شريط موبيوس

حمزة خليف
أستاذ الرياضيات، متقاعد
hkhelif@gmail.com

يستعمل النصّ الحروف العربية الإضافية الآتية في كتابة بعض أسماء العَلَم الأعجمية:

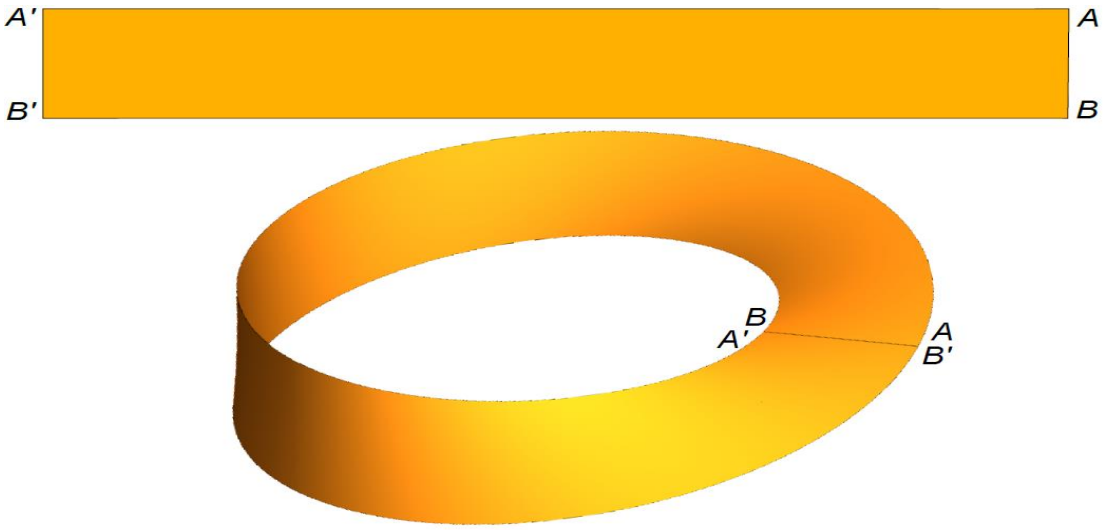
پ(p)، ڤ (g)، ڥ (v)، ٻ (é، è، e، ...)، ۆ (e، eu، œ)، و(o)، وُ(ou).

يقدّم المقال لمحة مختصرة على شريط موبيوس وهو أوّل سطح أحاديّ الجانب عرفه الإنسان. لم يتمّ وصف خصائص السطوح أحادية الجانب حتّى منتصف القرن التاسع عشر. من ذلك الحين استمرّت شعبية هذا السطح وتطبيقاته في النموّ وأصبح جزءًا لا يتجزأ من الرياضيات والهندسة والعلوم والفنّ والموسيقى والسحر.

1. شريط موبيوس

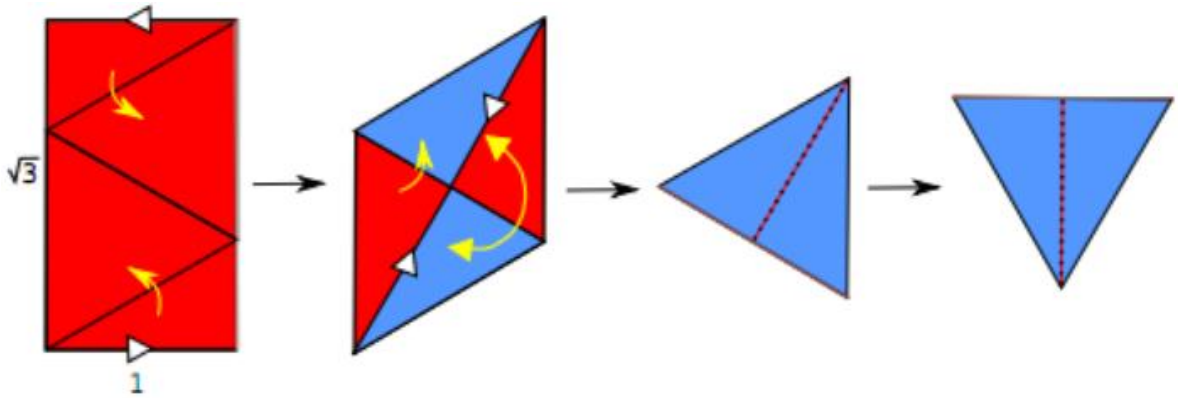
شريط موبيوس (أو عصابة موبيوس) هو سطح بجانب واحد وبحدّ واحد، يمكن بسهولة صناعة نموذج له عن طريق قصّ ورقة على شكل شريط، نُدير أحد طرفي هذا الشريط نصف دورة أيْ 180درجة، ثم نُلصق هذا الطرف بالآخر لنحصل على شريط بوجه واحد (الشكل 1).

في الحقيقة يكون لدينا في الفضاء الإقليديّ نوعان من شريط موبيوس اعتمادًا على اتجاه نصف الدورة: إما في اتجاه حركة عقارب الساعة، أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.



الشكل 1

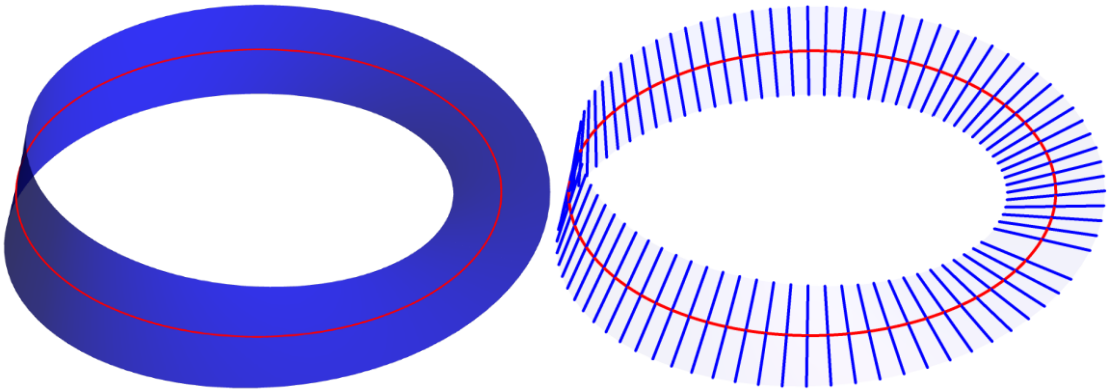
تمّ مؤخّرا (المرجع 7) إثبات أنّه لكي يحصل المرء على شريط لموبيوس خالٍ من الطيّات يجب أن تكون نسبة طول الشريط إلى عُرضه أكبر من $\sqrt{3}$. يُدعى شريط موبيوس الناتج من شريط نسبة طوله إلى عرضه $\sqrt{3}$ شريط موبيوس المثلّثيّ لأنّ منظره العلويّ مثلّث متقايس الأضلاع (الشكل 2).



الشكل 2 (أحد جانبَيْ المستطيل الورقيّ أحمر والآخر أزرق)

يُعزى اكتشاف شريط موبيوس بشكل مستقلّ إلى الرياضياتيَيْن الألمانيَيْن أوغست فيرديناند موبيوس، وجون بينديكت ليستينغ عام 1858، مع العلم أنّه ظهر قبل ذلك في حقب مختلفة من التاريخ.

يمكن توليد شريط موبيوس بقطعة مستقيمٍ مركزها يمسح دائرة (طوبولوجية) ثابتة وتخضع لدوران منتظم قياسه 180 درجة حول مركزها (الشكل 3).



الشكل 3

يتمثّل ذلك رياضياتيا في الخطوات الآتية.

نأخذ في الفضاء ثلاثيّ البعد المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس، نرمز إليه تجاوزا بـ $Oxyz$، قطعة المستقيم والدائرة المعرّفتين على التتابع بالتوسيطين

$$s \mapsto (s,0,0), -b \le s \le b \quad \text{و} \quad t \mapsto (r\cos t, r\sin t, 0), 0 \le t < 2\pi.$$

نجري على القطعة الدوران الذي قياسه $0.5t$ حول المحور Oy وهو معرّف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos 0.5t & 0 & -\sin 0.5t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 0.5t & 0 & \cos 0.5t \end{pmatrix}$$

فنحصل على التوسيط

$$(s,t) \mapsto (s\cos 0.5t, 0, s\sin 0.5t).$$

نجري على هذا التوسيط السحْب (أو الانسحاب) المعرّف بالمصفوفة العمودية

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لينتج التوسيط

$$(s,t)\mapsto\left(r+s\cos 0.5t, 0, s\sin 0.5t\right).$$

نجري أخيرا على التوسيط الناتج هذا، الدوران الذي قياسه t حول المحور Oz والمعرّف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فنحصل على التوسيط الآتي لشريط موبيوس

$$(s,t)\mapsto\left(\left(r+s\cos 0.5t\right)\cos t, \left(r+s\cos 0.5t\right)\sin t, s\sin 0.5t\right),\ |s|\le b, 0\le t<2\pi.$$

والذي يأتي من تركيب التحويلات السابقة

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos 0.5t & 0 & -\sin 0.5t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 0.5t & 0 & \cos 0.5t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

الغرض من اختيار $0.5t$ لقياس الدوران حول المحور Oy هو أنّ القطعة المولِّدة يجب أن تُجريَ نصف دورة فقط حول مركزها مقابل دورة كاملة على الدائرة الموجّهة.

في المقابل، إذا كان لدينا توسيط من هذا الشكل فإنّ المنحنيات $t=t_0$ مع بقاء الوسيط s ثابتا هي بالفعل قطع مستقيمٍ تربط بسرعة منتظمة النقطتين $(t_0, -b)$ و (t_0, b). طول هذه القطع هنا هو إذن $2b$.

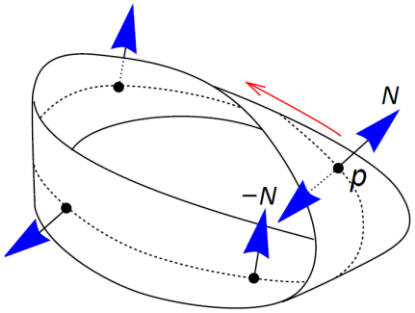
المنحني المتعلّق بـ $s=0$ دائرة قطرها $2r$ في المستوي ذي المعادلة $z=0$، وهي تمثّل مسار مركز القطع.

دون الإضرار بالعمومية، يمكننا أن نفترض أنّ $b=1$. الإنشاء عن طريق إلصاق شريط بعدَ ليّه نصف دورة يتلخّص في القول إنّ شريط موبيوس هو "طارة تطبيق" المستشاكل

$$[-1,1]\to[-1,1],\ x\mapsto -x,$$

أيْ أنّ شريط موبيوس هو حاصل قسمة الجُداء $[-1,1]\times[0,1]$ وفق علاقة التكافؤ $(x,1)\sim(-x,0)$. فشريط موبيوس هو إذن مليَّف قاعدته دائرة وليفته قطعة مستقيم وهو محلّيا جُداء دائرة وقطعة، ولكن ليس شموليا مثل الأسطوانة.

شريط موبيوس غير قابل للتوجيه (الشكل 4) بمعنى أنّه إذا أخذنا شعاعا متعامدا N على السطح في نقطة p وحرّكناه باستمرار حول السطح حتّى يعود إلى p ، فسيأخذ الاتجاه $-N$. بمعنىً آخر، سيعود السهم المنحني الذي يشير إلى اتجاه حركة عقارب الساعة (↻) كسهم يشير إلى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة (↺)، أيْ أنّه داخل شريط موبيوس، من المستحيل تحديد ما يعنيه أن تكون في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. وهذه هي علامة على عدم قابلية التوجيه. نشير بالمناسبة أنّ سطحا ما يكون غير قابل للتوجيه إذا وفقط إذا كان يحوي شريطا لموبيوس.



الشكل 4

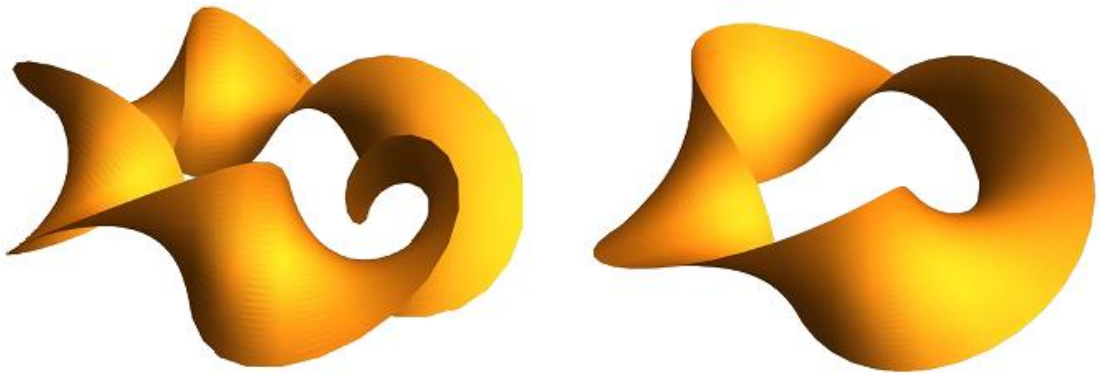
2. شريط موبيوس المتعدّد

بشكل عامّ، شريط موبيوس المتعدّد، هو السطح الذي يتمّ الحصول عليه عن طريق التدوير المنتظم لقطعة ذات طول ثابت حول دائرة بدوران نصف دورة، أو بشكل عامّ، بعدد فرديّ من أنصاف دورة ; هذه النطاقات المختلفة هي مستشاكلة، ولكنّها غير صِنوة (non isotopes) في $\mathbf{R}^3$ ، أي أنّنا لا نستطيع الانتقال بشكل مستمرّ من واحد إلى آخر، ولكلّ عدد من أنصاف دورة، هناك صنفان من الصنويّة، صوَرُ مرآة لبعضها البعض.

يعرَّف شريط موبيوس المتعدّد بالتوسيط

$$(s,t)\mapsto\left((a+s\cos 0.5\,mt)\cos t,(b+s\cos 0.5m\,t)\sin t,s\sin 0.5m\,t\right),$$

حيث m عدد صحيح فرديّ و $|s|\le b, 0\le t<2\pi$ (الشكل 5).



الشكل 5

3. شريط موبيوس الدائريّ

شريط موبيوس الدائريّ (الشكل 6) هو شريط لموبيوس حدّه دائرة (مستوية بالطبع) وهو معرّف بالتوسيط

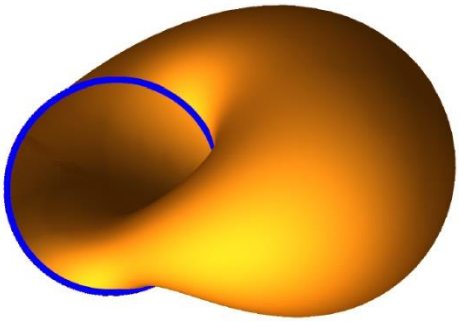
$$(s,t)\mapsto\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)$$

حيث

$$x(s,t)=\frac{-2a\sin s\cos 2t}{-2+\sqrt{2}\cos s\sin t+\sqrt{2}\sin s\sin 2t}$$

$$y(s,t)=\frac{a\sqrt{2}(\cos s\sin t-\sin s\sin 2t)}{-2+\sqrt{2}\cos s\sin t+\sqrt{2}\sin s\sin 2t}$$

$$z(s,t)=\frac{-2a\cos s\cos t}{-2+\sqrt{2}\cos s\sin t+\sqrt{2}\sin s\sin 2t}.$$



الشكل 6

4. سطح موبيوس

سطح موبيوس هو سطح مسطّر غير قابل للنشر ناتج عن دوران مستقيم في مستو يدور هو الآخر حول أحد مستقيماته بسرعة زاوية تساوي ضعف سرعة المستقيم الأوّل (الشكل 7 (ا)).

يتمّ تعريفه، في الإحداثيات الديكارتية، بالتوسيط

$$(s,t)\mapsto\left(\left[a+s\cos 0.5t\right]\cos t,\left[a+s\cos 0.5t\right]\sin t,s\sin 0.5t\right),0\le t\le 2\pi,s\in\mathbf{R}.$$

يُسمّى سطحُ موبيوس بهذا الاسم لأن جزأه الذي يتمّ الحصول عليه من أجل $-b\le s\le b$ ، حيث $b\le a$ ، هو شريط موبيوس (الشكل 7 (ب)).

يمكن تعريفه أيضًا أنّه السطح المسطّر الموجّه بدائرةٍ، ومحورِ هذه الدائرة ومستقيمٍ مائل بـ 45 درجة على مستوي هذه الدائرة، مسقطه مُماسّ للدائرة.

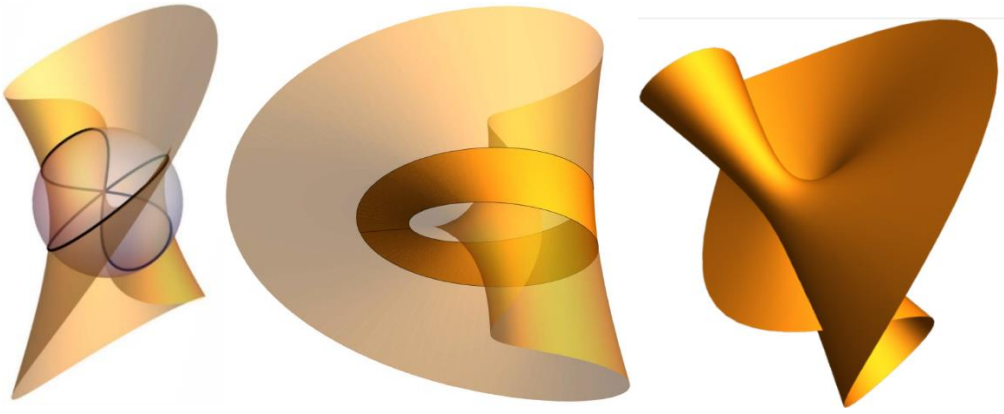
ويتمّ تعريفه ضمنيًا بالمعادلة الديكارتية

$$y^3+x^2y-2y^2z-2x^2z-2axz+yz^2-a^2y=0.$$

تقاطع هذا السطح مع الكرة التي مركزها O وشعاعها a يتكوّن من دائرة كبيرة للكرة ومن منحني فيفياني أو نافذة فيفياني (الشكل 7 (ج)) المعرّفة بالتوسيط

$$t\mapsto\left(a\cos^2 t,a\sin t\cos t,a\sin t\right),t\in[-\pi,\pi].$$

نغتنم هذه الفرصة لنذكّر أن نافذة فيفياني هذه هي في الأصل تقاطع كرة وأسطوانة مماسّة للكرة وتشمل مركزها.



(ج) (ب) (ا)

الشكل 7

5. شريط موبيوس ومسألة المنازل الثلاثة

مسألة المنازل الثلاثة

مسألة المنازل الثلاثة أو مسألة المنافع الثلاث هي مسألة من صميم نظرية البيانات يتمّ التعبير عنها بطرق شتّى، من بينها ما يأتي.

"المطلوب تزويد ثلاثة منازل بالماء والغاز والكهرباء. ولأسباب تتعلّق بالسلامة يُحظَر عبورُ الأنابيب لبعضها البعض. كيف ينبغي أن يتمّ ذلك؟"

هذه المسألة لا تقبل حلّا في المستوٍ ي ولا على الكرة، عل سبيل المثال، لكنّها تقبل حلّا على شريط موبيوس (الشكل 8) من بين سطوح أخرى كالطارة وزجاجة كلاين.

في المستوي أو على الكرة، ... حلّ على شريط موبيوس

الشكل 8

هذه المسألة كما أشرنا تتعلّق بنظرية البيانات ومفادها: "هل البيان $K_{3,3}$ مستو؟"

نذكّر أنّ كلّ بيان لا تتقاطع فيه حافّتان يُدعى بيانا مستويا.

6. العدد اللونيّ لشريط موبيوس

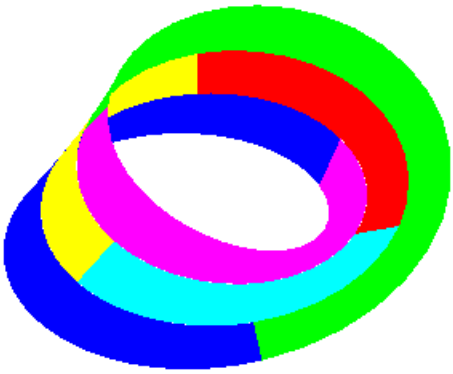
العدد اللونيّ لسطحٍ ما، يُعرّف بتعبيرات شتّى، منها :

ا) هو الحدّ الأعلى لعدد المناطق التي يمكن رسمها على السطح بحيث تكون لكلّ منطقة حدود مشتركة مع كلّ منطقة أخرى. إذا قمنا بتعيين لون مختلف لكلّ منطقة، فإنّ كلّ لون سيمسّ كلّ الألوان الأخرى.

ب) هو الحدّ الأدنى لعدد الألوان المختلفة الكافية لتلوين خريطة على سطح معيّن بحيث لا تكون منطقتان متجاورتان بنفس اللون. وهذا يعود إلى تمثيل السطح من خلال بيان وتحديد الحدّ الأدنى لعدد الألوان المختلفة الكافية لتلوين جميع الرؤوس بحيث لا يكون هناك رأسان متجاوران بنفس اللون.

بالنسبة إلى جزء مستو فإنّ أربعة ألوان كافية.

عندما نخيط شريطا لموبيوس وقرصا حافّةً إلى حافّة، نحصل على مستو إسقاطيّ حقيقيّ يمكن تغميسه في: القبّعة المتقاطعة أو السطح الرومانيّ أو سطح بُويْ. وبناء على ذلك فإنّ العدد اللونيّ لشريط موبيوس هو العدد الخاصّ بالمستوي الإسقاطيّ، وهو 6.



في هذه الخريطة المكوّنة من ستِّ مناطقَ مرسومةٍ على شريط موبيوس، تلامس كلّ منطقة المناطق الخمس الأخرى؛ 6 هو الحدّ الأقصى الممكن، ويمكن تلوين أيّ خريطة بـ 6 ألوان على الأكثر.

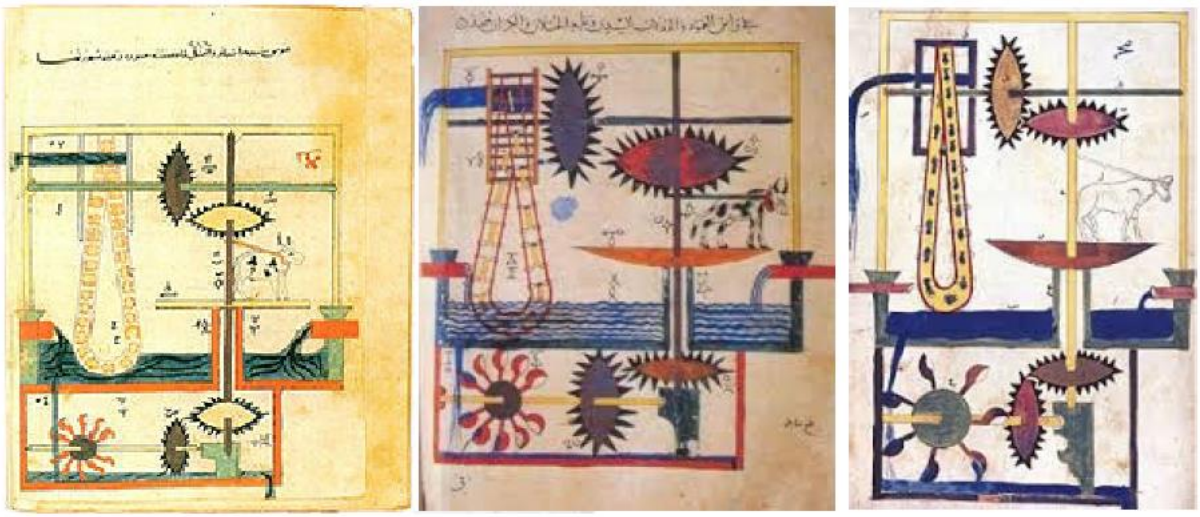
الشكل 9

7. شريط موبيوس في الصناعة والفنّ

1.7 في الصناعة

بغضّ النظر عن التقاليد الرياضياتية، عرف الميكانيكيون منذ فترة طويلة أنّ الأحزمة الميكانيكية تتآكل بنصف السرعة عندما تكون على شكل شريط موبيوس، لأنّها تستخدم سطح الحزام بالكامل بدلا من السطح الداخليّ للحزام غير الملتوي. بالإضافة إلى ذلك، قد يكون هذا الحزام أقلّ عرضة للتجعيد من جانب إلى آخر.

يعود الوصف المكتوب المبكّر لهذه التقنية إلى عام 1871، أيْ بعد المنشورات الرياضياتية الأولى المتعلّقة بشريط موبيوس. قبل ذلك بكثير، تعرضُ صورة "لمضخّة مائية" في كتاب أبي العزّ اسماعيل الجزريّ "الجامع بين العلم والعمل النافع في صناعة الحيل" من عام 1206، سلسلة القيادة الخاصة بها مصنوعة على شكل شريط موبيوس (الشكل 10).



صوَرٌ لمضخّة الجزريّ من نسخ مختلفة من كتابه.

الشكل 10

إنّ التطبيقات العمليّة لشريط موبيوس كثيرة في عالم الاختراعات. على سبيل المثال، تُستخدم شرائط موبيوس في أشرطة التسجيل ذات الحلْقة المستمرّة، وأشرطة الآلة الكاتبة، وخراطيش طباعة الحواسب.

في السنوات 1960، استخدمت مختبرات ساندیا أيضًا شرائط موبيوس في تصميم المقاومات الإلكترونية القابلة للتكيّف. تستخدم أحزمة النقل شرائط موبيوس لأنّها تسمح لمساحة سطح الحزام بأكملها بتلقّي قدر متساوٍ من التآكل، ما يجعله يدوم لفترة أطول.

تمّ تصميم شريط موبيوس أيضًا ليناسب العديد من المنتجات الفنّية والثقافية. أظهرت لوحاتٌ عديدةٌ أشكالا شتّى من شرائط موبيوس، وكذلك فعلت أقراط وقلائد وقطع مجوهرات أخرى.

نجد شريط موبيوس في العلامة العالمية ذات الأسهم الثلاثة الخضراء لإعادة التدوير منذ يوم الأرض الأول في عام 1970. ليس التدوير مجرّد عمل دائريّ؛ إنّه ديناميكية. يسعى الرمز إلى تمثيل الجوانب الثلاثة المترابطة للحلْقة المستدامة: جمع المواد التي سيتمّ إعادة تدويرها، وتصنيع المواد المعاد تدويرها إلى منتجات جديدة، وشراء المنتجات المصنوعة من المواد المعاد تدويرها واستخدامها. ينثني كل سهم ويدور حول نفسه، بينما تلاحق الأسهم الثلاثة بعضها البعض وتدعم بعضها البعض (الشكل 11).

الشكل 11

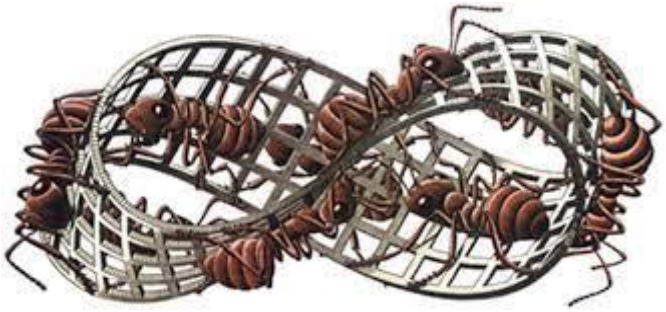
2.7 في الهندسة المعمارية

كانت شرائط موبيوس مصدر إلهام متكرّر للتصميم المعماريّ للمباني والجسور. ومع ذلك، فإنّ العديد منها كان مجرّد مشاريعَ وتصميماتٍ ولم يكن كائنات مبنية. ومن الأمثلة على ذلك مكتبة كازاخستان الوطنية، التي تم التخطيط لمبناها على شكل شريط موبيوس سميك ولكن تمّت إعادة صقله بتصميم مختلف بعد انسحاب المهندسين المعماريّين الأصليّين من المشروع. أحد المباني البارزة التي تضمّ شريط موبيوس هو قاعة مشاهير ناسكار، (الشكل 12) والتي يحيط بها شريطٌ ملتوٍ كبيرٌ من الفولاذ المقاوم للصدأ يعمل كواجهة ومظلّة، ويستحضر الأشكال المنحنية لمسارات السباق.

الشكل 12

3.7 في الفنّ

تخيّلوا نملة في مغامرة (الشكل 13). تصوّروا الحشرة وهي تعبر شريط موبيوس. حلقة واحدة واضحة من شأنها أن تهبط النملة ليس من حيث بدأت ولكن رأسًا على عقب، فقط في منتصف الطريق خلال دائرة كاملة. وبعد حلقتين، تعود النملة إلى البداية.

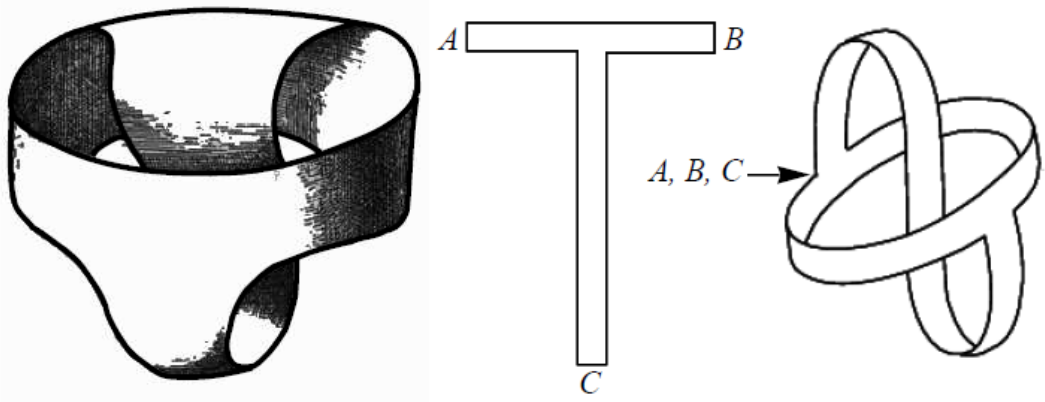


الشكل 13

شريط موبيوس للفنّان الرسّام موريتس كورنيليس إيشر

4.7 سروال موبيوسيّ

من بين الأشياء الطريفة ذات الصلة بشريط موبيوس هذا السروال القصير الموبيوسيّ (الشكل 14) : جانب واحد وحافّة واحدة.



الشكل 14

8. بعضٌ من خواصّ شريط موبيوس

- شريط موبيوس سطح أحاديّ الجانب.
- هو سطح غير قابل للتوجيه.
- مصنِّف هذا السطح (أو جنسه) يساوي 1 وهو نفسه مصنّف الفضاء الإسقاطيّ.
- مميّز أويلر- پوانكاري لشريط موبيوس يساوي 0.

يمكن تحويل شريط موبيوس باستمرار إلى منحنيه الأوسط بجعل الوسيط s يؤول إلى 0، وهذا يعني أنّ لشريط موبيوس العديدَ من الخواصّ التي يتمتّع بها منحني الوسط، والذي يعتبر دائرة طوپولوجيًا. من بين هذه الخواصّ نذكر أنّ زمرته الأساسية هي نفس الزمرة الأساسية للدائرة، وهي زمرة دورية غير منتهية. ولذلك، فإنّ المسارات على شريط موبيوس

تبدأ وتنتهي في نفس النقطة يمكن تمييزها طوبولوجيًا (بترادف مقرّب) فقط من خلال عدد المرّات التي تدورها حول الشريط.

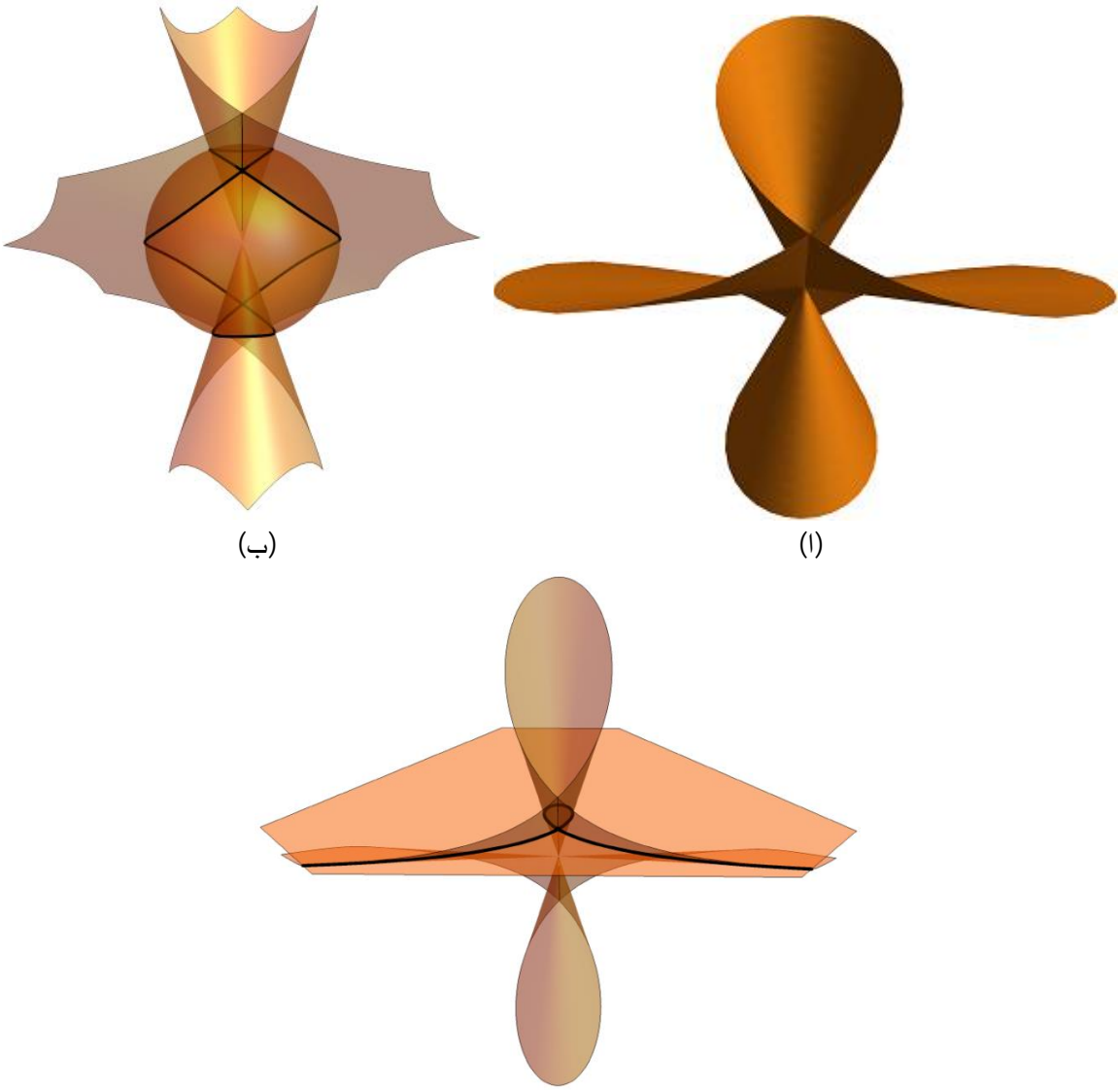
إذا "فجّرنا داخليا" الدائرة المركزية، "قلبَ" شريط موبيوس (أي ما سمّيناه المنحني الأوسط) بجعل العدد r يؤول إلى 0، فإنّنا نحصل على مخروط (الشكل 15 (ا)) تقاطعه مع كرةٍ هو منحنٍ مغلق ذو نقطتين مضاعفتين (الشكل 15 (ب)) وتقاطعه مع مستوٍ هو وُرَيْقة ديكارت (الشكل 15 (ج)) المعرّفة بالمعادلة

$$x^3+y^3-3xy=0$$

بحيث يمكن أن تكون معادلة المخروط

$$x^3+y^3-3xyz=0.$$

(المرجع 4، الصفحة 1888)



(ب) (ا)

(ج)

الشكل 15

9. شريط موبيوس الجبري

نفرّق في هذه الفقرة بين "شريط موبيوس" وهو سطح غير متراصّ، بغير حدّ (أو حافّة) وغير قابل للتغميس في الفضاء و"عصابة موبيوس" التي من جهتها هي سطح متراصّ، ذو حدّ وقابل للتغميس في الفضاء.

نرمز بـ $\mathbf{C}$ إلى حقل الأعداد المركّبة وبـ $\mathbf{U}$ إلى المجموعة الجزئية $\{z\,,\ z\in\mathbf{C},|z|=1\}$. شريط موبيوس هو الفضاء الطوبولوجيّ الجزئيّ من $\mathbf{U}\times\mathbf{C}$ والمعرّف بـ

$$\mathbf{M}=\{(u\,,z\,),(u\,,z\,)\in\mathbf{U}\times\mathbf{C},u\overline{z}=z\,\}.$$

نذكّر أنه إذا كان v ينتمي إلى $\mathbf{U}$ فإنّ العلاقة "$v^2\overline{z}=z$" تكافئ العلاقة "$z=\mu v\,,\mu\in\mathbf{R}$"، كونها تُكتب على الشكل $\overline{(z/v\,)}=z/v$ (نذكّر أنّ عددا مركّبا يكون حقيقيا إذا وفقط إذا كان يساوي مرافقه).

ليكن الآن التطبيق المستمرّ

$$p:\mathbf{M}\to\mathbf{U},\quad(u\,,z\,)\mapsto u$$

اقتصار الإسقاط الأول $\mathbf{U}\times\mathbf{C}\to\mathbf{U}$.

من التذكير السابق يأتي أنّه بالنسبة إلى كلّ u من $\mathbf{U}$ تكون الليفة $\mathbf{M}_u=p^{-1}\langle\{u\}\rangle$ مستقيما شعاعيا $\mathbf{M}_u=\mathbf{R}v$ حيث v جذر تربيعيّ لـ u. المستقيم الشعاعيّ $\mathbf{M}_u$ هو إذن منصّف الزاوية $(1,u\,)$. وعليه فإنّ التطبيق $p:\mathbf{M}\to\mathbf{U}$ يقود إلى النظر إلى $\mathbf{M}$ كعائلة مستقيمات في المستوي موسّطةٍ بالدائرة الوَحدة وتدور بنصف سرعة الوسيط.

نشير أيضا إلى أنّ شريط موبيوس التقليديّ يُعرّف بأنه حاصل قسمة المستوي $\mathbf{R}^2$ على الزمرة $\Gamma=\langle\gamma\rangle$ المولّدة بالتطبيق

$$\gamma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$$
$$(\lambda,\,\mu)\mapsto(\lambda+1,-\mu),$$

والمتشاكلة مع الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}$. نذكّر كذلك أنّ γ هو "التناظر-الانزلاق" أيْ تركيب تبديليّ لتناظر محوريّ وسحب (أو انسحاب) شعاعه يوازي المحور.

ومن العلاقة $\gamma^2(\lambda,\,\mu)=(\lambda+2,\,\mu)$ يظهر أنّ من الطبيعيّ المرورَ أوّلا إلى حاصل القسمة على الزمرة الجزئية المولّدة بـ γ^2 كونها لا تعمل إلّا بسحب للإحداثيّ الأوّل. تعطي الدالّة الأسية مستشاكُلا

$$\mathbf{R}^2\big/\langle\gamma^2\rangle\to\mathbf{U}\times\mathbf{R}$$
$$(\lambda,\,\mu)\mapsto\left(e^{i\pi\lambda},\,\mu\right).$$

ومن العلاقة $e^{i\pi}=-1$ يأتي أنّ التناظر- الانزلاق γ يُحدث على حاصل القسمة الالتفاف (التطبيق التضامنيّ)

$$(u\,,\,\mu)\mapsto(-u\,,-\mu)$$

ويأتي من كلّ ما سبق، المستشاكل

$$\mathbf{R}^2/\Gamma\to\mathbf{M}.$$

أخيرا، للانتقال من شريط موبيوس الذي هو، كما أسلفنا، سطح غير متراصّ، بغير حدّ وغير قابل للتغميس في الفضاء إلى عصابة موبيوس التي هي سطح متراصّ، ذو حدّ وقابل للتغميس في الفضاء يمكن صنعه ومشاهدته، نستبدل المستطيل (الملآن) $[-1,1]\times[0,1]$ بالمستوي $\mathbf{R}^2$،

النقطتان الوحيدتان من هذا المستطيل واللتان يحوّلهما γ إلى نقطتين تنتميان إليه هما نقطتا الحدّ $(0,\,\mu)$ و $\gamma\big((0,\,\mu)\big)=(1,-\mu)$. وبمطابقتهما بالنسبة إلى كلّ μ من $[-1,1]$ نحصل على عصابة موبيوس.

عرّفنا الفضاء $\mathbf{M}$ كونه مجموعة نقط $\mathbf{U}\times\mathbf{C}$ الصامدة (أو الثابتة أو اللامتغيّرة) بالنسبة إلى الالتفاف

$$\sigma:\mathbf{U}\times\mathbf{C}\to\mathbf{U}\times\mathbf{C}$$
$$(u,z)\mapsto(u,u\,\bar{z}).$$

نُدخِل المُسقِط المُرفَق $q=\frac{1}{2}(\sigma+1)$ أيْ

$$(u,z)\mapsto q(u,z)=\left(u,\frac{1}{2}(u\,\bar{z}+z)\right).$$

يمكن التحقّق بسهولة من أنّ $q^2=q$ وأنّ $\mathrm{Im}q=\mathbf{M}$.

التطبيق $z\mapsto\frac{1}{2}(u\,\bar{z}+z)$ هو مُسقِط على الـ $\mathbf{R}$- فضاء الشعاعيّ $\mathbf{C}$ متعلّق بالوسيط u. بكتابة $u=x+iy$ مع التقيّد بـ $x^2+y^2=1$ ، تكون مصفوفة q هي الآتية

$$Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+x & y\\ y & 1-x\end{pmatrix}.$$

لتكن الآن الحلْقة $A=\mathbf{R}[X,Y]/\left(X^2+Y^2-1\right)\mathbf{R}[X,Y]$ التي ننظر إليها أنّها حلْقة الدوال $f:\mathbf{U}\to\mathbf{R}$ والتي تكون كثيرةَ الحدود، بمعنى أنّه يوجد $F(X,Y)$ من $\mathbf{R}[X,Y]$ بحيث لكلّ $u=x+iy$ من $\mathbf{U}$ يكون $f(u)=F(x,y)$. يجدر التذكير أنّ F معرّف بمضاعف مقرّب لـ X^2+Y^2-1 وهذا ما يدفع إلى الانتقال إلى حاصل القسمة.

نشير بـ x و y إلى صِنفَيْ X و Y ، على التتابع، في الحلْقة A ، ونعتبر Q مصفوفة ذات معاملات في A.
تُكتب مبرهنة كيلي-هاميلتون $Q^2-\mathrm{tr}(Q)Q+\det(Q)=0$ ومنها العلاقة $Q^2=Q$ ، بناء على أنّ $\mathrm{tr}(Q)=1$ و $\det(Q)=0$. تعرّف هذه المصفوفة تطبيقا A- خطيا، $Q:A^2\to A^2$. نضع

$$\mathcal{M}=\mathrm{Im}(Q)=\mathrm{Ker}(\mathrm{I}-Q)$$

حيث I هي المصفوفة الوَحدة من المرتبة 2.

المقياس $\mathcal{M}$ هذا هو المثيل الجبريّ لشريط موبيوس.

للاطّلاع على المزيد من خواصّ البنى الجبرية الواردة هنا مثل الرئيسية والعاملية والإغلاق التكامليّ، يمكن أن يعود القارئ إلى المرجع 2.

مراجع

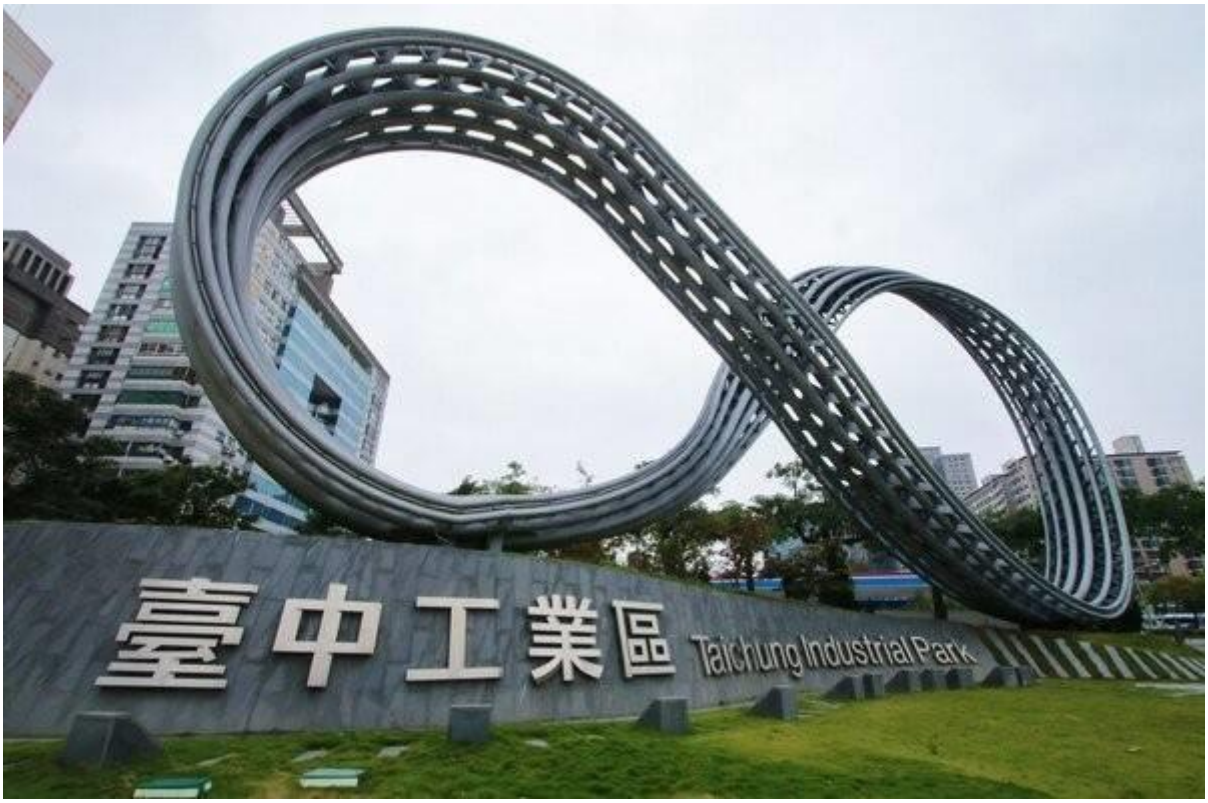
ا) شريط موبيوس ويكيپيديا

ب) ويكس، جيفري: شكل الفضاء، ترجمة حمزة خليف.

[1] Cartwright, Julyan H. E. and Gonzalez, Diego L. Möbius strips before Möbius: Topological hints in ancient representations. arXiv:1609.07779v1 [math.HO] 25 Sep 2016.

[2] Ferrand, Daniel, Le ruban de Möbius comme représentation d'un idéal non principal, mars 2005. Université de Rennes 1. Préparation à l'Agrégation de Mathématique. https://agreg-maths.univ-rennes1.fr

[3] Gray, Alfred, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Third Edition. Chapman and Hall/CRC. eBook Published 31 January 2017.
[4] Khelif, Hamza, *Le jardin des surfaces, Dictionnaire raisonné des courbes gauches, des surfaces et d'autres variétés célèbres et remarquables*, 2048 pages. KDP Amazon, 2020.
[5] Möbius, Klaus, Plato, Martin and Savitsky, Anton, The Möbius Strip Topology History, Science, and Applications in Nanotechnology, Materials, and the Arts. Jenny Stanford Publishing Pte. Ltd. 2023.
[6] Pickover, Clifford A. The Möbius Strip: Dr. August Möbius's Marvelous Band in Mathematics, Games, Literature, Art, Technology, and Cosmology. Thunder's Mouth Press. 2005.
[7] Schwartz, Richard, "The optimal paper Moebius band". ArXiv:2308.12641 [math.MG]. December 27, 2023.
[8] Weeks, Jeffrey Renwick, *The Shape of Space*, Third Edition, Taylor & Francis Group, LLC, 2020.
[9] https://mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml
[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip
[11] https://mathworld.wolfram.com/MoebiusStrip.html



شريط موبيوس ، مُجمّع تايتشونغ الصناعيّ (تايوان-الصين)