لمحة تاريخية حول نظرية التوزيعات وفضاءات سوبولاف

عبد الرشيد سعدي
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة محمد بوضياف، المسيلة
abderrachid.saadi@univ-msila.dz

1. مقدمة

تُعتبر التوزيعات وفضاءات سوبولاف (Sobolev) من أهم الأدوات الرياضية القوية لدراسة التوابع وحلّ المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية، خصوصا في الحالات التي لا يمكن فيها تطبيق طرق التفاضل والتكامل التقليدية، أو عندما يكون هناك صعوبة في التطبيق. إنها تؤدي دورًا أساسيًا في العديد من مجالات الفيزياء الرياضية، بدءًا من نظرية الموجات وصولًا إلى ميكانيكا الكم، مرورًا بالتحليل العددي.

تعمل نظرية التوزيعات على توسيع مفهوم التوابع، من خلال استعمال كائنات رياضية أعمّ من التوابع المستمرة أو القابلة للمفاضلة. يمكن أن تشمل التوزيعات توابع متقطعة (درجية مثلا)، أو غيرها من الكائنات الرياضية ذات خصائص معينة. يتم تعريف التوزيعات بأنها الأشكال الخطية المستمرة المعرفة على ما يسمى بفضاء التوابع الاختبارية.

أما فيما يخص فضاءات سوبولاف، فهي فضاءات التوابع التي تسمح بقياس صقالة الدوال وفق مفهوم أوسع، يشمل تلك التوابع التي لا تكون بالضرورة مستمرة أو قابلة للمفاضلة بالمفهوم التقليدي. يتم تعريف فضاءات سوبولاف عن طريق إدخال معايير تأخذ في الاعتبار المشتقات الجزئية للتوابع. وعلى وجه الدقة، تتضمن فضاءات سوبولاف $W^{k,p}$ التوابع التي تكون مشتقاتها الجزئية الأولى حتى الرتبة k (وفق مفهوم التوزيعات) منتمية إلى فضاء لوبيغ (Lebesgue) L^p.

2. البداية من الفيزياء والهندسة

قدّم لورنت شوارتز (Laurent Schwartz) في كتابه الشهير "نظرية التوزيعات" سلسلة من الأمثلة حول المسائل والنظريات الفيزيائية التي تم تفسيرها رياضيا بواسطة التوزيعات، مما جعلها إرهاصًا لظهور هذه النظرية فيما بعد. يقول دي جاغر (De Jager): "في السنوات بين 1945 و1949، قام لورنت شوارتز بتطوير نظرية التوزيعات عن طريق تقديم تركيب وتعميم وتأسيس دقيق لعمل العديد من الكتّاب الذين استخدموا بالفعل مفهوم التوزيع بطريقة أكثر أو أقل غموضا، من بين هؤلاء نجد رياضيين وفيزيائيين تم توجيههم إلى استخدام التوزيعات في ارتباط مع مساهماتهم في الرياضيات التطبيقية والفيزياء النظرية".

في عامي 1893 و1894، كان هيفسايد (Heaviside) قد اقترح قواعد للحساب الرمزي بالنسبة لتلك الرموز المستخدمة في مسائل الفيزياء الرياضية. كانت هذه القواعد الحسابية الرمزية تعمل بشكل جيد بالنسبة للمهندسين الذين يستخدمونها على نطاق واسع، ولكنها لم تكن دائما دقيقة من الناحية الرياضية.

في هذا السياق، قام ديراك (Dirac) بنشر مقال بعنوان "تفسير فيزيائي للديناميات الكمية" في عام 1926، حيث قدّم المقدار الشهير المرموز له بـ δ وقال عنه إنه تابع معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، يأخذ القيمة 0 عند كل عدد حقيقي غير معدوم، ومع ذلك تكامله على مجموعة الأعداد الحقيقية يأخذ القيمة 1. بالإضافة إلى ذلك، فإنه من أجل كل تابع φ مصقول بالقدر الذي نريد، ومن أجل كل عدد حقيقي a، فإنّ تكامل جداء التابع φ مع انسحاب ديراك عند a يعطي القيمة $\varphi(a)$. قام ديراك أيضًا على هذا النحو بتعريف المشتقات المتتالية لـ δ .

3. مفارقة رياضية

إنّ كتابة كائن ديراك على النحو المذكور آنفا تبدو غير منطقية؛ إذا اعتبرنا القياس المستخدم هو قياس لوبيغ فإنّ التابع منعدم شبه كليا وهذا يناقض كون تكامله يساوي 1، فضلا على أن تكون قيمة تكامل جدائه مع تابع أخرى تساوي قيمة غير منعدمة.

لقد اعترف ديراك نفسه بهذا. ومن أجل الخروج من هذا المأزق فقد ذكر إنّ هذه الكتابة يمكن اعتبارها نهاية لتوابع تأخذ أشكالا محددة تجعلها تقترب من الصفر. يمكننا إنشاء هذا النوع من المتتاليات بأخذ متتالية تقترب من اللانهاية عند 0 بالضبط، بينما تقترب من 0 عند بقية القيم الحقيقية، مع جعل تكاملها يأخذ القيمة 1. لا يمكننا تطبيق نظرية التقارب بالهيمنة للوبيغ على هذه المتتالية نظرا لعدم تمكننا من إيجاد الدالة القابلة للمكاملة والمهيمنة على عناصرها، بسبب كون الحواد العليا للمتتالية تقترب من اللانهاية بجوار 0. هذا الأمر يفسر لنا عدم احتفاظنا بقيمة التكامل للمتتالية عند المرور للنهاية. وهذا من بين الأمثلة الشهيرة التي تبيّن ضرورة وجود الدالة المهيمنة من أجل المرور للنهاية تحت إشارة التكامل، وهذا له مجال آخر ليس مقصودا في هذا المقال.

ومع ذلك فإنه عند اختيار دالة φ بمواصفات معينة (نفترضها هنا مستمرة) فإنه يمكن المرور إلى النهاية تحت إشارة التكامل والوصول بالتالي إلى كائن ديراك (يمكن الرجوع إلى مقدمة الكتب المختصة بالتوزيعات لمزيد من التفاصيل).

4. الدوال والقياس والتحليل التابعي

في عام 1900، وصف فولتيرا (Volterra) القرن التاسع عشر بأنه قرن نظرية التحليل، بينما ذكر فيليكس براودر (Felix Browder) بأنه من المناسب أيضًا أن نسمّي القرن العشرين قرن التحليل التابعي. وهذا ما يدعونا إلى إلقاء نظرة ولو خاطفة حول نظرية التوابع والتحليل التابعي، لا سيما وأنها مرتبطة ارتباطا وثيقا بفضاءات لوبيغ وسوبولاف والتي نجد للتوزيعات حضورا كبيرا فيها.

وعلى الرغم من الارتباط الوثيق بين نظرية التوزيعات والتحليل التابعي إلى الدرجة التي يمكن أن نعتبر فيها نظرية التوزيعات جزءًا من التحليل التابعي، إلا أنّ الناظر للتسلسل التاريخي للتوزيعات لا يجد كبير أثر للتحليل التابعي، مما يعني أنه يمكن إنشاء التوزيعات باستخدام مقاربات مختلفة.

جاء دافع تطوير التحليل التابعي من فرعين من التحليل الكلاسيكي: حساب التفاضل والتكامل ونظرية المعادلات التكاملية، حيث ابتدأ الفرع الأول مبكرا وبلغ ذروته من خلال أطروحة الدكتوراه لصاحبها فريشيه (Fréchet). بينما كانت أعمال هيلبرت (Hilbert) المسماة "مبادئ نظرية عامة في المعادلات التكاملية الخطية" أحد أهم الأعمال المميزة التي ساهمت في تطور الفضاءات الشعاعية. دون أن ننسى مساهمات فريدهولم (Fredholm) وفولتيرا في هذا المجال. لقد ظهرت فضاءات هيلبرت بفضل هيلبرت نفسه وكذا شميدت (Schmidt)، بالإضافة إلى ريس (Riesz) وفيشر (Fischer).

كانت أولى النتائج المثيرة في نظرية التوابع الخطية المستمرة مجموعة من نظريات التمثيل. حيث اكتشف هادامارد (Hadamard) أنه يمكن اعتبار الأشكال الخطية المستمرة على فضاء التوابع المستمرة على مجال بأنها نهايات لمتتاليات تابعية على هذا الفضاء. قام ريس بتحسين هذه التمثيلات في النظرية المسماة بنظرية التمثيل لريس (ريس - فيشر)، والتي تم تطبيقها على فضاءات لوبيغ.

إن نظرية التمثيل المذكورة آنفا سمحت لنا باعتبار قياسات معينة على أنها أشكال خطية مستمرة على الفضاء K(IR) للدوال المستمرة والمعدومة خارج متراصات، وهي المسماة بقياسات رادون (Radon)، النواة الأولى في تقديم التوزيعات.

5. شوارتز ومفهوم التوزيع

نشر شوارتز في عام 1946 مقالا بعنوان "تعميم مفهوم التابع والتفاضل وتحويل فورييه مع تطبيقات رياضية وفيزيائية"، أبرز فيه الطريقة التي يمكن بها العثور على كائن ديراك وذلك باعتباره قياس رادون على النحو الذي تم ذكره في الفقرة السابقة. وبهذا أوضح شوارتز أنّ كائن ديراك ليس تابعا وإنما هو قياس لرادون.

كما بيّن أنه يمكن اتباع الطريقة ذاتها لتعريف المشتقات المتتابعة لقياس ديراك. ولكن هذه المشتقات ليست قياسات لرادون، إذ إنّ فضاءات التوابع التي نعرف عليها الأشكال الخطية ليست الفضاء K(IR) وإنما هي فضاءات لتوابع قابلة للاشتقاق لانهائيا وتنعدم خارج متراص.

سمّى شوارتز عناصر المجموعة المكونة من التوابع (التي تحقق شروطا معينة)، وقياسات رادون ومشتقاتها باسم "التوزيعات"، وهي أشكال خطية مستمرة على فضاء التوابع القابلة للاشتقاق لانهائيا، وتنعدم خارج متراص، والذي نسميه فضاء التوابع الاختبارية.

قدّم شوارتز تعريفين أساسيين:

التعريف 1. نرمز بـ Φ لفضاء التوابع المعرفة على مفتوح U من $\mathbb{R}^n$، قابلة للاشتقاق لانهائيا، وتنعدم خارج مجموعات متراصة. هذا الفضاء مزود بطبولوجيا معينة.

التعريف 2. نسمي "توزيعا" على U كل شكل خطي ومستمر على Φ.

نشر شوارتز كل ما يتعلق بهذه المفاهيم في كتابه الشهير بـ "نظرية التوزيعات" (ضمن جزءين)، وذلك في مطلع الخمسينيات من القرن الماضي ثم أعيدت طباعتهما مرارا. لتتوالى بعدها الأبحاث في هذا المجال وتتوسع بشكل ملحوظ.

6. مبدأ ديريخليه وأشباه المشتقات

في سياق آخر، من بين النتائج الأولى لحساب التغيرات الكلاسيكي نجد مبدأ ديريخليه (Dirichlet) الذي ينص على ما يلي:

إنّ التكامل التغايري $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ يقبل حدًا أدنى باعتبار u تنتمي إلى مجموعة التوابع من الصنف $C^1(\Omega)$ حيث Ω هو مفتوح مترابط ومحدود من IR^n.

هذا المبدأ تم استخدامه من قبل ريمان (Riemann) بدون تفسير رياضي معتبر. بل إنه في عام 1870 ذكر فايرشتراس (Weierstrass) أنّ وجود هذه الدوال الحدية ليس دائمًا مضمونًا.

أما أول برهان دقيق لمبدأ ديريخليه فقد كان في عام 1900 من قبل هيلبرت وذلك من أجل التوابع المنتمية للفضاء $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$، والتي لها أثر g على حافة Ω . وهو ما يعتبر الخطوات الأولى في تطوير فكرة فضاءات سوبولاف، حيث أنه في وقت لاحق تم ربط مبدأ ديريخليه بمسألة حدية مرتبطة بمعادلة بواسون (Poisson)، إذ إنّ حل هذه المسألة هو حد أدنى لتكامل الطاقة لديريخليه.

ونظرا لأهمية هذا المبدأ فقد اشتغل عليه عدد من كبار الرياضياتيين في بداية القرن الماضي منهم: بيبو ليفي (Beppo Levi)، فوبيني (Fubini)، تونيللي (Tonelli)، نيكوديم (Nikodym)، فريديريك (Friedrichs)، ريليخ (Rellich) وغيرهم.

في عام 1934، قدم ليري (Leray) مصطلحًا جديدًا وهو "شبه المشتق"، حيث ذكر في مقالته المعنونة "حول حركة مائع لزج عبر الفضاء" تعريفا للمشتق الضعيف يستند إلى علاقة المكاملة بالتجزئة الشهيرة. ننوّه إلى أنّ المفهوم المعرّف آنفًا قد شاع فيما بعد تحت اسم "المشتق الضعيف".

7. فضاءات سوبولاف

في عام 1935، قدم سوبولاف نظرية حول الحلول العامة لمعادلة الأمواج، والتي تعرف على أنها نهاية في الفضاء L^1 للحلول من الصنف C^2 لهذه المعادلة. وقدّم سوبولاف في هذا الإطار مفهوم التابعيات المستمرة على مجموعة التوابع القابلة للمفاضلة باستمرار حتى رتبة معينة (عرفت هذه التابعيات لاحقًا بـ"التوزيعات ذات الرتبة المحدودة"). وبهذا يكون قد أعلن نظريته حول وجود حلول لمجموعة واسعة من المعادلات الزائدية.

وفي عام 1938، قدّم سوبولاف تعريفًا واضحًا لما يسمى بالمشتقات الضعيفة وكذا الفضاءات التي سُميت فيما بعد بفضاءات سوبولاف والتي رمز لها بالرمز L_p^ν، ثم تطور فيما بعد إلى الرمز W_p^m، وهو أقرب إلى الترميز الحالي $W^{m,p}$. وتطور البحث في هذه الفضاءات وما يتعلق بها بسرعة كبيرة ابتداءً من خمسينيات القرن العشرين.

ومن أشهر الكتب التي أُلّفت في مطلع السبعينيات من القرن الماضي في هذا المجال نجد كتاب آدامس (Adams) المعنون "فضاءات سوبولاف" (Sobolev spaces) والذي قدّم تعريفات وخصائص لهذه الفضاءات اعتمد عليها جل من كتبوا في هذا الميدان. ومن الكتب الحديثة نذكر كتاب بريزيس (Brezis) الذي عنوانه "التحليل التابعي" (Analyse fonctionnelle)، المنشور في الثمانينيات من القرن العشرين. وقد ترجم هذا الكتاب إلى عدّة لغات منها العربية والإنكليزية.

8. سوبولاف وشوارتز وآخرون

هل كانت أفكار شوارتز وسوبولاف هي الوحيدة في هذا المجال؟ وهل أخذ أحدهما عن الآخر؟ إنّ الإجابة عن هذه الأسئلة تحتاج إلى دراسة معمقة لا تحتملها هذه العجالة، ولكن من المناسب ذكر بعض الومضات حول هذا.

ظهرت أعمال شوارتز وسوبولاف في زمن متقارب (ما بين ثلاثينيات والأربعينيات من القرن الماضي)، وذلك ضمن مقاربتين تبدوان مختلفتين، لكنهما تؤديان إلى نتائج متشابهة إلى حد كبير. بل إنّ هناك من يؤكد على وجود مراسلات بينهما رغم الحاجز الذي وضعته الحرب الباردة بين الشرق (سوبولاف وعلماء المعسكر الشرقي) والغرب (شوارتز وعلماء المعسكر الغربي)، مع الإشارة إلى أنّ هذا التقسيم جغرافي لا يلامس الانتماء العقائدي لهؤلاء الرياضياتيين.

تظهر نظرية شوارتز للتوزيعات أنه لم يكن من الضروري التعمق في الإطار المجرد لنظريات التحليل التابعي المتعلقة بالفضاءات الثنوية رغم اشتغاله بها، ومع ذلك استفادت نظرية شوارتز كثيرا من الأفكار والنظريات المستمدة من هذا التجريد. أما عمل سوبولاف، فيظهر أيضًا أنه يمكن بناء التوزيعات وتطبيقها في حالات خاصة دون الحاجة إلى التعمق في الفضاءات الثنوية والأشكال الخطية، ومع ذلك فإنّ أعماله تظهر وكأنها مستوحاة أيضًا من الأفكار العامة حول هذه الأخيرة.

هل كان يمكن تطوير نظرية للدوال المعممة بدون نظرية الفضاءات الثنوية؟ نعم، يمكن ذلك، وفي الواقع تم تطوير مثل هذه النظريات بطريقة مختلفة عن توزيعات سوبولاف وشوارتز. وفي هذا السياق، اقترح تولهويك (Tolhoek) اثنتين من تلك النظريات البديلة، ولكنها لم تنشر، كما قدّم شوارتز طريقة ثالثة من خلال بحثه في هذا المجال. ومن يدري فقد كان من المحتمل أن تصبح إحدى هذه النظريات الثلاث البديلة السائدة لو لم تكن نظرية الفضاءات الثنوية متطورة أثناء تلك الفترة؟

نشير أيضا إلى أن فانتابي (Fantappiè) نشر سلسلة من المقالات بدءًا من عام 1930 حول ما سمّاه "التوابع التحليلية". وقد تم تضمين العديد من أفكاره في مؤلفه "نظرية التوابع التحليلية وتطبيقاتها". تتشابه نظرية فانتابي للتوابع التحليلية ونظرية شوارتز للتوزيعات كأمثلة لتطبيقات لنظرية التوابع على التحليل الفعلي. ومع ذلك، هناك العديد من الفروق الجوهرية بين النظريتين. كان هدف فانتابي هو دراسة التوابع التحليلية تجريديًا، في حين كان هدف شوارتز هو توسيع مفهوم الدالة.

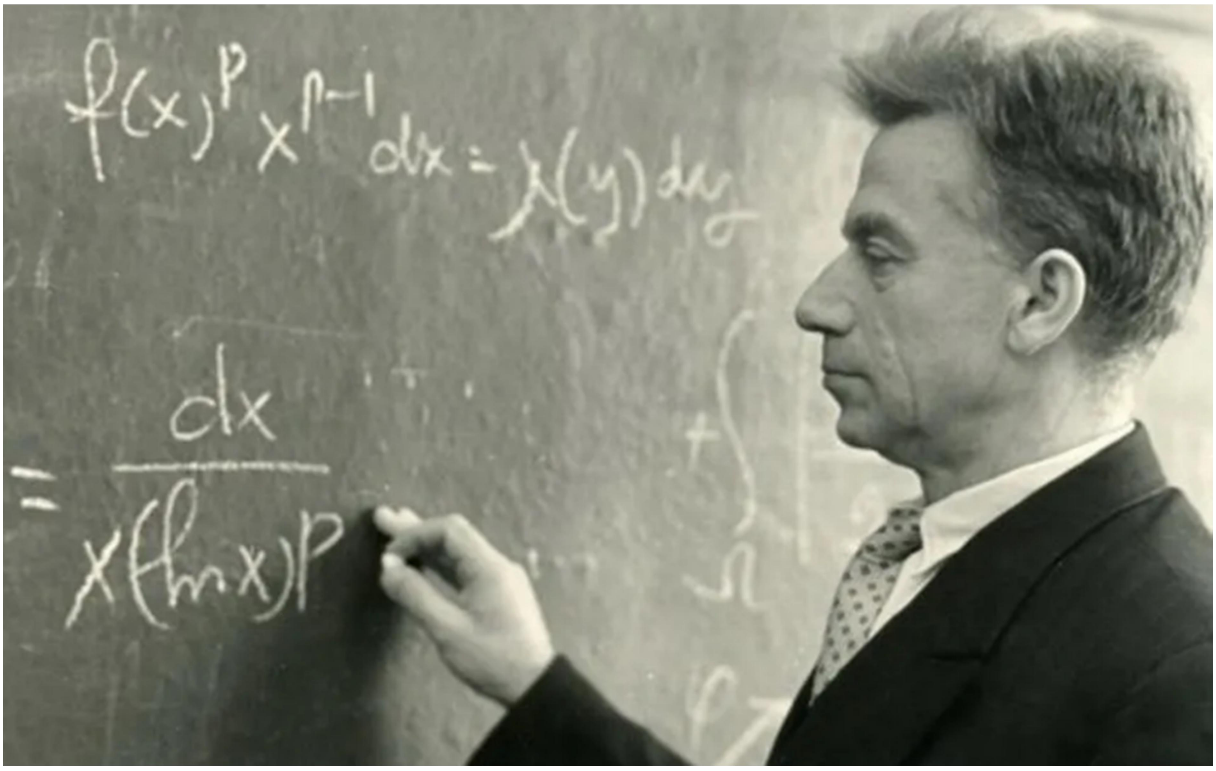
مراجع

[1] Dirac, P., The physical interpretation of the quantum dynamics. Proc. Roy. Soc., A, 113 (1926), pp. 621-641.

[2] Leray, J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta. Math., 63 (1934), pp. 193-248.

[3] Lützen, J., The prehistory of the theory of distributions. Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] Schwartz, L., Généralisation de la notion de fonction de dérivation de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., 21 (1946), pp. 57-74.



سيرجي سوبولاف Sergey Sobolev (1908-1989)