مصادرومحتوى وإسهامات الرياضيات العربية قبل القرن 6هـ/12م (4)
المصادر اليونانية (نظرية الأعداد) - الإسهامات الأصيلة للرياضيات العربية

وسيلة غرابة
مخبر الإبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
أستاذة بقسم الرياضيات والإعلام الآلي، كلية العلوم، جامعة الدكتور يحي فارس، المدية
o.gheraba@yahoo.fr

سنتطرق في هذا الجزء من سلسلة المقالات، إلى مادة رياضية أخرى مصدرها يوناني، استقت منها الرياضيات العربية تقليدَها، ألا وهي نظرية الأعداد. وقد ذكرنا في المقالات السابقة المجال الخاص بالهندسة، وبهذا نكون قد أنهينا موضوع المصادر اليونانية. بعدها سنعالج الإسهامات الأصيلة للرياضيات العربية، وهي الخاصة بميداني الجبر والتحليل التوفيقي.

بهذا المقال نكون قد أكملنا القسم الخاص بالرياضيات العربية قبل القرن 6هـ/12م، وسنكمل بحول الله تعالى في المقالات القادمة، التقليد الرياضي العربي وعلمائه بعد القرن 6 هـ/12م.

1. نظرية الأعداد

في التقليد الرياضي العربي، احتلت نظرية الأعداد مكانة هامة، وهي من الموروث اليوناني وقد طُوّرت منذ الترجمات اليونانية للرياضيات. ظهر تياران من البحث في العدد وخواصه، أحدهما استقى مفهومَه وحسابه من كتاب **الأصول** لأقليدس Euclid (القرن 3ق.م.)، واستخدم فيه القطعة المستقيمة لتعريف العدد والبرهان الهندسي لإثبات الخواص. أمّا الآخر فيتموضع في حساب الفيثاغوريين المحدثين، ومصدرهم كتاب **المدخل إلى علم العدد** لنيقوماخس Nicomachus (حوالي 60-120م)، حيث استخدموا الاستقراء لاستخراج خواص الأعداد.

معادلة المقادير العددية المُنطقة والارتباط فيما بينها هو ميدان آخر في مجال نظرية الأعداد، وهو ما يعرف بالتحليل الديوفنطسي. وقد ارتبط بتيار ثالث مدروس في الرياضيات العربية وفيه أعمال كثيرة مطورة، كان مصدرها ترجمة كتاب ديوفنطس Diophantus (القرن 3م)، المعنون بـ **الأرتماطيقي** (Arithmetica) والمعروف أيضا بـ **المسائل العددية**. ولهذا يمكن تمييز ثلاثة توجهات فيما يخص علم العدد النظري، وهذا حسب الشروحات لكتب يونانية ترجمها الرياضيون العرب [6].

1.1 التوجه الأول: الفيثاغوريين المحدثين

هذا التوجه الفيثاغوري ناتج عن الترجمة العربية لكتاب **المدخل إلى علم العدد** لنيقوماخس، حيث تكتسي الأعداد الطبيعية وما تعلق بخواصها الفردية والزوجية وما ارتبط بهذين المفهومين أهمية خاصة، وتدرج في بداية مؤلفاتهم. كما يتناول بشكل مفصل تعاريف وخواص للأعداد الشكلية وحساب مختلف السلاسل العددية (مجموع الأعداد الفردية، الزوجية، المربعة، المكعبة، إلخ). هذه المجاميع استخدمت بعضها في حساب مساحة مسطحات وأحجام مجسمات. هذه الحسابات هي تقريبا مثلما نعرفه في حساب مجاميع ريمان واستخدامها لحساب المساحات والأحجام، مع فارق الأدوات والنظريات المستخدمة قديما وحديثا بالإضافة إلى التعميم على كل الأشكال في العصر الحالي. كما يعرض

هذا التيار تمييزًا للأعداد: التامة (1) وما اقترن بها من الأعداد الناقصة والزائدة، الأعداد المتعادلة (2) والأعداد المتحابة (3) [6].

محتوى كتاب **المدخل إلى علم العدد** تم تداوله في البلدان الإسلامية خلال كامل القرن الحادي عشر الميلادي. أول رياضي كانت له مساهمات أصيلة في هذا الميدان هو ثابت بن قرة (ت. 901م)، مع دراسة الأعداد المتحابة وابتكاره خوارزمية لحساب جزء من هذه الثنائيات. تبع ثابت بن قرة رياضيون آخرون حسّنوا طريقة الحساب. بالنسبة للأعداد الشكلية -وهي عبارة عن أعداد توافقها أشكال لمضلعات منتظمة- كان لهذا النوع من حساب الأعداد الشكلية في التقليد الرياضي اليوناني امتدادا في إطار نشاط الرياضيين في بلاد الإسلام في القرن العاشر الميلادي [7].

صورة مخطوط تظهر فيها أعداد شكلية مثلثة ومربعة ومخمسة.

(الصورة من كتاب **عمدة الطلّاب في معرفة علم الحساب** لإبراهيم القباقبي الحلبي المتوفى سنة 851 هـ [3])

ارتبط حساب هذه الأعداد بمفهوم الأعداد الأولية، هذه الأخيرة كانت قيد البحث عند ابن الهيثم خلال حلّه للمسألة التي تسمى مسألة البواقي الصينية (4). في استمرارية للبحث في أعداد جديدة لكن ليس من بين المسائل الرياضية التي درسها اليونان، ووُجدت في التقليد الرياضي العربي وكانت أكثر انتقالا من الشرق إلى الغرب الإسلامي وحتى إلى أوروبا،

نجد ما يسمى "الأعداد المضمرة"، أي أن يضمر أحدهم في نفسه عددا، ويحاول شخص ثان اكتشاف هذا العدد، فيطلب من الشخص الأول القيام ببعض العمليات على العدد المضمر، ويقوم هو في نفس الوقت بنفس العمليات والحسابات، فيتحصل في الأخير على العدد المضمر. إنها لا تنضوي تحتها الأعداد فحسب وإنّما أيضا الكلمات والأسماء [6].

2.1 التوجه الثاني: تمديد لدراسة كتاب الأصول لأقليدس

كرَّس أقليدس كتابين من **الأصول** لامتداد مفهوم العدد الطبيعي إلى نسبة مقدارين. في الكتاب العاشر درس نسبة العناصر من نوع هندسي، والتي عُرفت لاحقا بالأعداد غير الناطقة وهي الجذر التربيعي ومن الدرجة الرابعة، إلخ، لعدد معطى. والكتاب الخامس خُصّص لنسبة مقدارين كيفيين قابلين للقياس أو غير قابلين للقياس. بعد دراسة معمقة للكتابين في الشرق الإسلامي، مددت المقادير الهندسية المعبر عنها كعدد والتي تنتمي إلى فئتين، مقادير غير ناطقة مستوية بسيطة ومقادير غير ناطقة مستوية مركبة، بفضل الماهاني (ت. 275هـ/888م). هذا الأخير ركز على مفهوم وحدة القياس لمقدار هندسي لتمثيل مقدار بنسبته المرفقة، وهو ما سمح له بتعميم مفهوم العدد لمقدار غير قابل للإنشاء والذي نعبّر عنه الآن على شكل جذر من الرتبة n مع $n \neq 2p$، وذلك بإضافة المقادير غير المنطقة المجسمة البسيطة والمركبة [7].

لاحقا، ابن حمْلة البغدادي (القرن 4هـ/10م) وَأبو بكر الكرجي (ت. حوالي 420هـ/1029م) وَابن عبد الباقي (ت. 454هـ/1100م) عرضوا مجموعة من الأعمال الأرتماطقية التطبيقية لهذه الأعداد الجديدة. عند الفارابي (ت. 339هـ/950م) كل المقادير الهندسية أُرفقت بأعداد. ففي كتابه **إحصاء العلوم** أكد أن المقادير الناطقة هي أعداد منطقة وأن الأعداد غير الناطقة هي أعداد صمّاء. بعدها البيروني (ت. 440هـ/1048م)، اعتبر أن نسبة محيط الدائرة إلى قطرها هي عبارة عن عدد [7].

3.1 التوجه الثالث: ديوفونطسي

كتاب **الأرتماطيقي** لديوفنطس، الذي ترجمه إلى العربية أو ترجم أجزاء منه قسطا ابن لوقا (القرن 3هـ/9م) تحت اسم **صناعة الجبر لديوفنطس**، يحوي معادلات عددية حلّها ديوفنطس بطريقة خاصة في مجموعة الأعداد الناطقة الموجبة. دُرس التحليل الديوفنطسي في التقليد الرياضي العربي وفق مسارين:

- المسار الأول جبري، وهو تحليل ديوفنطسي مُنطق، وله مصدران:
  - الأول مصدره مجهول. وقد بدأت دراسته في أواسط القرن التاسع للميلاد، وبالضبط بعد الخوارزمي (القرن 3هـ/9م) وقبل أبو كامل (ت. 930م) (بينهما حوالي خمسين سنة)، ولم يكن قد تُرجم بعد كتاب ديوفنطس من قبل قسطا بن لوقا الذي سمّاه صناعة الجبر لديوفنطس. يتجلى هذا التيار في مختلف المسائل التي أوردها أبو كامل في كتابيه: **كتاب الطرائف في الحساب وكتاب في الجبر والمقابلة**.
  - المصدر الثاني هو ترجمة كتاب ديوفنطس. هذا التيار مثّله الكرجي (نهاية القرن 4 وبداية القرن 5 الهجريين/القرن 10 وبداية القرن 11 الميلاديين)، حيث استخدم مبدأ الاستقراء. وهو يرمز إلى التحليل الديوفنطسي الذي عرّفه الكرجي في **الفخري** وفي **البديع**، وألّف فيه كتابًا أسماه **كتاب في الاستقراء**.
- المسار الثاني حسابي، يتركز على كتاب ديوفنطس في توجهه الأصلي وهو التحليل الديوفنطسي الصحيح. فقد دُرست انطلاقا من القرن العاشر الميلادي مسائل ديوفنطسية تدمج بين محاولة إيجاد حلول صحيحة للمعادلات الديوفنطسية من جهة، وإعطاء براهين لها على شاكلة براهين أقليدس من جهة أخرى [2].

في هذا المجال الثاني كان البحث عن الثلاثيات العددية (أي إيجاد الثلاثية الطبيعية (x, y, z) بحيث $x^n + y^n = z^n$ مع n عدد طبيعي موجب تماماً) وخواصها قائما، فقد كرّس لها الخازن (القرن 10م) ورياضيون آخرون في بلاد الإسلام أعمالًا أصيلة ، كما حاول رياضي مسلم آخر، وهو الخُجندي (القرن 10م)، إثبات استحالة الثلاثيات العددية من أجل $n = 3$، وهي المخمنة المشهورة المنسوبة إلى فيرما Fermat (1607-1665) [7].

2. المواد والإسهامات الأصيلة للرياضيات العربية

1.2 الجبر

في تمديد الممارسات الحسابية، رُسم توجهٌ جديد ابتداءً من القرن التاسع الميلادي بظهور مادة مستقلة وهي الجبر مع أدواته، حيث عرف تطورا مهما في الشرق موازاة مع البحوث الأصيلة ونشر العديد من المؤلفات التي خصصت فقط لهذه المادة [8]. فبين عامي 813م و833م في عهد المأمون، كتب محمد بن موسى الخوارزمي في بغداد، مؤلَّفه الشهير **كتاب الجبر والمقابلة**. ولأول مرة في التاريخ صيغت الكلمة "جبر" تحت عنوان يُدل به على علم لم تتأكد استقلاليته بالاسم الذي خص به فقط، بل ترسّخ كذلك مع نص لمفردات تقنية جديدة معدّة للدلالة على الأشياء والعمليات [3].

يتألف كتاب الخوارزمي من كتابين متساويي الحجم: الكتاب الأول مخصص لنظرية المعادلات وللحسابات الجبرية؛ والثاني يحمل عنوان "كتاب الوصايا" ويعالج مسائل الإرث والوصايا بحسب قواعد الشرع الإسلامي. يطبّق الخوارزمي الحساب الجبري على حل مسائل فقهية، وبفضل الجبر يحوّل ما لم يكن سوى حسابات فقهية إلى عمل تأسيسي لمادة علمية استمرت تتطور من بعده عُرفت تحت عنوان حساب الفرائض [4].

بعد مقدمة الكتاب، يأتي القسم الذي يحتوي على أسس الحساب الجبري ونظرية المعادلات الجبرية من خلال إدخال تعابير الجبر الأولية، وهي المجهول الذي يشير إليه الخوارزمي بكلمة "شيء" وأيضا بكلمة "جذر"، ومربع المجهول الذي يشير إليه بكلمة "مال"، والعدد والكسر (وجمعه كسور) وكلمة "عدل". كما يدخل عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة واستخراج الجذر، إضافة إلى عمليتي الجبر والمقابلة. بالنسبة للتعابير الهندسية، أدخل الخوارزمي مصطلحات الهندسة المستوية انطلاقًا من ترجمة حديثة العهد لكتاب **الأصول** وهو ما يوحي إليه القسم الثالث من الكتاب المخصص للمساحة [4].

ما يلاحظ في كتاب الخوارزمي الجبري أن المسائل المطروحة لم تتجاوز فيها الدرجة الثانية، والحساب الجبري (المتعلق خاصة بالجداء) لم يتجاوز جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى. وبالتالي لم يكن مفهوم القوة الجبرية ظاهرًا في كتابه، وكذا مفهوم كثيرات الحدود، ولا الحساب عليها، وهو ما طوّره لاحقوه.

من خلال قراءة كتاب الخوارزمي، تمّ توسيع مفهوم القوة الجبرية من قبل الرياضيين أبي كامل وسنان بن الفتح (القرن 4-5هـ/9-10م.). هذا الأخير صاغ بوضوح المفهوم العام للقوة الصحيحة الموجبة. ربط سنان بن الفتح بين القوة الجبرية لعدد مجهول، وهو وحيد الحد، وبين رتبة عدد معلوم.

بالاستناد إلى جبر الخوارزمي المطوّر من قبل أبي كامل وكثيرين غيره، بالإضافة إلى القراءة الجبرية لكتاب **المسائل العددية** لديوفونطس وشرحه وتوسيع مفاهيمه من قبل رياضيين من أمثال أبي الوفاء البوزجاني (ت. 997م)، استنتجت وسائل مستحدثة مكنت من انطلاقة جديدة في الجبر بواسطة إدخال مفهوم كثيرات الحدود وإجراء عمليات الحساب عليها. وقد كان الكرجي أول من عرض هذه المفاهيم في مؤلفيه **الفخري** و**البديع**، حيث يجري عمليات الحساب على وحيدات حد من درجة موجبة وسالبة ثم كثيرات الحدود. بالنسبة للقسمة فهو يقوم فقط بقسمة وحيد حد على وحيد حد آخر، أو قسمة كثير حدود على وحيد حد. أما فيما يتعلق بالجذر التربيعي لكثير حدود، فقد تمكّن الكرجي للمرة

الأولى في تاريخ الرياضيات من إعطاء طريقة عامة في حال المعاملات الموجبة فقط. مع الكرجي كانت الانطلاقة الجديدة كليا على تقليد الجبريين العرب أمثال الخوارزمي وابن الفتح وأبو كامل، وذلك بعرض نظرية الحساب الجبري (5). وكانت غاية هذا العرض البحث عن سبل لتحقيق استقلالية وخصوصية الجبر كي يصبح بمقدوره بشكل خاص الاستغناء عن التمثيل الهندسي للعمليات الجبرية [3].

تطوّر علم حساب الجبر لغرض توسيع مجال تطبيق العمليات الحسابية لا لتشمل فقط الأعداد، ولكن أيضا مجال كثيرات الحدود. هذا التطور انتقل بالجبر، في التقليد الرياضي العربي، من دراسة معادلات الدرجة الثانية إلى حساب جذور الأعداد باستخدام جذور كثيرات الحدود، ليصل بعدها إلى نظرية المعادلات التكعيبية. هذه المعادلات التي واجه اليونانيون بعضًا منها في مسألتي تضعيف المكعب وتثليث الزاوية، والتي كانت الوسيلة إلى الحل بتقاطع القطع المكافئ مع القطع الزائد، ولم يفكر الرياضيون إطلاقا قبل الماهاني (ت. 880 م) بإرجاع هذه المسألة أو أية مسألة أخرى إلى عباراتها الجبرية [3].

فحسب قول عمر **الخيام (ت. 1131م)، في مؤلفه رسالة في قسمة ربع الدائرة في مسألة حل معادلة من الدرجة الثالثة، من الأوائل الذين استخدموا المزدوجة "هندسية جبرية" (أي إيجاد حل هندسي لمعادلات جبرية خصوصا لمعادلات الدرجة الثالثة) هم أبو سهل الكوهي (ت. 1014م) و أبو الوفاء البوزجاني و أبو حامد الصغاني (ت. 990م). وقد نجح البعض من هؤلاء حيث يؤدي التحليل فيها إلى أموال تعادل مكعبا وجذورا وأعدادًا (استخرجها أبو الجود). ويذكر الخيام أن الماهاني المهندس، في المسألة المتعلقة بقسمة الكرة بسطح مستو على نسبة معلومة، استخدم لغة الجبريين للتسهيل فأدى التحليل إلى أعداد وأموال وكعاب متعادلة ولم يمكنه أن يستخرجه بقطوع المخروطات، ثم نبغ أبو جعفر الخازن وتنبه إلى طريقه و أتى به في رسالة (هذه المسألة متعلقة بمسألة ارخميدس الخاصة بالمسبعات، وقد أتى ذكرها في مقالتنا السابقة** [5].

لم تتوقف إسهامات الرياضيين في التقليد العربي في الجبر، فقد كان هناك تطور آخر في الفترات اللاحقة وأدى إلى ابتكار وسائل وأدوات وحتى مواد جديدة في إطار هذا التقليد.

2.2 التحليل التوفيقي

في بلاد الإسلام، ممارسات التوفيقات (بمعنى المتعلقة بمسائل ترقيم وإحصاء مجموعة أشياء) ظهرت في ميدانين كبيرين هما: علوم اللغة (نحو، صرف، عروض، إلخ)؛ والرياضيات (الحساب والجبر). هذه الممارسات أعطت نتائج جديدة سمحت بإيجاد فصل جديد، وهو التحليل التوفيقي والذي طُور في إطار مادة يونانية هي "علم العدد" [7].

في علم اللغة، كانت البداية مع اللغوي الخليل بن أحمد الفراهيدي (95-170هـ/718-786م) في معجمه كتاب العين. اكتشف الفراهيدي، في مجال صرف اللغة العربية، العدد المحدود المحدود لعدد حروف جذور اللغة العربية المكونة للكلمات، وهو ما أدّى إلى إحصاء توفيقات 28 حرفا عربيا، وإلى إدراك أن جذور الكلمات العربية تتألف من حرفين حتى خمسة حروف. وجاء بعده المعجمي ابن دُرَيْد (223-321هـ/837-933م) في كتابه **الجمهرة**، حيث عمد إلى حساب العدد n^r حيث n هو عدد أحرف الأبجدية أي 28 علما أن $1 < r \leq 5$. قام بفحص جذور كل الكلمات، وهي تباديل 2 أو 3 أو4 أو 5 من 28. ومنذ الخليل أعطي لهذا الفصل الحسابي من التحليل التوافيقي البدائي عنوانًا حسابيًا، وظهر كلام اللغة كحقل مفضل للقيام بهذا الحساب الجديد وتطبيقاته. كان المسار هو عينه فيما يخص مجال العروض الذي خاضه وتابع العمل فيه الخليل، وتنسب أيضا إليه إحدى أوائل الرسائل في مجال علمي آخر بدأ يتشكل كمادة

علمية مستقلة ابتداءً من ذلك العصر هو علم التشفير أو التعمية وتحليل الرموز. هذا العلم وصل، في القرن التاسع على أبعد تقدير ومع الكندي، إلى أن يأخذ اسمًا يُعرف به إضافة إلى مفردات تقنية خاصة به [3].

في المجال الرياضي أول مساهمة كانت لها علاقة بالممارسة التوفيقية كانت من قِبل أبو كامل في **رسالة في مسائل الطيور** من أجل حل جملة معادلات لها عدة حلول. أدى ذلك إلى إحصاء كل الحلول الممكنة [7].

مع نشوء مادة الجبر وتجديده وتوسيعه الذي شكلت فيه نظرية المعادلات جزأه الرئيس، عاد الجبريون إلى الحساب ووسعوا التحليل التوافيقي. فخلال إعداد تقنيات استخراج الجذور مهما علت درجاتها المختلفة أُكتشف معها جدول معاملات وحيدات الحد وقاعدة صياغتها، وصيغه ذات الحدين المنصوصة لفظيا للقوى الصحيحة أو ما يعرف بالمثلث العددي، وهو ما يوجد في المؤلفات الجبرية للكرجي.

التعليقات

(1) العدد التام هو العدد الذي يكون مجموع قواسمه الفعلية (أي قواسمه ما عدا نفسه) مساوية له.

(2) الأعداد المتعادلة هي الأعداد التي يكون مجموع قواسمها الفعلية مساويا لنفس العدد.

(3) العددان المتحابان: يكون مجموع القواسم الفعلية لأحدهما مساوٍ للعدد الآخر.

(4) أراد ابن الهيثم حل جملة $p-1$ معادلة التالية $\begin{cases} x \equiv 1[i] \\ x \equiv 0[p] \end{cases}$ حيث p عدد أولي و $1 < i \leq p-1$[2].

(5) حساب الجبر ذكره الكرجي في كتابه **الفخري**، ص. 3. حيث يقدم الكرجي في هذا الكتاب فصولًا عن العمليات التقليدية لكتب الحساب من ضرب وجمع وقسمة ويطبقها على أدوات جبرية مثل وحيدات الحد (الشيء، المال، الكعب، مال المال، إلخ) [1].

المراجع

[1] أ. ب. الكرجي، الفخري في الجبر والمقابلة، مخطوط مكتبة عبد العزيز العامة بالرياض، قسم المخطوطات، رقم خ. (Om. 589).

[2] راشد، رشدي، التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد، في موسوعة تاريخ العلوم العربية، ج. 2، إشراف رشدي راشد بمعاونة ريجيس مورلون، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 2005.

[3] راشد، رشدي، تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 2004.

[4] راشد، رشدي، رياضيات الخوارزمي، تأسيس علم الجبر، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 2010.

[5] رحيم رضا زاده ملك، موسوعة الخيام: رسائله العلمية والفلسفية والأدبية، ترجمة جلال زنكابادي، منشورات أرجوان –دار التكوين، دبي، 2013.

[6] غرابة، وسيلة، علم الحساب في التقليد الرياضي العربي (تصنيفه وأسسه)، مجلة المعارف للبحوث والدراسات التاريخية، المجلد 8، رقم 3، 2023، 110-159.

[7] Djebbar, Ahmed, Les nombres et leurs propriétés en pays d'Islam, chez Encyclopédie de l'Islam Iranienne, 2020.

[8] Djebbar, Ahmed, Les mathématiques arabes et leur circulation dans l'Occident latin, In The difusion of the Islamic Sciences in the Western World, Firenze, 2020.