المسألة المكية

حسن زلاسي
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة الشهيد حمه لخضر، الوادي
z.hacen@gmail.com

1. مقدمة

لا شك أنّ المسائل الرياضياتية هي الوقود الأساسي الذي يدفع بعجلة البحث والتطوير في الرياضيات. تكون هذه المسائل في العادة مرتبطة بالحياة اليومية للناس، ويساهم بعضها في فهم ظواهر فيزيائية أو فلكية أو غيرها. وقد ذاع صيت علماء مسلمين في العديد من المجالات على غرار الرياضيات، الفيزياء، الفلك، الطب، الكيمياء، إلخ. ومن بين علماء الرياضيات خاصة، نذكر العالم ابن حمزة المغربي والذي اشتهر بحلّه للمسألة المكية التي سنناقشها في هذا المقال.

طُرحت هذه المسألة على العالم ابن حمزة المغربي، والذي كان جزائريا، من قِبل بعض الهنود أثناء زيارته لمكة من أجل أداء مناسك الحج، وقد أوردها في كتابه **تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد**. جاء نص المسألة كالآتي:

"إنّ رجلًا من الهند يمتلك 81 نخلة. النخلة الأولى تعطي في السنة رطلًا واحدًا من التمر، والنخلة الثانية تعطي رطلين والثالثة تعطي 3 أرطال والرابعة 4 أرطال، وهكذا إلى النخلة الواحدة والثمانين التي تعطي 81 رطلًا. مات هذا الرجل وعنده 9 أبناء. أوصى بأن يُعطى كل ابن 9 نخلات بشرط أن يكون جميع الأبناء متساوين في عدد الأرطال التي يحصلون عليها من هذه النخيل. فكيف يمكن تقسيم النخل بحيث يكون لكل ولد 9 نخلات تعطي نصيبًا من التمر يساوي نصيب كل واحد من بقية الإخوة؟"

بعد أن عجز كبار علماء الهند عن الإجابة عن هذه المسألة، طُرحت على العالم ابن حمزة الذي قدم جدولًا يعطي فيه حلا لها. وكان حله كالآتي:

الأبناء	1	2	3	4	5	6	7	8	9
النخيل	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	18	10	11	12	13	14	15	16	17
	26	27	19	20	21	22	23	24	25
	34	35	36	28	29	30	31	32	33
	42	43	44	45	37	38	39	40	41
	50	51	52	53	54	46	47	48	49
	58	59	60	61	62	63	55	56	57
	66	67	68	69	70	71	72	64	65
	74	75	76	77	78	79	80	81	73

من بين الأسئلة التي يمكن أن تتبادر لذهن القارئ: كيف أنشأ العالم ابن حمزة هذا الحل؟ وما هو العدد الإجمالي للحلول الممكنة لهذه المسألة؟ أعتقد أنّ الإجابة عن السؤال الثاني ليست سهلة على الإطلاق، بل أرى أنّ هذا السؤال أصعب من مسألة تعداد المربعات اللاتينية (سأحاول أن أبرر اعتقادي هذا لاحقا).

في هذا المقال سنحاول الإجابة عن هذين السؤالين، حيث سنبيّن كيفية إنشاء حلول أخرى لهذه المسألة، كما نبرهن أنّ عدد الحلول أكبر تماما من عدد المربعات اللاتينية المختزلة.

2. حلول ابن حمزة

لقد اعتمد ابن حمزة في حله على الفكرة التالية:

قسّم النخيل بالتتابع إلى تسع مجموعات، كل مجموعة تحوي 9 نخلات بحيث تحوي المجموعة الأولى النخيل من النخلة 1 إلى النخلة 9، وتحوي المجموعة الثانية من النخلة 10 إلى النخلة 18 وهكذا، مع الحفاظ على ترتيب النخلات في كل مجموعة من الأصغر إلى الأكبر، وفي كل مجموعة نعطي النخيل أرقاما من 0 إلى 8 من الأصغر إلى الأكبر (أو حتى من الأكبر للأصغر) ثم قام بإعطاء كل واحد من الأخوة نخلة من كل مجموعة بحيث لا يأخذ أي واحد منهم نخلتين (أو أكثر طبعا) لهما نفس الترتيب في مجموعتيهما.

بعبارة أخرى، قام ابن حمزة باعتبار تجزئتين لمجموعة النخيل: التجزئة الأولى المذكورة أعلاه والتي ترتبط بحاصل قسمة $i-1$ على 9، حيث i يمثل رقم النخلة، مثلًا:

- المجموعة الأولى {1،2،3،4،5،6،7،8،9}.
- المجموعة الثانية {10،11،12،13،14،15،16،17،18}، إلخ.

أما التجزئة الثانية فهي حسب باقي قسمة رقم النخلة على 9. مثلا:

- المجموعة الأولى {1، 10،19،28،37،46،55،64،73}.
- المجموعة الثانية {2،11،20،29،38،47،56،65،74}، إلخ.

ومن ثم يأخذ كل طفل 9 نخلات بحيث يكون لديه نخلة وحيدة من كل مجموعة من مجموعات هاتين التجزئتين.

لتسهيل هذه الفكرة، لنعتبر الجدول التالي والذي يضم أرقام النخيل مرتبة ترتيبا تصاعديا.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	17	16	15	14	13	12	11	10
27	26	25	24	23	22	21	20	19
36	35	34	33	32	31	30	29	28
45	44	43	42	41	40	39	38	37
54	53	52	51	50	49	48	47	46
63	62	61	60	59	58	57	56	55
72	71	70	69	68	67	66	65	64
81	80	79	78	77	76	75	74	73

بإمكان القارئ الآن ملاحظة أنّ التجزئتين المذكورتين أعلاه ما هما إلا أسطر وأعمدة هذا الجدول على الترتيب. وبالتالي فإنّ فكرة ابن حمزة المغربي تتمثل في إعطاء كل ابنٍ نخلةً واحدة من كل سطر ومن كل عمود (لنرمز لهذا الشرط بالرمز (*)).

أولًا، بما أنّ مجموع الأعداد من 1 إلى 81 هو 3321، فإنّ كل ابنٍ يجب أن يأخذ 369 رطلًا من المحصول.

لاحظ أنّ حصّة مكونة من 9 نخلات تحقق الشرط (*)، دائما ما تعطي حصة مقبولة (بمعنى أنّ مجموع عناصرها 369). وذلك لأنّ مثل هكذا حصة تحتوي على نخلة من كل سطر وعلى نخلة من كل عمود وبالتالي تحتوي نخيلًا بجميع بواقي القسمة على 9 وهي من 1 إلى 9 (لاحظ أننا قسمنا $i-1$ على 9، وبالتالي البواقي هي من 1 إلى 9 وليس من 0 إلى 8)، وأيضا بجميع القيم الممكنة لحاصل القسمة على 9، وهي من 0 إلى 8. إذًا عناصر هذه الحصة هي من الشكل $9a+b$ حيث الثنائيات التسع (a,b) تحوي كل القيم الممكنة لحاصل القسمة والباقي. وبالتالي مجموعها يساوي

$$9(0+\cdots+8)+1+\cdots+9=369.$$

مبرهنة 1. يوجد $9!$ حصة تحقق الشرط (*).

يُترك البرهان للقارئ.

لنفرض الآن أنّ الأبناء غير متمايزين فيما بينهم، أي أنّ أي تغيير بين حصص الأبناء فيما بينهم لا يشكل فارقًا في الحل. إعطاء حل لهذه المسألة يتمثل في إعطاء تسعة حصص ذات نفس المجموع 369 بحيث تشكل تجزئة لمجموعة النخيل، أي أنها غير متقاطعة مثنى مثنى. إذا حققت جميع الحصص الشرط (*) نسمي هذا الحل بحل ابن حمزة.

3. الحلول المنتظمة

لتكن $\mathrm{P}_1 = \{n_1, \dots, n_9\}$ حصة مكونة من تسع نخلات تحقق الشرط (*). يمكن تكملة هذه الحصة لتشكل حلا للمسألة بالطريقة التالية:

ننشئ الحصة P_2 انطلاقا من P_1 بالطريقة التالية: نفرض مثلا أنّ n_1 هو رقم النخلة الوحيدة من P_1 ذات الباقي 0 (يعني التي تنتمي للعمود الأخير). نضع

$$\mathrm{P}_2 = \{n_1 - 8, n_2 + 1, n_3 + 1, \dots, n_9 + 1\}.$$

بنفس الطريقة نعرّف P_3 انطلاقا من P_2 ، ثم P_4 من P_3 وهكذا دواليك.

بهذه الطريقة نحصل في النهاية على حل للمسألة المكية. نسمي هذه الحلول بالحلول المنتظمة.

ملاحظة: إذا انطلقنا من P_i عوضًا عن P_1، مهما كان $i = 1, \dots, 9$، سنتحصل على نفس الحل.

مبرهنة 2. يوجد $8!$ حلًا منتظمًا.

البرهان. حسب المبرهنة 1، يوجد $9!$ حصة تحقق الشرط (*)، وكلّ حصة تعطي حلا منتظما وحيدا باتّباع الطريقة أعلاه. لكن حسب الملاحظة المذكورة سابقًا، فإنّ الحصص التسعة المشكّلة لحل ما تعطي كل واحدة منها نفس الحل، أي يوجد بالضبط تسع حصص مختلفة كل واحدة منها تُنتج نفس الحل. ومنه عدد الحلول المنتظمة هو بالضبط $\frac{9!}{9} = 8!$.

إنّ فكرة هذه الطريقة تتمثل في عمل إزاحة نحو اليسار لنخيل الحصة الأولى للحصول على الحصة الموالية بحيث النخلة الموجودة في العمود الأخير تزاح نحو العمود الأول مع البقاء في نفس السطر. وهذا يضمن الحصول على حصة جديدة لا تتقاطع مع سابقاتها ولها نفس المجموع.

مثال 1. في الجدول أدناه الحل المنتظم المولد بالحصة $\mathrm{P}_1 = \{1,11,21,31,41,51,61,71,81\}$. كل لون يمثل حصة ابنٍ.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	17	16	15	14	13	12	11	10
27	26	25	24	23	22	21	20	19
36	35	34	33	32	31	30	29	28
45	44	43	42	41	40	39	38	37
54	53	52	51	50	49	48	47	46
63	62	61	60	59	58	57	56	55
72	71	70	69	68	67	66	65	64
81	80	79	78	77	76	75	74	73

السؤال الذي يتبادر إلى ذهن القارئ الكريم هو ما إذا كان هناك حلولٌ أخرى غير منتظمة. الجواب هو بالطبع نعم، توجد حلول أخرى غير مولدة بالطريقة أعلاه.

مثال 2. في الجدول أدناه حل غير منتظم.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	17	16	15	14	13	12	11	10
27	26	25	24	23	22	21	20	19
36	35	34	33	32	31	30	29	28
45	44	43	42	41	40	39	38	37
54	53	52	51	50	49	48	47	46
63	62	61	60	59	58	57	56	55
72	71	70	69	68	67	66	65	64
81	80	79	78	77	76	75	74	73

لاحظ أننا تحصلنا على هذا الحل بتغيير ألوان العمودين الأول والثاني في المثال الأول. كما تجدر الإشارة إلى أنّ هذا الحل يحقق الشرط (*)، أي أنه حل لابن حمزة. ومن هنا يمكن أن نتساءل إن كان يمكننا إيجاد حلول لا تحقق (*). الإجابة هي أيضا نعم، والمثال التالي أحد هاته الحلول.

مثال 3. في الجدول أدناه حل لا يحقق (*)، أي أنه ليس حلًا لابن حمزة.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	17	16	15	14	13	12	11	10
27	26	25	24	23	22	21	20	19
36	35	34	33	32	31	30	29	28
45	44	43	42	41	40	39	38	37
54	53	52	51	50	49	48	47	46
63	62	61	60	59	58	57	56	55
72	71	70	69	68	67	66	65	64
81	80	79	78	77	76	75	74	73

لاحظ أنّ الحصة $\{1,2,30,31,41,51,61,71,81\}$ تحوي النخلتين 1 و 2 من نفس السطر.

ربما يتساءل القارئ عن كيفية إيجاد هذا الحل. يعتمد هذا الحل على الفكرة التالية: نقوم بتغيير نخلتين بين الأخ الأول والثاني، ولنفرض أنّ الفرق بين رقميهما 8 مثلًا. إذًا حصة الأخ الثاني زادت أو نقصت بمقدار 8، لتدارك ذلك نغيّر نخلتين بين الأخ الثاني والثالث، ثم نكرر العملية بين الأخ الثالث والرابع، وهكذا إلى غاية الأخ التاسع. وفي الأخير نقوم بتغيير بين نخلتين بين الأخ الأول والتاسع لتصحيح حصتيهما.

4. المربعات اللاتينية وتعداد حلول ابن حمزة

المربعات اللاتينية هي ترتيب خاص من العناصر يتم تنظيمها في شكل مصفوفة مربعة، حيث يتم استخدام مجموعة من الرموز أو الأحرف أو الأعداد دون تكرار في كل صف وفي كل عمود. يعود أصل المربعات اللاتينية إلى اللغة اللاتينية، وهي تقنية قديمة تم استخدامها في الأصل في ترتيب النصوص اللاتينية.

تُعدّ المربعات اللاتينية أداة هامة في عدة مجالات، منها الرياضيات وعلم الحوسبة. تتميز المربعات اللاتينية بخاصية توفير توازن في توزيع العناصر بحيث يكون كل عنصر في كل صف وفي كل عمود متواجدًا مرة واحدة فقط.

من أمثلة المربعات اللاتينية:

-	*
*	-

+	-	*
*	+	-
-	*	+

/	+	-	*
+	*	/	-
-	/	*	+
*	-	+	/

تعداد المربعات اللاتينية من المسائل الصعبة، ولا توجد صيغة سهلة لحساب عددها، والسبب في ذلك يرجع إلى أنه عند إنشاء المربعات اللاتينية، يمكن أن تؤثر الاختيارات المبكرة على عدد الاختيارات اللاحقة (وبالتالي يجب أن تؤخذ في الاعتبار خلال التعداد). وهذا ما يجعل تعدادها ليس سهلا، على عكس المربعات ذات الصف اللاتيني (مصفوفات مربعة $n \times n$ التي يظهر فيها كل رمز في كل صف مرة واحدة فقط، ولكن نسمح بالتكرارات في الأعمدة). العدد هنا هو بالضبط $(n!)^n$. هنا، لا تؤثر القرارات المبكرة على الاختيارات القادمة.

على مَرِّ الوقت، أثبت الرياضياتيون العديد من الحدود العلوية والسفلية وكذا بعض التوافقات لعدد المربعات اللاتينية، والذي يرمز له بـ L_n. في حين توجد العديد من الصيغ والعبارات التي تعطي قيمة L_n، بعضها قد يكون غير عملي للاستخدام المباشر ولكنها تظل مهمة نظريًا. وعلاوة على ذلك، تمتد الدراسة إلى ما هو أبعد من المصفوفات المربعة لتشمل تعداد المستطيلات اللاتينية. كما تجدر الإشارة إلى وجود علاقة تراجعية لعدِّ هذه المستطيلات.

تعداد المربعات اللاتينية معلوم حتى الرتبة 11. وهناك تقريب لعدد المربعات اللاتينية ذات الرتبة 12 [1]. ليس من الصعب أن يلاحظ القارئ الكريم أنّ حلول المسألة المكية التي تحقق الشرط (*) ما هي إلى مربعات لاتينية بُعدها 9، حيث يتم إهمال التمييز بين العناصر أو الرموز المستخدمة في ملئها. بعبارة أخرى، التبديل بين هذه الرموز يُترجم كتبديل بين حصص الإخوة فيما بينهم والذي لا يؤخذ بالحسبان. تجدر الإشارة إلى أنه يوجد !9 تبديلة ممكنة بين حصص الإخوة.

هذه المربعات اللاتينية تسمى بـ "المختزلة"، وهي مربعات لاتينية حيث يتم تثبيت ترتيب معين للعناصر في السطر الأول (عادة ما يشترط أيضًا نفس الترتيب في العمود الأول في تعريف المربعات اللاتينية المختزلة، لكن في هذا السياق، لا نحتاج لهذا الشرط). إذا رمزنا بـ R_n لعدد المربعات اللاتينية المختزلة ذات البعد n، فإنّ عدد حلول المسألة المكية التي تحقق (*) هو بالضبط R_9. ولدينا

$$L_n = n! \times R_n$$

حيث $n!$ هو عدد التبديلات الممكنة بين العناصر المستخدمة في ملء المربعات اللاتينية.

إذًا يكفي معرفة L_9 حتى نعرف عدد حلول المسألة المكية التي تحقق الشرط (*). كما ذكرنا سابقاً، قيمة العدد L_9 معلومة وهي [1]

$$\begin{aligned} L_9 &= 2^{35} \times 3^8 \times 5^2 \times 7^2 \times 5231 \times 3824477 \\ &= 5524751496156892842531225600. \end{aligned}$$

إذًا نستنتج أنّ عدد حلول المسألة المكية التي تحقق الشرط (*) هو

$$\begin{aligned} R_9 &= 2^{28} \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 5231 \times 3824477 \\ &= 15224734061278915461120. \end{aligned}$$

لاحظنا في المثال الثالث وجود حلول أخرى لا تحقق الشرط (*)، وبالتالي العدد الكلي للحلول هو أكبر تمامًا من R_9.

كما ذكرنا آنفا، تكمن صعوبة تعداد المربعات اللاتينية في تأثير الاختيارات الأولية على عدد الاختيارات اللاحقة. وهذه الصعوبة لا تختفي إذا ألغينا الشرط (*)، أي أنها تبقى أيضا أثناء تعداد حلول المسألة المكية. بل أرى أنّ تعدادها يصبح أصعب عند إلغاء الشرط (*).

فلو أردنا فقط تعداد الحصص ذات المجموع 369 والتي لا تحقق بالضرورة (*)، أي عدد المجموعات الجزئية $P = \{n_1, \dots, n_9\}$ من مجوعة النخيل بحيث $n_1 + \cdots + n_9 = 369$ لوجدنا الامر أصعب بكثير من الحالة السابقة والتي تحقق الشرط المذكور (انظر المبرهنة 1).

مرجع

[1] B.D. McKay and I.M. Wanless, On the number of Latin squares, Ann. Comb., 9, 335-344 (2005).

***

	الابن الأول	الابن الثاني	الابن الثالث	الابن الرابع	الابن الخامس	الابن السادس	الابن السابع	الابن الثامن	الابن التاسع
أرقام النخيل	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	18	10	4	12	13	14	15	16	17
	26	27	19	20	21	22	23	24	25
	34	35	36	28	29	30	31	32	33
	42	43	44	45	37	38	39	40	41
	50	51	52	53	54	46	47	48	49
	58	59	60	61	62	63	55	56	57
	66	67	68	69	70	71	72	64	65
	74	75	76	77	78	79	80	81	73
عدد الأرطال	369	369	369	369	369	369	369	369	369

جدول ابن حمزة في المسألة المكية