

مشكلات الإنشاء في الهندسة: منهجية التحليل والتركيب

محمد شطيح

أستاذ بقسم الرياضيات، مخبر تعليمية العلوم، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة، الجزائر

mohamed.chetitah@g.ens-kouba.dz

قال ابن خلدون في مقدمته: "واعلم أن الهندسة تفيد صاحبها إضاءة في عقله واستقامة في فكره، لأن براهينها كلها بينة الانتظام جلية الترتيب، لا يكاد الغلط يدخل أقيستها لترتيبها وانتظامها، فيبعد الفكر بممارستها عن الخطأ وينشأ لصاحبها عقل على ذلك المهيح. وكان شيوخنا رحمهم الله يقولون: ممارسة علم الهندسة للفكر، بمثابة الصابون للثوب الذي يغسل منه الأقدار وينقيه من الأوضار والأدران. وإنما ذلك لما أشرنا إليه من ترتيبه وانتظامه." [1]

مقدمة

إن المتابع للإصلاحات المتعاقبة التي عرفتها المنظومة التربوية الجزائرية -منذ الاستقلال إلى اليوم- وما ترتب عنها من تغييرات مسّت برامج الرياضيات في كل المستويات التعليمية، له أن يلاحظ التغييرات الجذرية التي لحقت ببرامج الهندسة من حيث المحتوى الذي أُفرغ تدريجياً من كثير من الموارد المعرفية (قوة نقطة بالنسبة لدائرة، التعاكس، المحل الهندسي، إلخ)؛ وكذلك توسّع الهندسة التحليلية على حساب الهندسة الإقليدية. وبعد أن كانت مسائل الإنشاء والمحل الهندسي بمثابة الخبز اليومي للتلاميذ سواء على المستوى الثانوي أو المتوسط، اختصرت هذه المسائل في تمارين روتينية تعالج في مناسبات قليلة مع استعمال مفاهيم معروفة ارتبطت بها. إضافة إلى اختصارها على خوارزميات إنشاء لا تكاد تخرج عن طابعها الإدراكي (باستخدام الحواس) والأداتي (باستخدام المسطرة والمدور) إلى طابعها الاستنتاجي (التجريد والبرهان) [2].

ويستمر تهميش مشكلات الإنشاءات والمحل الهندسي، ومن ورائها الهندسة الإقليدية، في التخصصات الرياضية على المستوى الجامعي. في أحسن أحوالها، تلبس الهندسة ثوباً تحليلياً وجبرياً وتفاضلياً. إلا أنّ هذا يبقى دون التطلعات، فالطالب وهو في نهاية تكوينه، يجد صعوبة في معالجة المشكلات الهندسية، خاصة المتعلقة منها بالإنشاء والمحل الهندسي. قد يُعزى ذلك إلى فقر علبه أدواته المعرفية (التحكم في المفاهيم الهندسية) والمنهجية (امتلاك مهارة حل المشكلات). وبالرغم من المآخذ على محتوى الهندسة في البرامج التعليمية، إلا أنّ المناهج الجديدة للرياضيات (2003، 2016 في التعليم المتوسط) تراهن على الأنشطة الهندسية لتحقيق الغايات المسطرة لتدريس الرياضيات في هذه المرحلة، وتوليها أولوية كبيرة في تنصيب مختلف الكفاءات.

1. من الهندسة الإدراكية والأداتية إلى الهندسة الاستنتاجية: من الرسم إلى الشكل

تأخذ كل الأنشطة الهندسية المنجزة في التعليم الابتدائي (المتعلقة بالوصف وإنجاز مثيرات الأشكال والصنع) بعين الاعتبار النمو النفسي المعرفي للتلميذ. في مرحلة التعليم الابتدائي، يدرك التلميذ الأشكال بصفة إجمالية ولا يرى أولوية للخواص والارتباطات بينها في شكل استنتاجي.

لا يقتصر تعلّم الهندسة في مرحلة التعليم المتوسط على تطوير البعد الإدراكي لدى التلميذ والاستعمال الوجيه للأدوات الهندسية فحسب، بل يتعداها إلى الشروع في تعلّم هندسة استنتاجية تعتمد على التعاريف والخواص. يتأتى هذا بتمديد العمل على الاستدلال وتعلّم البرهان. وعلى هذا الأساس ينبغي أن يكمل الإدراك الإجمالي للأشكال عن طريق

الملاحظة بتمييزها بالخواص وذلك من بداية التعليم المتوسط، ليكون الانتقال بالتلميذ تدريجياً من هندسة ملاحظة و/أو أداتية إلى هندسة استنتاجية. وحتى نضمن ذلك يجب أن يدرك التلميذ حدود الملاحظة أو الأداة وهذا بالعمل، طوال فترة تدمرسه، على جعله يطرح إشكالية صحة النتائج التي يتحصل عليها عن طريق الملاحظة أو استعمال الأداة، ويعني أنّ هذا لا يسمح له باستخلاص حقائق، ولكن قد يساعده على وضع تخمينات وتأكيداتها فيما بعد باستعمال معطيات ومعارف مؤسسة. وعليه ينبغي اقتراح أنشطة على التلميذ تسمح له بإدراك محدودية القياس لأجل الاستنتاج والإحساس بضرورة البرهان [4].

تعتبر التمثيلات ضرورية في ممارسة الهندسة وتعلّمها، بالرغم من أنّ الرياضيات الحديثة في ستينات القرن الماضي أرادت إقصاءها من التعليم. تسمح التمثيلات باستعمال الجانب الإدراكي من خلال توظيف الحواس، فهي تساعد على التجريب والملاحظة وتوليد تخمينات والتحقق من صحتها تجريبياً. لكن، يمكن أن يكون التمثيل مهماً، والمعارف المشاهدة ليست بالضرورة كائنات هندسية، ما يولد تفسيرات خاطئة. لهذا، فإن التمييز بين الرسم والشكل مهم جداً. يتألف الشكل من مجموعة الأزواج المركبة من: مدلول، وهو المرجع النظري؛ ودال، وهو الرسم.

(دال، مدلول) = الشكل = (رسم، مرجع).

إنّ الرسم شيء مادي على حامل (ورقة مثلاً) دال على مرجع نظري (شيء من نظرية هندسية، كالهندسة الإقليدية). ينتهي الرسم إلى مجموعة الرسومات الممكنة للمرجع. إذن الشكل هو شيء نظري معرف بنص يصفه، شيء تخيلي، فكرة. في حين أنّ الرسم ما هو إلا توضيح للشكل [5] [3].

يتأثر تفسير شكل ما بعدة متغيرات، كالمعارف الرياضية للتلميذ (صحيحة، خاطئة، غير مكتملة، إلخ)؛ وكطبيعة الرسم وطريقة تقديمه، وهو ما يخلق الغموض وصعوبات التفسير. لا يتم الانفصال عن الرسم للوصول إلى الشكل بطريقة طبيعية، وتواجه هذا الانتقال صعوبات كثيرة. على التلميذ أن يتعلم التمييز بين الخصائص النظرية للشكل التي يمكن قراءتها من الرسم من جهة، وتلك التي هي خصائص في الرسم لا يمكن اعتبارها كمعطيات. لا يوظف التلاميذ الأشكال كأداة للتقصي أثناء مراحل البحث، يرجع هذا إلى النظرة البسيطة للشكل التي قد تقصي النظرة الرياضية عليه. يواجه التلاميذ صعوبتين تحول دون فهمهم للشكل الهندسي وتمييزه عن الرسم [6]:

- **النظرة الأولى على الرسم:** عدم القدرة على الانفصال عن النماذج والخصائص المشاهدة من أول نظرة. يقدر التلميذ أن الشكل يتوفر على معطيات بديهية كافية بذاتها ولا تتطلب برهاناً.
- **عدم القدرة على تمييز عناصر الحل الممكنة للمشكلة المطروحة:** يعني هذا أنّ التلميذ يركز اهتمامه على بعض أجزاء الشكل بدلاً من أخرى، أو أنه لا يفكر في إثراء الشكل بعناصر جديدة. لكن توجد عدة متغيرات في الشكل تجعل اختيار التلميذ يبدو عشوائياً، ويكون هذا الاختيار مفروضاً مسبقاً عندما يكون الحل معروفاً.
- أعطى المنهاج ووثيقته المرافقة أهمية بالغة للرسم والشكل كأدوات وكمواضيع لدراسة الهندسة في مرحلة التعليم المتوسط. وأكدت الوثيقتان أنه ينبغي تمكين التلميذ، منذ بداية التعليم المتوسط، من التمييز بين الرسم والإنشاء، وجعله يدرك المنتظر من عمله أمام كل مهمة منهما؛ باعتبار أن الرسم مهمة لإنجاز تقني لرسم أو شكل، أما الإنشاء فهو مهمة لإنجاز شكل. نقرأ في الوثيقة المرافقة التعريف الذي قدّم لمهمني الرسم والإنشاء [4]:
- الرسم مهمة أداتية بحتة، تتمثل في إنجاز شكل باليد الحرة أو الأدوات، وأياً كانت الإجراءات المستعملة فإن تبريرها غير مطلوب، المهم هو الحصول على شكل صحيح يحقق الشروط، وفي الرسم قد يلجأ التلميذ إلى المحاولة والتعديل.
- الإنشاء هو إنجاز شكل يحقق شروطاً معينة، وفق إجراءات مبنية على خواص الشكل المطلوب والشروط، بحيث يكون شرح الإجراءات المستعملة وتبريرها بنفس أهمية الشكل الناتج، وهي مهمة تجري في مرحلتين، أولاهما مرحلة

التحليل التي عادة ما تكون على شكل منجز باليد الحرة، وعلى هذا الشكل يتم البحث والتعرف على الشروط المتعلقة بخواصه واللازمة لإنجازه. عندما تحدّد هذه الشروط تأتي مرحلة التركيب وإنجاز الشكل المطلوب. في نفس السياق، تولى الوثيقتان أهمية كبيرة لحل مشكلات الإنشاء، كون التلاميذ سيدركون أهمية مرحلة التحليل. ويتمثل نشاطهم فيها في:

- تكوين صورة ذهنية للشكل المطلوب، ورسمه باليد الحرة؛
- استعمال التشفير المناسب؛
- التعرف على خواص الشكل، وتحديد الوجبة منها؛
- تحديد إجراءات التركيب المناسبة.

2. منهجية التحليل والتركيب

يُحكى أنّ بطليموس الأول سأل أقليدس ما إذا كانت هنالك أية كيفية لدراسة الهندسة أقصر من تلك الواردة في كتاب الأصول. فكان الجواب أنه لا توجد طريقة ملكية نحو الهندسة. ولا شك أن هذا يتعدى إلى المشكلات الرياضية عامة [7]. بالإضافة إلى إنفاق وقت غير يسير في المحاولة الجادة والمستمرة في حل المشكلات، فإنّ التصرف بكياسة أمام مسائل الإنشاء الهندسي يتطلب معرفة ببعض المصطلحات الأساسية والإنشاءات القاعدية، وتطبيق استراتيجيات حل واضحة المعالم تساعد على حشد مختلف الموارد المعرفية والمنهجية للوصول إلى المطلوب. يجد التلاميذ والطلبة صعوبات كثيرة لحل مشكلات الإنشاء. في محاولاتهم الأولى، يطبقون جملة من الإجراءات التي تتصف بغياب منهجية حل واضحة، إضافة إلى عدم تحكمهم في كثير من الإنشاءات القاعدية الضرورية وعدم امتلاكهم للموارد المعرفية الهندسية اللازمة. من خلال معالجة المشكل 1، استخدمنا منهجية التحليل والتركيب لمعالجة مشكلات الإنشاء، وبيّنا مدى أهميتها وكذلك مختلف الصعوبات التي تواجه المتعلمين أثناء تطبيقها.

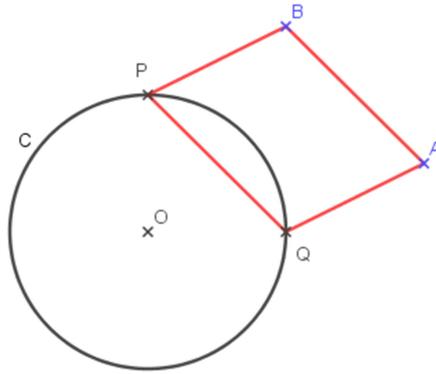
المشكل 1. لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوي، ولتكن $C(O, r)$ دائرة مركزها O ونصف قطرها r . أنشئ متوازي الأضلاع $ABPQ$ بحيث تكون النقطتان P و Q من الدائرة C .

1.2. فهم المشكل

يؤول حل مشكل إنشاء إلى إنشاء نقطة أو أكثر. كما تساعد إعادة صياغة المشكل في تحديد النقط المراد إنشاؤها بدقة. لإنشاء متوازي أضلاع، يكفي تحديد ثلاثة رؤوس منه، وعليه فإن إنشاء متوازي الأضلاع $ABPQ$ وفق الشرط المحدد، يؤول إلى إنشاء النقطة Q (أو P) من الدائرة C والتي تؤدي حتما إلى انتماء النقطة P (أو Q) إلى الدائرة عند إنشاء متوازي الأضلاع. كذلك، فإن إنشاء النقطة Q (أو P) يؤول إلى إنشاء مستقيم أو دائرة نسميه E (المعطى الجديد) يشمل Q (أو P). نختار فيما يأتي من الحل، العمل على إنشاء النقطة Q .
أمام مشكل إنشاء، غالباً ما نستخدم منهجية التحليل والتركيب، وهي منهجية مكونة من ثلاث مراحل: التحليل والتركيب والمناقشة. شرحنا هذه المنهجية من خلال مختلف مراحل حل المشكل 1. كما حددنا الصعوبة التي تواجه المتعلم أثناء تطبيقه لهذه المنهجية.

2.2. التحليل

تكون الانطلاقة من النتيجة المراد الوصول إليها، ويتم الارتقاء إلى المعطيات حيث تعوض النتيجة بقضية أو نتيجة جديدة، وهذه بأخرى ويستمر هذا الإجراء إلى أن تكون آخر قضية أو نتيجة حاصلة مباشرة من المعطيات. يكمن جوهر التحليل في اكتشاف علاقة تمكّنا من اعتبار في حكم المعطى جزءاً ما جديداً من الشكل غير وارد في المعطيات [7]. دون وجود معلومات إضافية، فإننا غالباً ما نواجه صعوبة في إنشاء E. لرفع هذه الصعوبة يمكننا المضي قدماً في التحليل للبحث عن الشرط اللازم (انتماء Q إلى E) الذي يحققه الكائن المطلوب إنشاؤه. ننشئ الشكل في حالته النهائية بافتراض أن كل الشروط محققة، ونحاول تحويل هذه الشروط إلى شروط أخرى محققة حتماً إذا كانت الشروط الأصلية محققة. ونواصل التحويل إلى أن نعثر على علاقة تمكّنا من إنشاء E انطلاقاً من معطيات المشكل فقط.

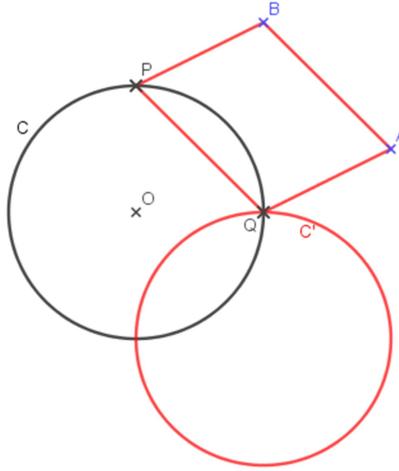


توجد الكثير من الخواص التي يمكن استخراجها، لكن ما هي التي توصلنا إلى إنشاء E؟
تكمّن صعوبة مشكلات الإنشاء في هذه المرحلة من التحليل، وهذا هو السبب الأساسي لاستخدام طريقة التخلي عن القيد لتجاوز هذه الصعوبة كما سنبين لاحقاً.
بما أنّ الرباعي ABPQ متوازي أضلاع فإن $|\overline{PQ}| = |\overline{BA}|$ ، وعليه تكون النقطة Q صورة النقطة P بالانسحاب الذي شعاعه \overline{BA} . بما أن P تنتمي إلى الدائرة C فإن Q تنتمي إلى الدائرة C' (O', r) صورة الدائرة C بنفس الانسحاب. C' هو المعطى الجديد E والذي يمكن إنشاؤه انطلاقاً من معطيات المشكل فقط. ننهي هنا من مرحلة التحليل وندخل في مرحلة التركيب.

3.2. التركيب

تتكون مرحلة التركيب من جزئين:
أ- الإنشاء: وهو صياغة خوارزمية الإنشاء انطلاقاً من معطيات المشكل والمعطى E الناتج عن التحليل. ننشئ معطيات المشكل، ثم ننشئ الدائرة C' صورة الدائرة C بالانسحاب الذي شعاعه \overline{BA} ونسوي Q نقطة تقاطع الدائرتين C و C' ثم ننشئ متوازي الأضلاع ABPQ.
ب- الإثبات: نثبت أن الشكل الناتج يحقق كل المعطيات، نلاحظ من خلال الشكل المنشأ، أن النقطة P تنتمي إلى الدائرة C، لكن يجب إثبات ذلك. للإثبات يكفي الرجوع إلى مرحلة التحليل وإعادة صياغة البرهان لكن بترتيب عكسي.

بما أن الرباعي $ABPQ$ متوازي أضلاع فإن $|\overline{QP}| = |\overline{AB}|$ ، وعليه تكون النقطة P صورة النقطة Q بالانسحاب الذي شعاعه \overline{AB} (الانسحاب العكسي للانسحاب المستخدم في مرحلة التحليل). بما أن Q تنتمي إلى الدائرة C' فإن P تنتمي إلى الدائرة C صورة الدائرة C' بنفس الانسحاب.



4.2. المناقشة

ندرس خلال هذه المرحلة وجود وعدد الحلول تبعًا للقيود الذي نضعه على المعطيات. تخصص مرحلة المناقشة لدراسة وجود وعدد متوازيات الأضلاع التي يمكن إنشاؤها تبعًا للشروط التي نضعها على معطيات المشكل. يؤول ذلك إلى دراسة الحالات النسبية للدائرتين C و C' من خلال تحديد عدد نقط تقاطعهما. يمكن أن نميز ثلاث حالات كما هو مبين في الجدول، وتبقى حالة أخيرة شاذة تتعلق بوجود النقط الأربعة على استقامية.

القيود على المعطيات	$AB > r$	$AB = 2r$	$0 < AB < 2r$
عدد متوازيات الأضلاع الممكن إنشاؤها	لا يمكن الإنشاء	1	2

خاتمة

عند معالجة مشكلات الإنشاء الهندسي في القسم (أو في كتاب)، غالبًا ما لا تظهر مرحلة التحليل، ويكتفى بمرحلي التركيب والمناقشة، ويظهر المعطى الجديد E (الناتج عن مرحلة التحليل) ويستخدم في الإنشاء مباشرة. يؤدي ذلك إلى حيرة التلميذ (أو القارئ) لهذا الظهور المفاجئ لهذا الكائن الجديد وتبادر إلى ذهنه الكثير من التساؤلات: من أين جاء؟ كيف حصلنا عليه؟ لماذا نستخدمه وهو غير موجود في المعطيات؟ كيف أتصرف مع مشكلات مشابهة؟ يمكن تشبيه نشاط حل مشكل إنشائي بالجبل الجليدي الذي يظهر جزء منه فوق السطح، في حين يبقى الجزء الأكبر مغمورًا تحت الماء. لهذا، فإن عرض نص حل مباشرة يخفي أهم فترة من معالجة المشكل وهي فترة البحث والتقصي. لا شك أن تطبيق منهجية التحليل والتركيب (خاصة في مراحل التعليم الأولى) في حل مشكلات الإنشاء يخلق صعوبة (بالخصوص في مرحلة التحليل) للتلميذ والأستاذ، هذا لتعلمه وذاك لتعليمه. إلا أن هذا لا يبرر تقديم الحلول الجاهزة للمتعلّم ولا يعتبر سببًا وجيهًا لإبعاد هذا النوع من المشكلات عن القسم، والاكتفاء بتعليم خوارزميات الإنشاء فقط.

ننشر في العدد القادم من مجلة البشائر مقالًا نعرض فيه منهجية التحليل والتركيب من زاوية أخرى، من خلال تقديم طريقة التخلي عن القيد التي تتضمن إجراءات بحث وتقصي من شأنها أن تساعد على إيجاد مؤشرات دالة على

الخواص المفتاحية ذات الصلة بالإنشاء، والتي نعتقد بأنها تمكّن من تجاوز الصعوبات الكامنة في مرحلة التحليل التي أشرنا إليها سابقا.

المراجع

- [1] ابن خلدون، مقدمة ابن خلدون، دار الأرقم بن أبي الأرقم، بيروت، 2001.
- [2] شطيح، م.، قاشي، م.، بوبكر، ز.، بولبداوي، أ.، من مشكلات الإنشاء إلى مشكلات المحل الهندسي: استخدام طريقة التخلي عن قيد في وسط رقي، المربي، المجلة الجزائرية للتربية، العدد 28، 2022، 23-30.
- [3] عتيق، ي، وآخرون، التكوين الخاص بأساتذة المدرسة الأساسية لطور الثالث في إطار الجهاز المؤقت، وحدة الإنشاءات الهندسية، وزارة التربية الوطنية، الجزائر، 2000.
- [4] اللجنة الوطنية للمناهج، الوثيقة المرافقة لمنهاج مادة الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط، الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية، وزارة التربية الوطنية، الجزائر، 2016.
- [5] Capponi, B., De la géométrie de traitement aux constructions dans Cabri-Géomètre II au collège, Repères-IREM, 40, 2000, 11-42.
- [6] Duval, R., Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, Repères-IREM, 17, 1994, 121-138.
- [7] Laborde C., et Capponi, B., Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, Recherche en Didactique des Mathématiques, 14(1.2), 1994, 165-210.

