ماذا الذي فعله ابن التاجر الإيطالي الغني في إفريقيا؟

زكية طبّة

أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
zakia.tebba@g.ens-kouba.dz

وأنت تسير لساعات متأملًا في بستانٍ من أزهار النرجس الجميلة، أو متجوّلًا مذهولًا لأيامٍ في حضرة أهرامات مصر الرائعة، أو مستلقيًا على أمواج البحر مستمتعًا بسيمفونية بيتهوفن الخامسة، هل بحثت يومًا عن سبب مقنع لوجود هذا التناسق الغامض في الطبيعة؟ ربما لو تمعّنت أكثر ستجد ما لم يجده العلماء وتكشف للعالَم أسرار أخرى حول متتالية فيبوناشي وما شابهها!

1. متتالية فيبوناتشي

في الرياضيات، متتالية فيبوناتشي أو أعداد فيبوناتشي -نسبةً إلى عالم الرياضيات الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي (Leonardo Fibonacci)- هي متتالية يساوي كل حد منها مجموع الحدين السابقين.

الحدود الأولى لهذه المتتالية معطاة في الجدول أدناه.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...

في هذا الجدول الحدّان الأوّلان لهذه المتتالية هما الصفر والواحد، ولكن البعض يحذف الحد 0 ويعوضه بالحد 1، وبعضهم الآخر يبدأ بالواحد والاثنين. لكن في جميع هذه الحالات، يبقى كل حدّ هو مجموع الحدين السابقين له.

تُعرَّف متتالية فيبوناتشي (F_n) بالطريقة التالية: لو اعتبرنا F_n الحدّ ذا الرتبة n لمتتالية فيبوناتشي فإنّه مهما يكن n ينتمي إلى IN فإنّ

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

مع

$$F_2=1 \text{ و } F_1=1 \text{ (نعتبر } F_0=0\text{).}$$

سمّيت هذه المتتالية نسبة إلى ليوناردو البيزي (Leonardo of Pisa)، والمعروف باسم فيبوناتشي. عَرَّف هذا العالِم هذه المتتالية في كتابٍ له عنوانه ليبر أباتشي، نُشر عام 1202، رغم أنّ هذه المتتالية كانت معروفة وموصوفة في الرياضيات الهندية مائتين سنة قبل الميلاد، في عملٍ قام به بينغالا (Pingala).

2. ماذا تعرف عن فيبوناتشي؟

في مدينة بيزا (Pisa)، إحدى مدن إقليم توسكانا الإيطالي القريب من البحر المتوسط، وفي عام 1170، وُلِد ليوناردو. كانت بيزا في ذلك الوقت مدينة تعجّ بخليط من الأُمم: الإيطاليين والأتراك والليبيين والفرس والعرب. عاش سنوات طفولته في مدينة بجاية مع والده غيلييلمو (Guilielmo)، ذلك التاجر الإيطالي الغني والمشرف على أسواق بيزا في بجاية.

كان من الضروري، لإعداد ابنه ليوناردو ليكون تاجرًا مثله، أن يعلّمه مبادئ الحساب والرياضيات، فسلّم غيلييلمو ابنَه إلى معلّم عربي يُعلّمه هذه العلوم. أُولع ليوناردو بالأرقام العربية، وكان ذكيا محبًّا للرياضيات، ولم يلبث أن

تعلّم الضرب والقسمة وأجادهما. علّمه مُدرّسه "سيدي عمر" كما يقول، حسابَ الكسور على أحدث الطرق التي كانت تُدرَّس في مدارس الحواضر الإسلامية آنذاك. كما تعلّم الجذور وحلّ المعادلات الرياضية التي كان العلماء المسلمون - مثل الخوارزمي وغيره- قد برعوا فيها.

أمضى ابن بيزا طفولته في شمال إفريقيا، وكان يسافر بشكل واسع في الجزائر. تمّ إرساله في رحلة عمل إلى مصر وسوريا واليونان وصقلية ومنطقة بروفنس الفرنسية. وفي عام 1200 عاد إلى بيزا واستثمر المعرفة التي حصل عليها من أسفاره في كتابة مؤلفه الشهير **ليبر أباتشي** (Liber abaci)، الذي عرّف من خلاله العالَم الناطق باللاتينية بنظام العد العشري. لقد نقل فيبوناتشي، حسبما يُذكر، من العالم الإسلامي، الأرقام العربية والتي أصبحت مستعملة في العالم كله في العصر الحالي. وقد قيل أيضا، أنّ من قام بنقل هذه الأرقام هو الراهب الفرنسي جيربيرت الأوريلاكي (Gerbert of Aurillac).

صدر كتاب **ليبر أباشي** المتخصص في الحساب والمحاسبة، في سنة 1202. تأثّر فيبوناتشي في هذا الكتاب بالفترة التي قضاها في العالم الإسلامي، ومما يدلّ على ذلك قيامُه بتحرير جزء من الكتاب من اليمين إلى اليسار. وبنشر هذا الكتاب قام فيبوناتشي بتعريف الأوروبيين بنظام الحساب العربي. لقد كان هذا النظام يفوق بمراحل النظام الروماني المعتمد آنذاك في أوروبا، وقد أدرك فيبوناتشي هذا التفوّق جيدا. مع ذلك واجه هذا النظام عنتًا شديدًا قبل أن ينتشر بصورة مذهلة.

3. مؤلفاتـه

عاد فيبوناتشي في سنة 1200 إلى وطنه الأم إيطاليا، وإلى مدينته بيزا، وهناك ألّف كتبه الأربعة التي اشتهرت فيما بعد، حيث نقل وأحيا من خلال هذه الكتب الرياضيات القديمة، وأضاف إليها من علمه الشيء الكثير. علمًا أن فيبوناتشي عاش في فترة زمنية لم تكن فيها الطباعة قد اكتشفت بعد، لهذا كان يخطّ كتبَه باليد، والطريقة الوحيدة لنسخ الكتب كانت عبر إعادة كتابتها مرة أخرى.

نشر ليوناردو كتابًا في عام 1225، تحت عنوان Practica Geometriae متأثرا فيه بالرياضيات اليونانية. وقد تضمّن هذا الكتاب نظريات مبنية على ما جاء في كتاب **الأصول** لأقليدس (Euclid). وفي كتاب Flos يُظهر فيبوناتشي براعته في حل معادلات جبرية من الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية. وهو يُعدّ بحق من خبراء الجبر والعمليات الحسابية العملية في القرن الثالث عشر.

4. كتاب ليبر أباتشي (1202)

ذكر فيبوناتشي في كتاب **ليبر أباتشي** أنه تعلم في مدرسة في بجاية، ولأول مرة الأرقام العربية التسعة (وهي في الأصل هندية) من خلال مدرّسين متميّزين يملكون معرفة كبيرة بهذا العلم. الأمرُ الذي أسعده وسلب لبّه وجعله شغوفا بالرياضيات حتى أنه وجد فيها سعادته أكثر من أي شيء آخر. ومن الواضح في هذا الكتاب تأثّره بالثقافة العربية، وذلك لأنه كتب الكثير من الأعداد من اليمين إلى اليسار على عادة العرب في الكتابة.

في الفصل الأول من هذا الكتاب قدّم فيبوناتشي الأرقام الهندية-العربية، من خلال النظام العشري الذي يعتمد على الأرقام العشرة: من الصفر حتى الرقم تسعة، والتي عُرفت بشكل واسع تحت اسم نظام العدّ العربي أو العشري. ومن المؤكد أنّ الكثير من القضايا والمسائل التي ناقشها في هذا الفصل، كانت مشابهة لتلك التي عُرضت في المصادر العربية.

يبدأ الفصلَ الأول من الكتاب بالجملة التالية: "هذه هي الأرقام الهندية التسعة: 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 ومع هذه الأرقام التسعة، ومع الرمز 0 (صفر) وهو عربي، يمكن كتابة ووصف أي عدد. وترجع أهمية هذا الأمر إلى صعوبة

استخدام الأرقام الرومانية في العد والحساب لأنها طويلة وتزيد من صعوبة الأمر، هذا إذا علمنا أنّ الرياضيات تحتاج ولا شك إلى قدرات خاصة لا تتوفر لدى الكثيرين".

في الفصل الثاني من الكتاب، ناقش فيبوناتشي الكثير من المسائل التي كانت تهمّ تجار بيزا، مثل أسعار البضائع، طريقة حساب أرباح العمليات التجارية، وكيفية تحويل العملات المستخدمة في دول البحر المتوسط.

في الفصل الثالث، قام بحلّ الكثير من المسائل الرياضية، إلا أنّ أشهرها مسألةٌ كانت السبيل إلى اكتشاف ما أصبح يُسمّى فيما بعد بأعداد فيبوناتشي، وهي السبب في شهرته لدى كثير من الناس، حيث أصبح يُعدّ من أعظم علماء الرياضيات الغربيين في القرون الوسطى.

4. أين نجد أعداد فيبوناتشي في الرياضيات؟

تظهر أعداد فيبوناتشي على شكل مجاميع في مثلث باسكال (Pascal) للأعداد الواقعة على أقطار مائلة.

أعداد فيبوناتشي هي مجاميع للأقطار المائلة السطحية المبينة باللون الأحمر في مثلث باسكال

كما تظهر أعداد فيبوناتشي أيضا جوابًا عن معضلة معروفة في التحليل التوافقي: كم عدد طرق كتابة عددٍ ما، وليكن n، على شكل مجموع مرتب لأعداد شرط أن يتم اختيارها من بين الواحد والاثنين. الجواب هو F_{n+1}. على سبيل المثال، إذا كان n يساوي خمسة، فإنّ

$$F_{n+1} = F_6 = 8.$$

5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2.

تَمَكَّن عالم الرياضيات الروسي يوري ماتياسفيتش (Yuri Matiyasevich) من إثبات أنّ أعداد فيبوناتشي يمكن أن تعرّف بمعادلة ديوفانتية، وفتح له ذلك باب إثبات معضلة هيلبرت العاشرة.

كما أنّ متتالية فيبوناتشي هي مثال عن المتتاليات الكاملة. هذا يعني أنّ كل عدد صحيح طبيعي يمكن أن يُكتب على شكل مجموع لأعداد فيبوناتشي بدون استعمال هذه الأعداد أكثر من مرة واحدة.

5. هل هنالك معادلة سحرية للكون؟

ربما لا، ولكن هنالك بعض الأمور الشائعة جدًا التي نجدها مرارًا وتكرارًا في العالم الطبيعي من حولنا. مثلًا أعداد فيبوناتشي تعكس أنماطًا مختلفة موجودة في الطبيعة، من مخروط الصنوبر إلى منحنى صدَفة نوتيلوس إلى انحناء الأعاصير. ومن المحتمل أنّ البشر قد عرفوا هذا التسلسل العددي منذ آلاف السنين، فيمكن العثور عليه في النصوص السنسكريتية القديمة، ولكنه ارتبط بهوس رجلٍ بالأرانب.

6. هوس رجلٍ من العصور الوسطى بالأرانب!

في عام 1202، طرح فيبوناتشي في كتابه **ليبر أباتشي** السؤال التالي: كم عدد أزواج الأرانب التي يمكن إنتاجها من زوج واحد من الأرانب في عام واحد، في ظروف مثالية؟ تقتضي هذه التجربة الفكرية أن تلد إناث الأرانب دائمًا أزواجًا، ويتكوّن كل زوج من ذكر واحد وأنثى واحدة.

وبالتفكير في الأمر: يوضَع زوجٌ من الأرانب حديث الولادة في ساحة مُسيّجة ويُترك ليتكاثر، مع الأخذ في الحسبان أنّ الأرانب لا يمكنها التكاثر حتى يبلغ عمرها شهرًا واحدًا على الأقل. لذلك سيكون لدينا زوجٌ واحد في الشهر الأول، ثم تلد الأنثى في نهاية الشهر الثاني، ونحصل على زوجين من الأرانب. وعندما يأتي الشهر الثالث، يُنتج الزوج الأصلي من الأرانب زوجًا آخر من الأرانب حديثة الولادة، بينما ينمو نسلهم السابق فيَصِل إلى مرحلة البلوغ، وهذا سيترك ثلاثة أزواج من الأرانب، اثنان منها سينجبان زوجين آخرين في الشهر التالي.

لنفترض أنّ الأُنثى لدينا تلد زوجًا جديدًا كلّ شهر (ذكر وأنثى) بدءًا من الشهر الثاني وصاعدًا. السؤال الذي طرحه فيبوناتشي هو كم زوجًا سيكون لدينا بعد عام واحد؟

- في نهاية الشهر الأول يتزاوجان لكن مازال هناك زوج واحد فقط.
- في نهاية الشهر الثاني تلدُ الأنثى زوجًا جديدًا، وبالتالي يكون لدينا زوجان من الأرانب الآن.
- في نهاية الشهر الثالث تلد الأنثى الأم زوجًا آخر ليصبح لدينا بالمجمل ثلاثة أزواج.
- في نهاية الشهر الرابع تلد الأنثى الأم زوجًا جديدًا والأنثى التي وُلدت منذ شهرين تلد زوجها الأوّل أيضا، ليكون لدينا خمسة أزواج.

لنتخيل الآن أنّ لدينا X_n زوجًا من الأرانب. بعد n شهر فإنّ عدد الأزواج في الشهر $n+1$ سيكون X_n (في هذه المسألة الأرانب لا تموت) بالإضافة إلى الأزواج الجديدة التي ستولد. ولكن الأزواج التي ستلد هي فقط الأزواج التي عمرها شهر على الأقل وبالتالي سيكون لدينا على الأقل X_{n-1} زوج. وبالتّالي لدينا

$$X_{n+1}=X_n+X_{n-1}$$

والتي هي ببساطة القاعدة الأساسية لتوليد أعداد فيبوناتشي: اجمع آخر عددين لتحصل على العدد التالي. وبمتابعة ذلك ستجد أنه بعد 12 شهرًا (سنة) سيكون لديك 233 زوجا من الأرانب.

7. النحل أفضل

في مستعمرات النحل يوجد أنثى واحدة مميزة فقط تُسمّى الملكة، وباقي الإناث عاملات فقط، وعلى عكس النحلة الملكة فالنحلات الأخرى لا تنتج بيضًا. وذكور النحل لا تقوم بأي عمل وتسمّى بالنحل الكسول. تتم ولادة ذكور النحل من البيوض غير الملقحة، ولذلك فإنّ الذكور لها أم ولكن ليس لها أب. وكل الإناث تتم ولادتها عندما تتناسل الملكة مع ذكر وبالتالي يكون لها أب وأم.

الإناث غالبًا ما ينتهي الأمر بها إلى عاملات، ولكن بعضها الآخر يتغذى بمادة خاصة تُسمّى الهلام الملكي والذي سيجعلها ملكات، فتنطلق لبدء مستعمرة جديدة عندما تشكل أسرابًا. وتغادر منزلها (الخليّة) باحثةً عن مكان جديد لبناء عشّ جديد.

لِنُلْقِ نظرةً على شجرة العائلة لذكر النحل التي نُعبّر عنها بأعداد فيبوناتشي:

- لديه أم فقط.
- لديه جدّان بما أنّ أمه كان لديها أب وأم أيضًا، ولديه ثلاثة آباء لأجداده حيث جدته لديها أب وأم وجده لديه أم فقط. كم لديه جد لأجداده؟

8. أعداد فيبوناتشي مجدّدًا

1.8. النباتات

تعبّر بعض النباتات عن تسلسل فيبوناتشي في أماكن نموها. ففي الأماكن التي تتشكّل فيها أغصان الأشجار أو تنقسم، ينمو جذعٌ واحد حتى ينتج فرعًا، ما ينتج عنه نقطتا نمو، ومن ثم يُنتج الجذع الرئيسي فرعًا آخر، فيعطي بذلك ثلاثة نقاط نمو. ثم يُنتج الجذع والفرع الأول نقطتي نمو إضافيتين، وبذلك يصل المجموع إلى خمسة نقاط. ويستمر هذا النمط من النمو متبعًا متتالية فيبوناتشي.

إضافة إلى ذلك، إذا قمت بحساب عدد البتلات في زهرة ما، فغالبًا ما ستجد العدد الإجماليّ هو أحد حدود متتالية فيبوناتشي. مثلًا، يكون لزهر الزنبق والقزحية (السوسن) ثلاث بتلات، أما الحوذان والورود البرية فلديها خمس بتلات، وللدلفينيوم ثماني بتلات، إلخ.

ورغم أنّ بعض بذور النباتات والبتلات والفروع وما إلى ذلك، تتبع متتالية فيبوناتشي، فهذا بالتأكيد لا يعني أنّ نموّ كل الأشياء في العالم الطبيعي يتبع متتالية فيبوناتشي. وإمكانية تطبيق سلسلة من الأعداد على كائن ما لا يعني بالضرورة ارتباط هذه الأعداد بالواقع، كما هو الحال مع الخرافات العددية، مثل موت المشاهير في مجموعات ثلاثية. إذ في بعض الأحيان لا يتعدى الأمر كونه صدفة.

وقد يجادل بعضهم بأنّ الاعتقاد بانتشار أعداد فيبوناتشي في الطبيعة مبالغٌ فيه، لكنها تظهر بما يكفي لإثبات أنها تعكس بعض الأنماط التي تحدث بصورة طبيعية. ويمكن اكتشاف هذا بملاحظة الطريقة التي تنمو بها النباتات المختلفة. ومن الأمثلة على ذلك: رؤوس البذور وأكواز الصنوبر والفواكه والخضراوات. وبالنظر إلى مجموعة البذور الموجودة في وسط زهرة عباد الشمس مثلا، ستلاحظ ما يشبه الأنماط الحلزونية المنحنية إلى اليسار واليمين بصورة مثيرة للدهشة. وإذا قمت بحساب هذه اللوالب، فستحصل على متتالية فيبوناتشي. قسّم اللوالب يسارًا ويمينًا وستحصل على متتاليين. وعند فك رموز الأنماط الحلزونية في أكواز الصنوبر والأناناس والقرنبيط سوف تعكس أيضًا متتالية فيبوناتشي بهذه الطريقة.

2.8. العواصف

غالبًا ما تتبع أنظمة الأعاصير والعواصف الرعدية متتالية فيبوناتشي. ويمكن اكتشاف هذا بالتحقق من نسب فيبوناتشي الواضحة عندما يتصاعد الإعصار على شاشة رادار الطقس.

3.8. الجسم البشري

ألق نظرةً فاحصة على نفسك في المرآة. ستلاحظ أنّ معظم أجزاء جسمك تتبع الأعداد: واحد واثنان وثلاثة وخمسة. لديك أنفٌ واحدٌ وعينان وثلاثة أجزاء لكل طرف وخمسة أصابع في كل يد. ويمكن أيضًا تقسيم نسب جسم

الإنسان وقياساته وفقًا للنسبة الذهبية. وتتبع جزيئات الحمض النووي هذا التسلسل، إذ تقاس بـ 34 أنجستروم طولًا و21 أنجستروم عرضًا لكل دورة كاملة من الالتفاف المزدوج.

9. لماذا تعكس العديد من الأنماط الطبيعية متتالية فيبوناتشي؟

فكّر العلماء في هذا السؤال لمئات السنين، إذ أن هذا الانعكاس قد يكون في بعض الحالات صدفة فقط. وقد تتواجد النسبة الذهبية في حالات أخرى لأن نمط النمو هذا تطوّر لكونه الأكثر فاعلية، كأن تتعرض أوراق النباتات الجائعة في اتباعه لأقصى تعرض للضوء أو أقصى ترتيب للبذور.

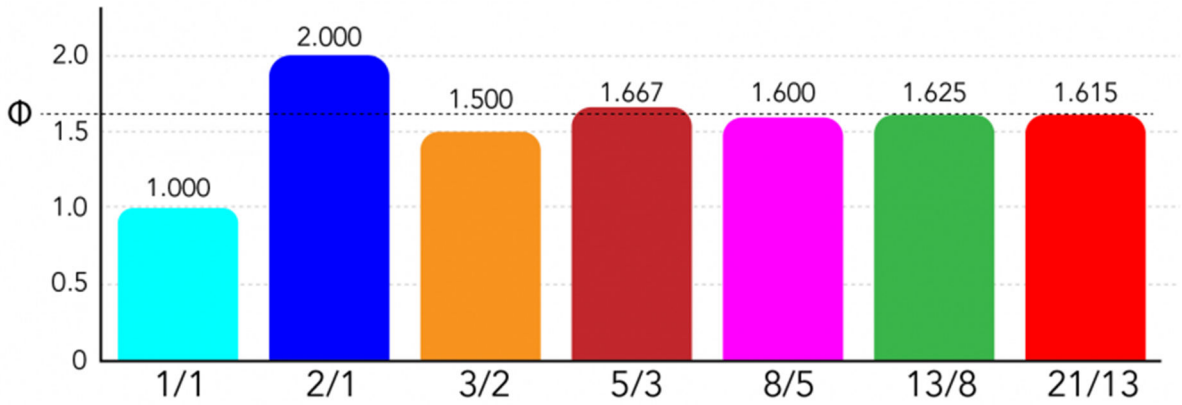
وهنالك وضوح أقل فيما إذا كانت متتالية فيبوناتشي متواجدة في الفن والعمارة، إذ رغم أنّ بعض الكتب تذكر أنّ الهرم الأكبر، والبارثينون، إضافة إلى بعض لوحات ليوناردو دافنشي، صُممت باستخدام متتالية فيبوناتشي والنسبة الذهبية، إلّا أن هذه الفرضية دُحضت عند الاختبار.

****

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, ...

متتالية فيبوناتشي التي تنطلق من العدد 0.

****



لاحظ في البيان أن قسمة عنصر من متتالية فيبوناتشي على العنصر الذي يليه من نفس المتتالية فإن النسبة تقترب من الخط الأفقي المتقطع، وهذه القيمة هي النسبة الذهبية !