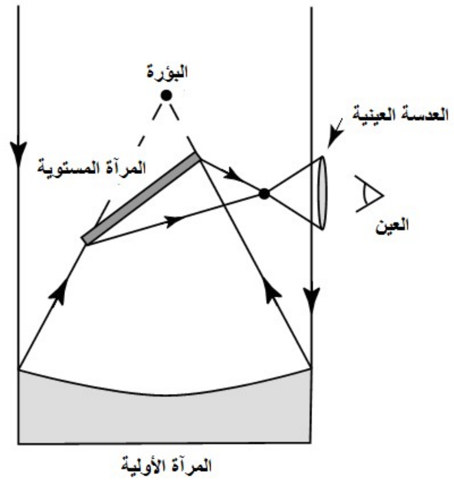
المصابيح الأمامية للسيارات

هنا كما في الرادار، يقع المصباح الكهربائي في المركز (البؤرة) ويبعث الأشعة في كل الاتجاهات، تنعكس جميعها نحو الخلف في أشعة متوازية.

المقاريب (التلسكوبات)

ننصب المقراب بحيث يكون محوره موجها نحو منطقة السماء التي نودّ رصدها. تكون الأشعة الضوئية أساسا موازية لمحور المقراب، وتنعكس من خلال البؤرة. تعاني المقاريب من هذا النوع من مشكلة كبيرة: المرآة المكافئية تنشئ الصورة في بؤرة القطع المكافئ، معناه فوق المرآة. نلاحظ أنه لا ينبغي للمراقب أن يكون فوق المرآة (لأنه يمنع دخول الأشعة الضوئية)، لذا يجب استعمال مرآة ثانوية. وهناك طريقتان تقليديتان للقيام بهذا الأمر.

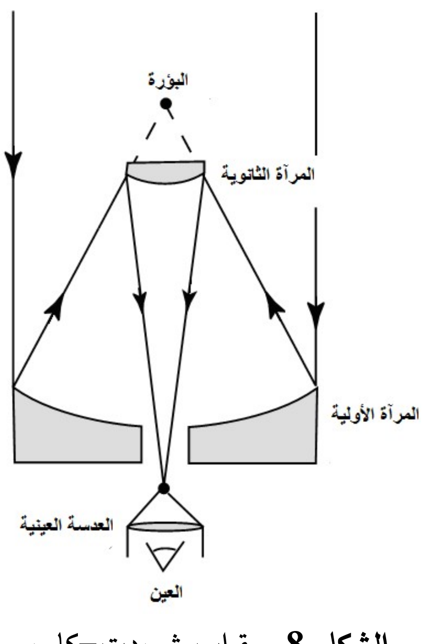
1. الأولى هي استخدام مرآة مسطحة توضع في زاوية مائلة كما في الشكل 7. يدعى هذا النوع من المقاريب مقراب نيوتن.



الشكل 7. مقراب نيوتن.

2. الطريقة الثانية هي استخدام مرآة ثانوية محدبة تقع فوق مرآة كبيرة تدعى مرآة أولية. ليس من الضروري هنا أن تكون المرآتان مكافئيتان لأن هذا العمل لا يرمي سوى لتكوين انعكاسات بين زوج من المرايا، لتركز الشعاع الموازي في نقطة واحدة، الشكل 8. ومع ذلك توجد حالة بحيث تكون المرآة الأولية مكافئية. في هذه الحالة، تُختار المرآة الثانوية زائدية محدبة، حيث بؤرة القطع المكافئ هي نفسها بؤرة القطع الزائد. يعود اختيار المرآة الثانوية للخاصية المميزة للقطع الزائد التي سنقدمها في العنوان الفرعي 3 أدناه. يدعى هذا النوع من المقاريب بمقراب شميدت–كاسيجرين Schmidt – Cassegrain.

نشير إلى أنه بدأ العمل مؤخرا في صناعة مقاريب ذات مرآة سائلة.



الشكل 8. مقراب شميدت–كاسيجرين.

الأفران الشمسية

تستخدم الأفران الشمسية لالتقاط الطاقة الشمسية، وتحويلها إلى طاقة كهربائية. تم بناء العديد منها بمدينة أوديلو Odeillo، التي تقع في جبال البيريني Pyrénées، حيث يقع مخبر PROMES-CNRS (مخبر العمليات، مواد الطاقة الشمسية، المركز القومي الفرنسي للبحث العلمي). نلاحظ أن كمية الشمس المتحصل عليها في هذه المنطقة استثنائية (الشكل 9).

بالمقارنة، يوجد في فرنسا حوالي 250 سدا كهرومائيا تتراوح قدرة كل منها بين 10 كيلوواط إلى 100 ميغاواط. في حين تتراوح قدرة سدود هيدرو–كيبك Hydro-Québec بين 1000 و2000 ميغاواط. وتنتج التوربينات حوالي 600 كيلوواط.

صنع الفرن الشمسي الذي يظهر في الشكل 9 بمرآة مكافئية كبيرة مساحتها 1830 متر مربع. لا نستطيع توجيه مرآة كبيرة نحو الشمس، لذا نستعمل مجموعة مكوّنة من 63 مرآة متحركة (الهيليوستات)، تشمل مساحة إجمالية قدرها 2835 متر مربع. الهيليوستات هو مرآة توجه الأشعة المنعكسة في اتجاه ثابت بطريقة آلية وعلى مدار الساعة. تكون الهيليوستات مثبّتة ومبرمجة بحيث توجه الأشعة الشمسية التي تصل نحو الفرن الشمسي، وتكون موازية لمحور الفرن.

الشكل 9. أكبر فرن شمسي بأديلو. مع بعض المرايا الدوّارة لالتقاط الأشعة الشمسية (الصورة لـ سيرج شوفن Serge Chavin).

الشكل 10. توجه المرايا الدوّارة العاكسة لأشعة الشمس، الأشعة نحو الفرن الشمسي بأديلو (الصورة لـ سيرج شوفن).

لكن، هذا يتطلب توجيه الفرن الشمسي نحو الشمال! نلاحظ أن جميع الأشعة التي يتلقاها الفرن تنعكس في البؤرة حيث يوجد جهاز استقبال يحتوي على الهيدروجين الذي يسخن إلى درجة حرارة عالية. يتم تحويل هذه الحرارة إلى طاقة ميكانيكية ثم كهربائية وفق آلية تدعى دورة ستيرلينغ Cycle Stirling. تهدف الأبحاث حاليا إلى تحسين محصول تحويل الحرارة إلى كهرباء.

عودة إلى أسطورة أرخميدس

اقترح أرخميدس استعمال القطوع المكافئة (حسب الأسطورة) فقام بصناعة مرايا مكافئية كبيرة، محاورها موجهة نحو الشمس وبؤرها أقرب ما يكون إلى الأسطول البحري الروماني. لا شكّ أن التكنولوجيا الحديثة تستطيع إنتاج مرايا كبيرة ذات قدرة انعكاسية كافية تسمح بحرق شراع يقع على مسافة بعيدة. لكن في المقابل، نشك أن تكنولوجيا ذاك العصر كانت قادرة على إنتاج وسائل الدفاع هذه.

اختبرت مجموعة من المهندسين بمعهد ماساشوستس للتكنولوجيا (MIT) الأمريكي مثل هذه العملية حيث استعملوا أكثر من مئة مرآة مساحة كل منها حوالي 0.1 متر مربع، ونجحوا بعد عدة محاولات، بحرق باخرة طولها 3 أمتار تبعد عن المرآة حوالي 30 مترا. وقد أُنتقدت هذه التجربة لأن المهندسين استعملوا أدوات متطوّرة لم تكن متوفرة في عصر أرخميدس. ومع ذلك، بيّنت هذه التجربة أن الفكرة ليست سخيفة كما نعتقد.

لا يستطيع أرخميدس أن يشتري مئات المرايا من محلٍ جاهز! ربما استعمل سلسلة من الدروع الملمعة جيدا موضوعة جنبا إلى جنب؟ نشك في ذلك، لكن لا يمكن استبعادها.

2 القطع الناقص

تذكير بالتعريف الهندسي للقطع الناقص.

تعريف 5

القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقاط المستوي التي مجموع بعديها عن النقطتين F_1 و F_2 هو مقدار ثابت $C>|F_1F_2|$. تدعى النقطتين F_1 و F_2 ببؤرتي القطع الناقص.

للقطع الناقص خاصية مميّزة كما للقطع المكافئ.

مبرهنة 6 (الخاصية المميزة للقطع الناقص)

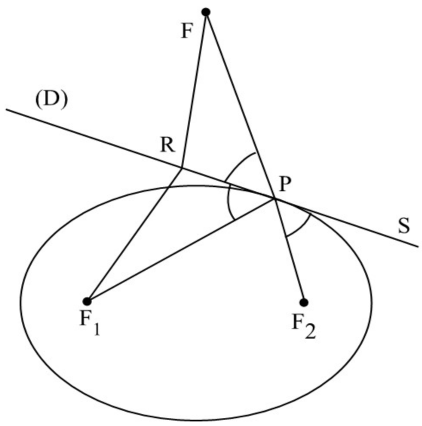
كل شعاع ساقط يمرّ من أحد البؤرتين وينعكس على القطع الناقص يصل إلى البؤرة الأخرى.

برهان

هنا أيضا سنعطي برهانا هندسيا يستعمل التعريف 5 فقط، الذي نعيد كتابته كما يلي: لتكن R نقطة كيفية من المستوي، لدينا

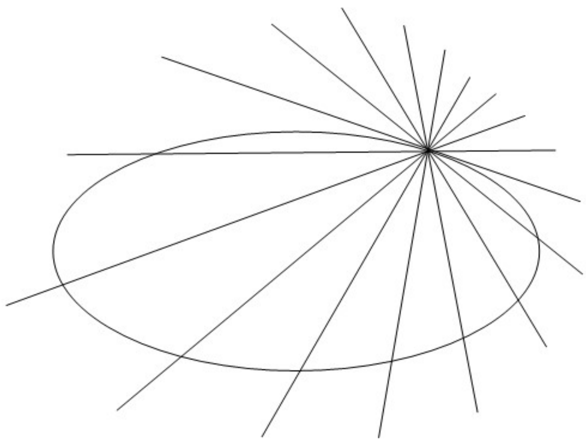
$$\left.\begin{array}{l} |F_1R|+|F_2R|<C \text{ إذا كانت } R \text{ داخل القطع الناقص،} \\ |F_1R|+|F_2R|=C \text{ إذا كانت } R \text{ على القطع الناقص،} \\ |F_1R|+|F_2R|>C \text{ إذا كانت } R \text{ خارج القطع الناقص.} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

نعتبر شعاعا منبثقا من النقطة F_1 ويقطع القطع الناقص في نقطة P (الشكل 11). نأخذ المستقيم (D) الذي يشمل النقطة P ويجعل الزوايا متساوية مع F_1P و F_2P.



الشكل 11. الخاصية المميّزة للقطع الناقص.

علينا إثبات أن هذا المستقيم مماس للقطع الناقص في P. مرة أخرى، سنستخدم حقيقة كون كل مستقيم يمر من النقطة P ويختلف عن المماس لديه نقاط داخل القطع الناقص (الشكل 12).



الشكل 12. مماس القطع الناقص في النقطة P هو المستقيم الوحيد الذي يمر من P وليس لديه نقاط داخل القطع الناقص.

علينا إثبات أن كل نقطة R من (D) وتختلف عن P تحقق العلاقة $|F_1R|+|F_2R|>C$. بما أن P و R تنتميان إلى (D)، يكون لدينا من التناظر $|FP|=|F_1P|$ و $|FR|=|F_1R|$. إذن، المثلثان F_1PR و FPR متقايسان. لأنهما يشتركان في ثلاثة أضلاع متقايسة، وينتج من هذا أن $\widehat{FPR}=\widehat{F_1PR}$. من تعريف (D) لدينا $\widehat{F_1PR}=\widehat{F_2PR}$، إذن $\widehat{FPR}=\widehat{F_2PS}$، من هذه المعطيات نستنتج أن F_2 و F و P على استقامة واحدة. يترتب عن هذا

$$|FF_2|=|FP|+|PF_2| \quad \text{و} \quad |F_1R|+|F_2R|=|FR|+|F_2R|>|FF_2| .$$

عندنا أيضا

$$|FF_2|=|FP|+|PF_2|=|F_1P|+|PF_2|=C$$

إذن : $|F_1R|+|F_2R|>C$

ومنه نستنتج أن R تقع خارج القطع الناقص.

المرايا الناقصية

تُدرس المرايا الناقصية في الضوء الهندسي، وهي تستعمل بكثرة في التطبيقات. تُحول المرآة المكافئية شعاعا مصدره نقطة (مثلا: مصباح) إلى شعاع متوازي (كما هو الحال بالنسبة للأضواء الأمامية للسيارات)، في حين تعكس المرآة الناقصية الأشعة التي مصدرها نقطة إلى أشعة تتلاقى في نقطة أخرى. تُستخدم بعض المصابيح مع المرايا الناقصية، هذه الحالة نجدها في عارضات الفيلم، تجمع المرآة الناقصية الضوء وتعكسه من خلال الفتحة الضيقة للعدسة لكي تمر من خلال الفيلم. كما تأخذ المرايا الثانوية للتلسكوبات أشكالا ناقصية.

الأقواس الإهليجية (الناقصية)

تُلاحظ الخاصية الموصوفة أيضا في الصوت. على سبيل المثال، تكون أقواس مترو باريس تقريبا ناقصية. فالمسافر الذي يقع على الرصيف (ليس بعيدا عن بؤرة القطع الناقص) يفهم جيدا محادثة شخص يقابله في الرصيف الآخر (بالقرب من البؤرة الأخرى) أحسن من فهمه لشخص يقع بالقرب منه في نفس الرصيف !

3 القطع الزائد

تذكير بالتعريف الهندسي للقطع الزائد.

تعريف 7

القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقاط المستوي بحيث القيمة المطلقة للفرق بين أبعاد هاته النقاط عن النقطتين F_1 و F_2 (اللّتان تدعيان بالبؤرتين) تساوي ثابت C، حيث $C < |F_1F_2|$. إذن، تقع نقطة P على القطع الزائد إذا وفقط إذا

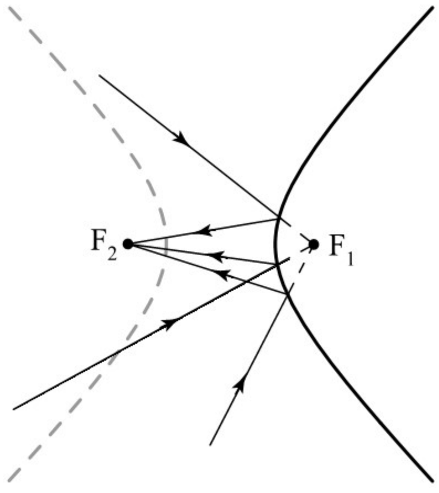
$$\left||F_1P| - |F_2P|\right| = C .$$

للقطع الزائد فرعان : الفرع الذي يتعلق بالبؤرة F_1، وهو مجموعة النقاط P بحيث $|F_2P| - |F_1P| = |C|$، والفرع الذي يتعلق بالبؤرة F_2 الممثل بمجموعة النقاط P بحيث $|F_1P| - |F_2P| = C$.

القطع الزائد له الخاصية المميّزة التالية.

نظرية 8 (الخاصية المميزة للقطع الزائد)

كل شعاع يسقط من خارج فرع القطع الزائد متجها نحو البؤرة التي تقع داخل هذا الفرع، ينعكس متجها نحو بؤرة الفرع الآخر (الشكل 13).



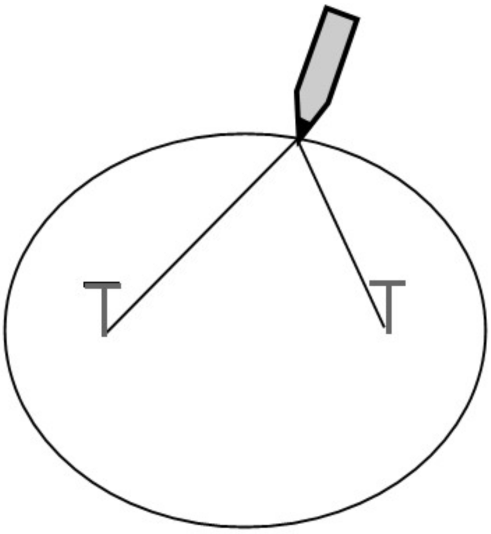
الشكل 13. الخاصية المميزة للقطع الزائد.

المرايا الزائدية

تُدَرس المرايا المحدبة الزائدية أيضا في الضوء الهندسي وتستعمل في عدد من التطبيقات، من بينها، صناعة آلة التصوير. كما رأينا سابقا أن المرآة الأولية في مقراب شميدت–كاسيجرين، تكون مكافئية (الشكل 8)، تجمع الأشعة الضوئية الموازية لمحورها في البؤرة. والمرآة الثانوية محدبة زائدية لها نفس بؤرة المرآة الأولية، تعكس الأشعة الضوئية المتقاربة في البؤرة الثانية للمرآة الزائدية.

أدوات هندسية لرسم القطوع المخروطية

نظرا لأهمية القطوع المخروطية، ابتكرنا أدوات هندسية لرسمها. كما يتيح التعريف الهندسي للقطع الناقص الرسم بشد حبل طوله ثابت C بين نقطتين F_1 و F_2 (مثلا، نغرس مسمارين في F_1 و F_2 يشدّن الحبل) ثم نأخذ قلما ونشد الحبل بالطريقة الموضحة في الشكل 14. نلاحظ جيدا أن هذه الطريقة ليست دقيقة، لأنه من الصعب التحكم في زاوية القلم.



الشكل 14. أثر قطع ناقص باستعمال حبل مثبت طرفاه عند البؤرتين.

ترجمة بتصرف لجزء من الفصل 15 من كتاب
Christiane Rousseau and Yvan Saint-Aubin : Mathematics and Technology, Springer, 2008.
هيئة التحرير