الفيزياء والهندسة: الفيزياء كالهندسة والهندسة كالفيزياء

الجزء الثالث: مبرهنة نويثرو إثباتها

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

هذا المقال مُهدى إلى الأستاذ القدير محند موساوي الذي تغرَّبْ، وإلى ذكرى الأستاذ يوسف عتيق، رحمهما الله..

1. مقدمة

في حدود عام 1602 تمكّن يوهانس كبلر Johannes Kepler، مستندًا إلى ملاحظات أستاذه تايخو براهي (Tycho Brahe) الرصدية، من صياغة قوانينه الفلكية الثلاثة الشهيرة، والتي نظر إليها كقوانين رصدية ميدانية ناتجة عن مُراقبات مباشرة للسماء لفترات طويلة.

لاحقًا استطاع نيوتن Newton التحقق من صحة هذه القوانين مستخدمًا القلم والورق وحدهما ومستندًا إلى مسلّمات وقوانين الميكانيكا الكلاسيكية، التي ساهم في وضعها. وقد أطلق هذا النجاح العلمي المذهل الذي حقّقه نيوتن العنان لعمليات بحث فكرية وتجريبية ضخمة وغير مسبوقة في تاريخ الغرب، كانت نتيجتها تأسيس النهضة العلمية الحديثة في الغرب. وعلى هذا الأساس يتفّق جل المؤرخين الغربيين على أنّ نيوتن هو الرجل رقم واحد في حضارتهم المعاصرة. وجعلَ نجاح نيوتن الفلاسفةَ الغربيين ينظرون بعين الدهشة والحيرة الممزوجة بالرهبة إلى الرياضيات القادرة على وصف الأحداث الجارية في الكون، وقالوا من حينها الكثير جدًّا عن سرّ فعاليتها في حل مشكلات العلوم الطبيعية، وعن سر ممارستها من قِبَل الإنسان. ويعطي المرجع [8]، وهو مقال شهير للفيزيائي يوجين بول وينر Eugene Paul Wigner، لمحةً عن طبيعة وتَشعب هذا الموضوع الشائك.

أمّا وجهة نظر علماء الرياضيات إلى علمهم فقد تحدّدت بصورة شبه كاملة منذ نهاية القرن التاسع عشر الميلادي، وتحديدا بعد أن قدَّم كانتور Cantor إلى العالَم نظريته الرائدة في الرياضيات والمسماة "نظرية المجموعات"، والتي اعتبرت من حينها إلى غاية اليوم أساس الرياضيات. وأقرّ الكثير من علماء الرياضيات الكبار، وعلى رأسهم هيلبرت Hilbert، بأنّ الإطار الطبيعي الذي ينبغي أن تُؤسّس داخله الرياضيات المعتادة المستخدمة في حل مشكلات العلوم، والتي تدعى أيضا برياضيات النماذج (Models)، هو نظرية المجموعات الكانتورية (Cantorian set theory)، وهو ما تحقق على نحو كامل منذ بداية القرن العشرين. وتكفي لمحة سريعة للتأكد من أنّ جميع النظريات الرياضية المعتادة أو بالأحرى جميع النماذج الرياضية صيغت في عصرنا بلغة نظرية المجموعات $L_1\mathrm{Set}$، وهي لغة رياضية من الرتبة الأولى وتمتلك الأبجدية التالية:

- رموز الروابط المنطقية: $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\Rightarrow$، $\Leftrightarrow$؛
- رمزي المُكَمِّمين الوجودي والعمومي: $\exists$، $\forall$؛
- رمزي القوسين اليميني واليساري: $($، $)$؛
- رمز المساواة: $=$؛
- رمز الانتماء: $\in$؛
- رموز متغيرات أولى: x، y، z، ...؛

- رموز متغيرات ثانية خاصة بالمجموعات: X، Y، Z، ....

وهكذا فكلّ الصيغ التي نجدها في الرياضيات المعتادة هي في جوهرها 'كلمات' أو 'حشود' أو 'نضائد' لهذه الرموز، ويُعثر على الصيغ الصحيحة من بينها بالبرهان الرياضي المستند إلى المبادئ التوتولوجية وإلى المسلمات المنطقية:

- $\mathcal{P}[x \leftarrow t] \Rightarrow (\exists x)\mathcal{P}$؛
- $x = x$؛
- $t = s \Rightarrow (\mathcal{P}[x \leftarrow t] \Leftrightarrow \mathcal{P}[x \leftarrow s])$؛

والمُستخدم لقاعدتي الاستدلال:

$$\frac{\mathcal{P}, \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}}{\mathcal{Q}} \left(\text{قاعدة القياس الاستثنائي Modus ponens}\right),$$

وَ

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{(\exists x)\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}} \left(\text{ قاعدة إدخال المُكمِّم الوجودي}\right),$$

حيث لا يظهر المتغير x حرًّا في الصيغة $\mathcal{B}$. ويمكن للقارئ المهتم بهذا الشأن أن ينظر إلى المرجعين [5] وَ[7].

إنها الطبيعة النحوية التي تبنّاها غالبية علماء الرياضيات منذ أكثر من قرن. وإنّ المرء لتستبد به الحيرة والدهشة حين يعلم أنّ كلمات الرياضيات المصاغة بهذه الطريقة البسيطة قادرة على وصف الأحداث الجارية في الكون والتنبؤ بمساراتها بدقة لا حدود لها، ولَيبدو هذا الأمر لغزا حقيقيا من ألغاز الوجود. وفي هذا السياق، هناك وجهة نظر مستندة إلى مبدأ الصورنة (Principle of formalism) المعلَن عنه من قِبَل هيلبرت وبورباكي Bourbaki: "الرياضيات هي لغات بشرية غير منطوقة، تتصف طريقة كتابة كلماتها وجملها بقدرات لا محدودة في الاختصار وإعادة التسمية وإدخال الرموز الجديدة". ويبدو لي بأنّ الله منحنا إمكانيات معينة لاستخدام هذه اللغات الاستثنائية في فهم بعض أسرار الكون الذي نعيش فيه، والله أعلم.

منذ زمن نيوتن إلى غاية بداية القرن العشرين أُسست الرياضيات الواصفة للفيزياء، والتي تشكّلت في مجملها من نظرية المعادلات التفاضلية والصياغتين الهندسيتين الرائعتين للاغرانج Lagrange وهاميلتون Hamilton ومن هندسة ريمان Riemann، التي أُوكل إليها مهمة التعبير رياضياتيا عن نظرية النسبية العامة لأينشتاين Einstein. وهكذا أصبحنا ننظر إلى قوانين الفيزياء عبر الهندسة، فبدت لنا الفيزياء كالهندسة. بَيد أنّ سيدة من هذا العالَم اكتشفت ذات لحظة أنّ العكس أيضا صحيح، فالمبادئ والقوانين الفيزيائية ذات أصول هندسية، وأنّ ما يفعله الفيزيائيون هو أنهم ينظرون إلى الهندسة عبر الفيزياء، ومن ثمة تبدو لهم الأولى كالأخرى.

إيمي أمالي نويثر (1882-1935) Emmy Amalie Noether هي سيدة ألمانية من أصول يهودية ساهمت في عشرينيات القرن العشرين مع كل من إميل أرتين Emil Artin وهيلموت هاس Helmut Hasse وولفجانج كرول Wolfgang Krull وَأوتوشرايير Otto Schreier وبارتيلليندرت فان دير ويردين Bartel Leendert van der Waerden في ملحمة تأسيس الجبر المجرّد الحديث، والذي يُعدّ أهم منجزات المدرسة الألمانية للرياضيات في العصر الحالي. اعتبرت نويثر أيقونة في الرياضيات، حيث وصفها أينشتاين ذات لحظة بأنها أهم عبقرية إبداعية في الرياضيات ظهرت منذ أن سُمح رسميا للنساء بمزاولة التعليم العالي. بيد أنّ نويثر واجهت وضعا مأساويا في عام 1933 حين صرفها النازيون، كونها يهودية، عن العمل في جامعة غوتنغن Göttingen، فرحلت إلى الولايات المتحدة، وتوفيت بعد ذلك بعامين من النشاط الجامعي.

إيمي أمالي نويثر

في عام 1918 قدّمت نويثر مساهمة، في إطار صياغة لاغرانج (Lagrangian formalism)، للميكانيكا الكلاسيكية، ولديها في هذا الشأن مبرهنة مذهلة تحمل اسمها تؤكد أنّ معظم قوانين الحفظ الخاصة بالجمل الميكانيكية الكلاسيكية ذات منشأ هندسي؛ أي أنها ناتجة عن تناظرات حافظة لدالة لاغرانج، الأمر الذي أنار درب البحث للفيزيائيين، الذين أصبحوا يُقابلون بين قوانين الانحفاظ الفيزيائية وبين التناظرات الهندسية الحافظة لخواص دالة لاغرانج. وحتى في حالات قوانين الانحفاظ القليلة حيث لا يكون التناظر واضحًا، كانوا مع ذلك يعتبرون الحفظ ناتجا عن تناظر خفي.

ساعد مبدأ نويثر الفيزيائيين في صياغة مسلّمات ميكانيكا الكم، واعتبروه لبنةً مهمة جدًّا في بناء الفيزياء المعاصرة. وبذلك ترسخت أكثر فأكثر في الأذهان الفكرة المُحيِّرة القائلة بأنّ القوانين الفيزيائية ناتجة عن البنية الهندسية للكون، والتي وفقها أصبحت الفيزياء تابعة على نحو ما للهندسة.

في هذا الجزء الثالث والأخير، نقدم أحد النصوص المتناولة في المراجع العلمية لمبرهنة نويثر المشار إليها، ثم نلحق ذلك بالإثبات المناسب.

2. مفاهيم ومصطلحات من نظرية المنوعات القابلة للتفاضل

من أجل عرض مبرهنة نويثر وإثباتها على نحو دقيق، نحتاج إلى تقديم بعض المفاهيم والمصطلحات الهندسية القاعدية المنتمية إلى نظرية المنوعات القابلة للتفاضل، وهي:

■ منوعة قابلة للتفاضل $\mathcal{M}$؛ تدعى في إطار الفيزياء بفراغ التَّكوُن (Configuration space)، والسبب الكامن وراء هذه التسمية هو أنّ الفيزيائيين يعتبرونها الحيز المكاني الذي تقع فيه الأحداث الفيزيائية.

■ الحِزَمَةُ المماسية (The tangent bundle) للمنوعة $\mathcal{M}$ والتي يرمز لها بالرمز $T\mathcal{M}$. يسمي الفيزيائيون هذه الحزمة بفراغ السرعات أو أيضا بفراغ الطور اللاغرانجي (The lagrangian phase space)، وهي ميدان الإحداثيات التي أدخلها لاغرانج، وعلى هذا الأساس فإنّ دوال لاغرانج مطابقة تماما لمجموعة الدوال $C^\infty(T\mathcal{M};\mathbb{R})$. ولنتذكر بالمناسبة أنّ $T\mathcal{M}$ هي الاتحاد المنفصل للفراغات الشعاعية $T_x\mathcal{M}$، $x \in \mathcal{M}$، بمعنى أن

$$T\mathcal{M} = \coprod_{x\in\mathcal{M}} T_x\mathcal{M},$$

حيث يدعى $T_x\mathcal{M}$ بالفراغ المماسي للمنوعة $\mathcal{M}$ في النقطة x، وأي عنصر من $T_x\mathcal{M}$ يدعى شعاعا مماسيا لـ$\mathcal{M}$ في x.

■ فراغ حقول الأشعة المماسية للمنوعة $\mathcal{M}$، والذي يرمز له بالرمز $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$، هو فراغ مجموعة الدوال $X \in C^\infty(\mathcal{M};T\mathcal{M})$ المحققة للشرط

$$(\forall x \in \mathcal{M})(X(x) \in T_x\mathcal{M}),$$

والتي تدعى كل واحدة منها حقل أشعة (Vector field) على $\mathcal{M}$.

■ الحزمة التمماسية (The cotangent bundle) للمنوعة $\mathcal{M}$ والتي يرمز لها بالرمز $T^*\mathcal{M}$. تسمى هذه الحزمة في الفيزياء بفراغ طور الزخم (Momentum Phase Space)، وهي ميدان الإحداثيات التي أدخلها هاميلتون، وعليه فإن دوال هاميلتون، المسماة أيضا بمجموعة الطاقات المعممة، مساوية بالضبط لمجموعة الدوال $C^\infty(T^*\mathcal{M};\mathbb{R})$. كما أنه لدينا أيضا

$$T^*\mathcal{M} = \coprod_{x\in\mathcal{M}} T_x^*\mathcal{M},$$

حيث $T_x^*\mathcal{M}$ هو الفراغ الثنوي (Dual space) للفراغ $T_x\mathcal{M}$، ويدعى بالفراغ التمماسي (Cotangent space) للمنوعة $\mathcal{M}$ في النقطة x، كما تدعى عناصره بالأشعة المماسية (Tangent covectors) لـ$\mathcal{M}$ في x.

■ فراغ الأشكال التفاضلية من الدرجة الأولى للمنوعة $\mathcal{M}$، والذي يرمز له بالرمز $\Omega^1(\mathcal{M})$، هو فراغ مجموعة الدوال $\omega \in C^\infty(\mathcal{M};T^*\mathcal{M})$ المحققة للشرط

$$(\forall x \in \mathcal{M})(\omega(x) \in T_x^*\mathcal{M}),$$

والتي تدعى كل واحدة منها شكلا تفاضليا من الدرجة الأولى أو أيضا حقل أتشعة (Covector field) على $\mathcal{M}$.

لنفترض بأن $\mathcal{M}$ ذات بعد n. لقد أُشير سابقا إلى أن دالة هاميلتون، والتي يدعوها الفيزيائيون بالطاقة المُعمَّمة للنظام اللاغرانجي $(\mathcal{M},\mathfrak{L})$، هي الدالة المعرفة في أي إحداثيات محلية $(q,\dot{q})$ للحزمة $T\mathcal{M}$ كما يلي

$$\mathcal{H}(q,p) = \sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}^k - \mathfrak{L}(q,\dot{q}),$$

حيث

$$p_k = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}(q,\dot{q}), 1 \le k \le n.$$

يُسمي الفيزيائيون الشعاعين $p = \nabla_{\dot{q}}\mathfrak{L} = (p_1,\dots,p_n)$ وَ $F = \nabla_q\mathfrak{L} = (\partial_{q^1}\mathfrak{L},\dots,\partial_{q^n}\mathfrak{L})$، على التوالي، بالزخم المُعمَّم والقوة المُعمَّمة للنظام اللاغرانجي $(\mathcal{M},\mathfrak{L})$.

إذا كانت $\mathfrak{L}$ لا تتعلق بالزمن، وإذا كان المنحنى γ حلا لمعادلات أويلر-لاغرانج، فإن الطاقة المعممة $\mathcal{H}$ تظل مُنحفظة على طول γ، بمعنى

$$(\forall t)\left(\frac{d}{dt}\mathcal{H}\left(\gamma(t),\nabla_{\dot{q}}\mathfrak{L}(\gamma(t))\right)=\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\gamma(t),p(t))=0\right).$$

بالفعل لدينا

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}\left(\gamma(t),\nabla_{\dot{q}}\mathfrak{L}(\gamma(t))\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\frac{d\gamma^k}{dt}(t)-\mathfrak{L}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\right\}\frac{d\gamma^k}{dt}(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t)$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\frac{d\gamma^k}{dt}(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\gamma,\frac{d\gamma}{dt}\right)\right\}(t)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\right]\frac{d\gamma^k}{dt}(t)=0,$$

وذلك لأن γ يحقق محليا معادلات أويلر-لاغرانج. ولنتذكر بالمناسبة أن انحفاظ الطاقات الكلية للنظم الفيزيائية المعزولة هو أحد أشهر المبادئ الفيزيائية، وقد أثبتنا للتو انحفاظ الطاقة المعممة لأي نظام لاغرانجي لا يرتبط بالزمن.

ليكن $X\in C^0(\mathcal{M}\leftarrow T\mathcal{M})$ وَ $f\in C^1(\mathcal{M};\mathbb{R})$. نُعرِّف مشتقة ليه (Lie derivative) للدالة f بالنسبة لحقل الأشعة X كالآتي

$$\mathcal{L}_Xf(x)=df(x)\big(X(x)\big),x\in\mathcal{M}.$$

لدينا بطبيعة الحال $\mathcal{L}_Xf\in C^0(\mathcal{M};\mathbb{R})$. ونشير إلى أن عمليات اشتقاق ليه بالنسبة لمختلف حقول الأشعة هي عمليات طبيعية، ونجدها كثيرا في الهندسة التفاضلية وفي التحليل وحتى في الجبر.

يُقال إن الدالة f هي تكامل أول للحقل X إذا كان $\mathcal{L}_Xf=0$.

لنفرض بأن $\mathcal{M}$ منوعة بناخية، وبأن الحقل X مماس للحافَّة $\partial\mathcal{M}$ (إن لم تكن خالية)، أي بمعنى

$$(\forall x\in\partial\mathcal{M})(X(x)\in T_x\partial\mathcal{M}).$$

في هذه الحالية إذا كان $X\in C^1(\mathcal{M}\leftarrow T\mathcal{M})$، فإنه يقبل تدفقا (Flow) $\mathfrak{F}_X:\mathfrak{D}_X\to\mathcal{M}$. لنتأكد من صحة الحقيقة التالية: "لكي تكون الدالة f تكاملا أولا للحقل X، يلزم ويكفي أن تكون ثابتة على طول مسارات التدفق x ، أي بمعنى

$$(\forall(t,x)\in\mathfrak{D}_X)\big(f\circ\mathfrak{F}_X(t,x)=f(x)\big)$$

أو أيضا

$$(\forall(t,x)\in\mathfrak{D}_X)\left(\frac{\partial(f\circ\mathfrak{F}_X)}{\partial t}(t,x)=0\right)".$$

بالفعل، لنفرض أنّ f تكامل أول للحقل X. وعليه من أجل كل $(t,x)\in\mathfrak{D}_X$ لدينا

$$\frac{\partial(f\circ\mathfrak{F}_X)}{\partial t}(t,x)=df\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\left(\frac{\partial\mathfrak{F}_X}{\partial t}(t,x)\right)=df\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\Big(X\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\Big)$$
$$=\mathcal{L}_Xf\circ\mathfrak{F}_X(t,x)=0.$$

وهو المطلوب. بالعكس، لنفرض أن f ثابتة على طول مسارات التدفق، وعليه

$$(\forall(t,x)\in\mathfrak{D}_X)\left(\mathcal{L}_Xf\circ\mathfrak{F}_X(t,x)=\frac{\partial(f\circ\mathfrak{F}_X)}{\partial t}(t,x)=0\right).$$

وبما أنه لدينا المساواة $\mathfrak{F}_X(0,x)=x$ من أجل كل $x\in\mathcal{M}$، فبأخذ $t=0$ في العلاقة الأخيرة، نحصل على المطلوب:

$$(\forall x\in\mathcal{M})(\mathcal{L}_Xf(x)=\mathcal{L}_Xf\circ\mathfrak{F}_X(0,x)=0).$$

إن الصيغة التالية

$$(\forall v\in T\mathcal{M})(\exists!\,x\in\mathcal{M})(v\in T_x\mathcal{M}),$$

صحيحة، لذلك فإنه توجد دالة وحيدة $\pi_{\mathcal{M}}: v \in T\mathcal{M} \mapsto x = \pi_{\mathcal{M}}(v) \in \mathcal{M}$ مُحققة الشرط

$$(\forall v \in T\mathcal{M})\big(v \in T_{\pi_{\mathcal{M}}(v)}\mathcal{M}\big).$$

تدعى هذه الدالة الإسقاط الطبيعي للحزمة المماسية $T\mathcal{M}$ على $\mathcal{M}$، وهي تنتمي إلى المجموعة $C^{\infty}(T\mathcal{M};\mathcal{M})$. لنفرض الآن أن $X \in C^{2}(\mathcal{M} \leftarrow T\mathcal{M})$، ولنضع

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v) = \partial_x \mathfrak{F}_X\big(t,\pi_{\mathcal{M}}(v)\big)(v), (t,v) \in \widetilde{\mathfrak{D}}_X,$$

حيث

$$\widetilde{\mathfrak{D}}_X = \{(t,v) \in \mathbb{R} \times T\mathcal{M} : (t,x) = \big(t,\pi_{\mathcal{M}}(v)\big) \in \mathfrak{D}_X\}.$$

بالطبع لدينا $\widetilde{\mathfrak{F}} \in C^{1}\big(\widetilde{\mathfrak{D}}_X;T\mathcal{M}\big)$، كما أن هذه الدالة تمثل تدفقَ حقلِ أشعة $\tilde{X} \ni \mathfrak{X}^{1}(T\mathcal{M})$. لتحديد $\tilde{}$، نستخدم نظم الإحداثيات المحلية للمنوعة $\mathcal{M}$، وليكن $(U,q) = (U,q^{1},\dots,q^{n})$ إحداها. سنضع

$$r(v) = \big(q(x),\dot{q}(v)\big) = \big(q(x),dq(x)(v)\big) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, v \in TU = \coprod_{y \in U} T_y\mathcal{M}.$$

تمثل الثنائية (TU,r) نظام إحداثيات للحزمة $T\mathcal{M}$، والذي يدعى بنظام الإحداثيات المرافق للنظام (U,q).

من ناحية أخرى لنتذكر أنه من أجل كل $v \in TU$ لدينا

$$v = \sum_{k=1}^{n} v^{k} \frac{\partial}{\partial q^{k}}(x), dq(x)(v) = (v^{1},\dots,v^{n}),$$

وعليه

$$X(x) = \sum_{k=1}^{n} X^{k}(x) \frac{\partial}{\partial q^{k}}(x), x \in U,$$

حيث $X^{k} \in C^{1}(U;\mathbb{R})$. الآن إذا كانت $(,v) \in (\mathbb{R} \times TU) \cap \widetilde{\mathfrak{D}}_X$، وإذا كان t صغيرا كفاية، فإنه يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} r \circ \widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v) &= \Big(q \circ \mathfrak{F}_X(t,x), dq\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\big)\Big) \\ &= \Big(q \circ \mathfrak{F}_X(t,x), dq\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big) \circ \partial_x \mathfrak{F}_X(t,x)(v)\Big) \\ &= \big(q \circ \mathfrak{F}_X(t,x), \partial_x(q \circ \mathfrak{F}_X)(t,x)(v)\big). \end{aligned}$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned} dr\Big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\Big)\left(\frac{\partial \widetilde{\mathfrak{F}}_X}{\partial t}(t,v)\right) &= \left(dq\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_X}{\partial t}(t,x)\right), \partial_x\big(\partial_t(q \circ \mathfrak{F}_X)\big)(t,x)(v)\right) \\ &= \Big(dq\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\big(X \circ \mathfrak{F}_X(t,x)\big), \partial_x\big(dq(\mathfrak{F}_X)(X \circ \mathfrak{F}_X)\big)(t,x)(v)\Big) \\ &= \big(X^{1} \circ \mathfrak{F}_X(t,x),\dots,X^{n} \circ \mathfrak{F}_X(t,x), \partial_x(X^{1} \circ \mathfrak{F}_X)(t,x)(v),\dots,\partial_x(X^{n} \circ \mathfrak{F}_X)(t,x)(v)\big) \\ &= \Big(X^{1} \circ \mathfrak{F}_X(t,x),\dots,X^{n} \\ &\quad \circ \mathfrak{F}_X(t,x), dX^{1}\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\big),\dots,dX^{n}\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\big)\Big). \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{F}}_X}{\partial t}(t,v) &= \sum_{k=1}^{n} X^{k} \circ \mathfrak{F}_X(t,x) \frac{\partial}{\partial q^{k}}\big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} dX^{k}\big(\mathfrak{F}_X(t,x)\big)\big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\big) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{k}}\big(\widetilde{\mathfrak{F}}_X(t,v)\big). \end{aligned}$$

فإذا أخذنا $t=0$ في هذه الصيغة، نجد عبارة الحقل $\tilde{X}$ وهي

$$\tilde{X}(v)=\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}_X}{\partial t}(0,v)=\sum_{k=1}^{n}X^k(x)\frac{\partial}{\partial q^k}(v)+\sum_{k=1}^{n}dX^k(x)(v)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}(v)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}X^k(x)\frac{\partial}{\partial q^k}(v)+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}(x)v^j\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}(v).$$

يقال إن الدالة اللاغرانجية $\mathfrak{L}$ لا متغيرة (invariant) بالنسبة إلى X إذا شكّلت تكاملا أولا للحقل $\tilde{X}$، أي إذا حققت محليا المعادلة التفاضلية

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}\mathfrak{L}=\sum_{k=1}^{n}X^k\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}v^j\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}=0.$$

3. مبرهنة نويثر

لهذه المبرهنة عدة نصوص، ولعل النص التالي أيسرها للاستيعاب والفهم.

مبرهنة نويثر. إذا كانت الدالة اللاغرانجية $\mathfrak{L}$ لا متغيرة بالنسبة إلى X، فإن المقدار

$$P_X=\sum_{k=1}^{n}X^kp_k=\sum_{k=1}^{n}X^k\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k},$$

مُنحفظ على طول كل مسار مُحقِّقٍ لمبدأ الفعل الحرج.

البرهان. ليكن $\gamma\in C^2([0,T];\mathcal{M})$ منحنى محققا لمبدأ الفعل الحرج. من أجل كل $t\in\gamma^{-1}(U)$، يمكننا أن نكتب

$$P_X\left(t,\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)=\sum_{k=1}^{n}X^k\circ\gamma(t)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(t,\frac{d\gamma}{dt}(t)\right).$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على الصيغة

$$\frac{d}{dt}\left(P_X\left(\cdot,\frac{d\gamma}{dt}(\cdot)\right)\right)(t)=\sum_{k=1}^{n}dX^k(\gamma(t))\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(t,\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}X^k\circ\gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\cdot,\frac{d\gamma}{dt}(\cdot)\right)\right)(t).$$

ولأن γ يحقق محليا معادلات أويلر-لاغرانج، فإنه يأتي

$$\frac{d}{dt}\left(P_X\left(\cdot,\frac{d\gamma}{dt}(\cdot)\right)\right)(t)=\sum_{k=1}^{n}dX^k(\gamma(t))\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(t,\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}X^k\circ\gamma(t)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}\left(t,\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)=\mathcal{L}_{\tilde{X}}\mathfrak{L}\left(t,\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)=0,$$

وهو المطلوب.

صاغ الفيزيائيون قانون 'انحفاظ الزخم' الكلاسيكي بعشرات السنين قبل ظهور مبرهنة نويثر، وبعد الإعلان عنها أصبح نتيجة مباشرة لها.

قانون انحفاظ الزخم. لتكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ وَ $\mathfrak{L}: [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة لاغرانجية معطاة. إذا كانت المُركّبة $\partial_{q^i}\mathfrak{L}$ للقوة المعممة $\nabla_q \mathfrak{L}$ معدومة، فإن المركبة $p_i = \partial_{\dot{q}^i}\mathfrak{L}$ للزخم المعمم $p = \nabla_{\dot{q}}\mathfrak{L}$ ثابتة على طول أي مسار محقق لمبدأ الفعل الحرج.

البرهان. لنضع

$$X(q) = \frac{\partial}{\partial q^i}(q), q \in \Omega.$$

ومنه يأتي

$$X^i = 1, X^k = 0, k \neq i,$$

وَ

$$\tilde{X}(q,\dot{q}) = \frac{\partial}{\partial q^i}(q,\dot{q}), (q,\dot{q}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

وعليه $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\mathfrak{L} = \partial_{q^i}\mathfrak{L}$. الآن استنادا إلى مبرهنة نويثر، ندرك أنه إذا كانت $\partial_{q^i}\mathfrak{L} = 0$، فإن المركبة $\sum_{k=1}^{n} X^k p_k = p_i$ منحفظة على طول أي مسار محقق لمبدأ الفعل الحرج. وهو المُراد إثباته.

مراجع للاستزادة

[1] Abraham, R. and Marsden, J.E., Foundations of Mechanics, Addison-Wesley, Redwood City, 1987.

[2] Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] Deriglazov, A., Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism, Springer International Publishing Switzerland, 2017.

[4] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[5] Jech, T., Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2003.

[6] Marsden, J.E. and Ratiu, T.S., Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems, Springer-Verlag, New York, 1999.

[7] Tourlakis, G., Lectures in Logic and Set Theory, Volume 2: Set Theory, Cambridge University Press, 2003.

[8] Wigner, E.P., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 13 (1), 1960, 1-14.