زجاجة كلاين

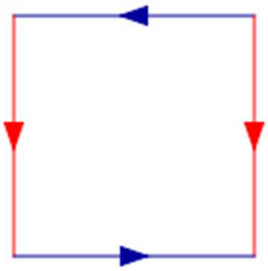
حمزة خليف
أستاذ الرياضيات، متقاعد
hkhelif@gmail.com

يستعمل النصّ الحروف العربية الإضافية الآتية في كتابة بعض أسماء العَلَم الأعجمية:
پ(p)، ڤ (g)، ڤ (v)، ب (é، è، e، ...)، ۆ (eu ،e)، و(o)، وُ(ou).

1. زجاجة كْلاين

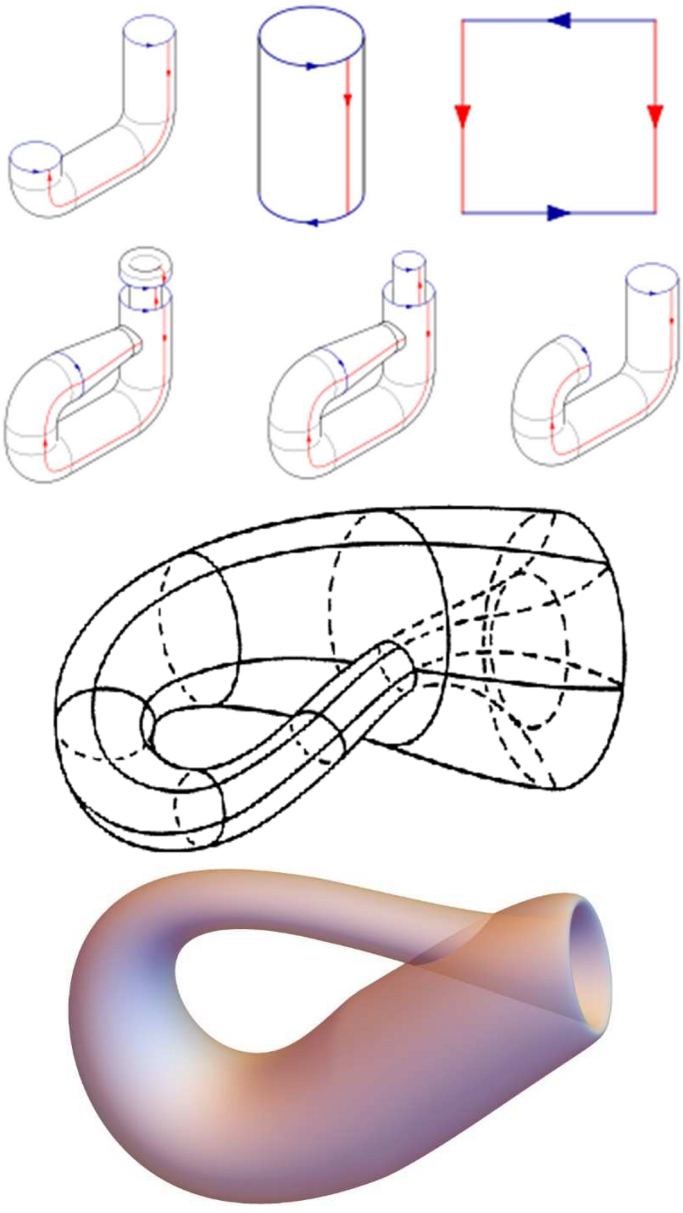
زجاجة كْلاين هي سطح مغلق بغير حافّة وغير قابل للتوجيه، أيْ أنّه سطح لا يمكن بالنسبة إليه تحديد "الداخل" و "الخارج". تمّ وصف زجاجة كلاين لأوّل مرّة في عام 1882 من قِبل عالم الرياضيات فيليكس كْلاين. ربما يكون اسمها قد جاء من الخلط أو التورية بين المصطلحين Kleinsche Fläche ("سطح كلاين") و Kleinsche Flasche ("زجاجة كلاين").
ترتبط زجاجة كلاين ارتباطا وثيقا بشريط موبيوس وبتغميسات (Immersions) المستوي الإسقاطيّ الحقيقيّ (الشكل 10).
إنّها أحد أبسط الأمثلة على المنوّعة المجرّدة، لأنّها سطح لا يمكن تمثيله بشكل صحيح في الفضاء ثلاثيّ البعد. إنها تقبل تغميسا من الصنف C^∞ في الفضاء $\mathbf{R}^3$ ولكنّها لا تمتلك تغطيسا (Embedding , Plongement) مستمرًا فيه.
لا يمكن تمثيل زجاجة كلاين في الفضاء $\mathbf{R}^3$ إلّا بقبول مرورها عبر نفسها، وعليه، لا يوجد تصوّر"دقيق" يمكن رؤيته لها. لكن، من الممكن تصوّرها دون تقاطع ذاتيّ في $\mathbf{R}^4$ ، أيْ أنّ لها تغطيسا من الصنف C^∞ في $\mathbf{R}^4$.

كما هو الحال بالنسبة إلى شريط موبيوس، فإنّ زجاجة كلاين منوّعة من البعد 2 غير قابلة للتوجيه. وعلى عكس شريط موبيوس، فهي منوّعة مغلقة، أيْ أنها متراصّة بغير حافّة. بينما يمكن تغطيس شريط موبيوس في الفضاء الإقليديّ $\mathbf{R}^3$ ، فمن غير الممكن تغطيس زجاجة كلاين فيه كما تمّت الإشارة إليه.
وهي أيضا فضاءُ حاصلِ القسمة المتمثّل في المربّع (الملآن) $[0,1]\times[0,1]$ الذي تتمّ مطابقة أضلاعه من خلال العلاقتين $(0,y)\sim(1,y)$ من أجل $y\in[0,1]$ و $(x,0)\sim(1-x,1)$ من أجل $x\in[0,1]$ (الشكل 1).



الشكل 1

لإنشاء زجاجة كلاين، يتمّ إلصاق السهمين الأحمرين للمربّع معا (على الجانبين الأيسر والأيمن، الشكل **1**)، تنتج من ذلك أسطوانة. لإلصاق طرفيْ الأسطوانة معا بحيث يتطابق السهمان الموجودان على الدائرتين، يجب تمرير أحد طرفيها عبر جانبها. وهذا التقاطع الذاتيّ دائرة. إنّه تغميس ثلاثيّ البعد لزجاجة كلاين (الشكل 2).



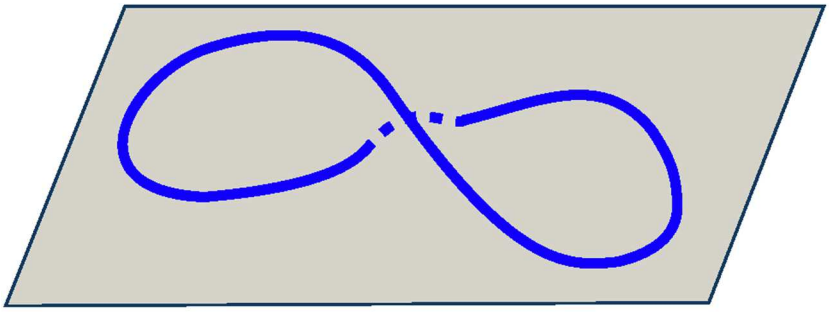
الشكل 2

زجاجة كلاين الحقيقية لا تمرّ عبر نفسها. ومع ذلك، هناك طريقة لتصوّرها في الفضاء رباعيّ البعد. بإضافة بعد رابع إلى الفضاء ثلاثيّ البعد، يمكن إزالة التقاطع الذاتيّ. علينا فقط، وبرفق، دفعُ قطعةٍ من الأنبوب تحوي التقاطع على طول البعد الرابع، خارج الفضاء ثلاثيّ البعد الأصليّ، تماما مثلما يمكن التخلّص من التقاطع الذاتيّ في منحن يتقاطع ذاتيا في المستوي عن طريق رفع جزء من المستوي يحوي هذا التقاطع الذاتيّ إلى بعد ثالث (الشكل 3).

لتصوّر زجاجة كلاين، نتخيّل فردا يعيش في عالم مسطّح من البعد 2. نريدُ أن نشرح له ما هي العقدة. للقيام بذلك، نرسم عقدة على المستوي: كلّ ما يراه هو منحن يتقاطع مع نفسه. نشرح له أنّ النقط التي يراها ليست نقط تقاطع، ولكن المنحني يمرّ "فوق نفسه" و "تحت نفسه". يتفاجأ صاحبنا: كونه يعيش في عالم مسطّح فهو لا يفهم ما هو الأعلى أو ما هو الأسفل. إنّه يفتقر إلى بعد واحد (الأعلى والأسفل) ليتمكّن من تصوّر العقدة.

نواجه نفس المشكلة عندما نحاول تصوّر زجاجة كلاين، لأنّنا نرى سطحا يتقاطع ذاتيا. ومع ذلك، إذا فكّرنا في بعد رابع، يكفي أن نتخيّل أنّه في هذا المكان، تمرّ الزجاجة "فوق نفسها" و "تحت نفسها" بمعنى هذا البعد الرابع، وبالتالي لا تتقاطع ذاتيا.

بطريقة ما، يمكن اعتبار زجاجة كلاين سطحا ينشئ "عقدة". وكسطح (يعني كائنا من البعد 2)، فإنّه يحتاج إلى 4 أبعاد لتكوين عقدة، تماما كما هو الحال بالنسبة إلى المنحني (كائن أحاديّ البعد) الذي يحتاج إلى 3 أبعاد لتكوين عقدة.



الشكل 3

يمكن إنشاء زجاجة كلاين (بالمعنى الرياضياتيّ، لأنّه في الواقع لا يمكن صنعها دون السماح للسطح بالمرور عبر نفسه) عن طريق ربط حافّتَيْ شريطين لموبيوس. يصف لبيو موسر هذه العملية في الأبيات الآتية:

عالم رياضيات يُدعى كلاين

اعتقد أن شريط موبيوس كان إلهيا.

قال: "إذا ألصقتَ

حافّتَيْ اثنين،

ستحصل على زجاجة غريبة مثل زجاجتي".

Limerick by Leo Moser

A mathematician named Klein

Thought the Möbius band was divine.

Said he : "If you glue

The edges of two,

You'll get a weird bottle like mine."

[*David Darling, The Universal Book of Mathematics: From Abra-cadabra to Zeno's Paradoxes, John Wiley & Sons, 2004, p. 176.*]

يؤدّي قطع زجاجة كلاين على طول مستوي التناظر إلى شريطين لموبيوس متناظرين، أحدهما بنصف التواء عن اليسار والآخر بنصف التواء عن اليمين.

إنّها مرّة أخرى حاصل القسمة $\mathbf{R}^2/\mathscr{R}$ حيث $\mathscr{R}$ هي علاقة التكافؤ المعرّفة بـ

$$(u,v)\mathscr{R}(u',v') \Leftrightarrow (u',v') = (u+2k\pi, (-1)^k v + 2h\pi).$$

ها هو تغميس في $\mathbf{R}^3$

$$(u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

مع

$$\begin{aligned} x(u,v) = -\frac{2}{15}\cos u \big(&3\cos v - 30\sin u + 90\cos^4 u \sin u \\ &- 60\cos^6 u \sin u + 5\cos u \cos v \sin u\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(u,v) = -\frac{1}{15}\sin u \big(&3\cos v - 3\cos^2 u \cos v - 48\cos^4 u \cos v + \\ &48\cos^6 u \cos v - 60\sin u + 5\cos u \cos v \sin u - 5\cos^3 u \\ &\cos v \sin u - 80\cos^5 u \cos v \sin u + 80\cos^7 u \cos v \sin u\big) \end{aligned}$$

$$z(u,v) = \frac{2}{15}(3 + 5\cos u \sin u)\sin v$$

و $(u,v) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$.

2. تغميس بالشكل 8

يجري التغميس على الشكل "8" لزجاجة كلاين من خلال أخذ شريط لموبيوس وجلب حافّته إلى خطّ الوسط.

نظرا إلى وجود حافّة واحدة فقط، سيلتقي الشريط بنفسه، ويعبر خطّ الوسط هذا.

ينتج عن هذا التوسيطُ الآتي

$$(u,v)\mapsto\begin{cases}x=\left(r+\cos\frac{u}{2}\sin v-\sin\frac{u}{2}\sin 2v\right)\cos u\\ y=\left(r+\cos\frac{u}{2}\sin v-\sin\frac{u}{2}\sin 2v\right)\sin u\\ z=\sin\frac{u}{2}\sin v+\cos\frac{u}{2}\sin 2v\end{cases}$$

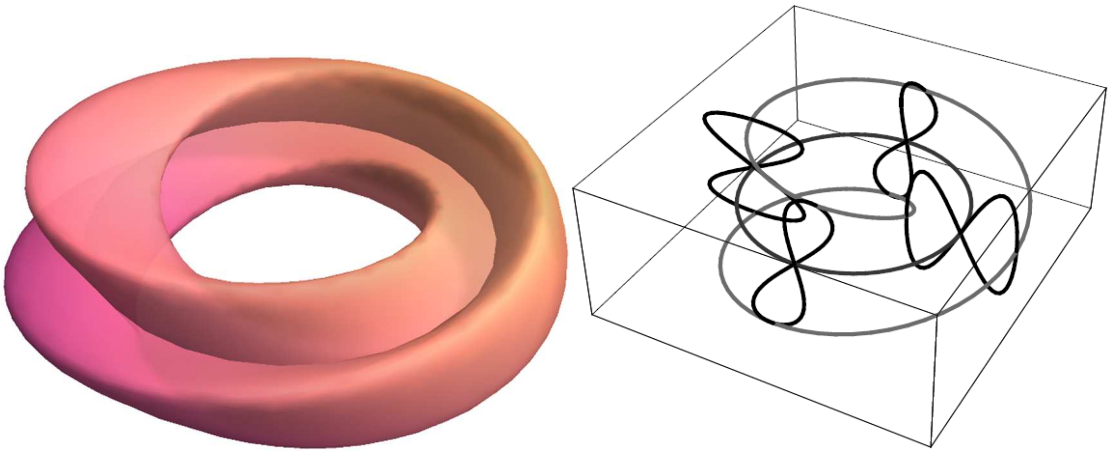
حيث $(u,v)\in[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ و $r>2$.

نظرا إلى أنّ شريطَ موبيوس مستوٍ إسقاطيّ مثقوب، فإنّ زجاجة كلاين هي أيضا المجموع المترابط لمستويين إسقاطيين حقيقيين. يتمّ الحصول على المجموع المترابط لسطحين عن طريق قطع قرص على كلّ منهما ثمّ إلصاقهما على طول الحافّتين الدائريتين الناتجتين (الشكل 10).

إنشاء آخر (الشكل 4) هو أخذ منحني "الشكل 8" في مستو عموديّ، وجعله يدور بالكامل حول المحور Oz بينما يقوم الشكل 8 نفسه بنصف دورة. هذا الإنشاء مشابه لإنشاء شريط موبيوس، حيث يتمّ استبدال 8 بالقطعة التي تدور. تتكوّن زجاجة كلاين حينئذ من أسطوانة قاعدتها الشكل 8، ويتم إلصاق القاعدتين المتقابلتين معا بطريقة تتوافق مع توجيههما.

في هذا التغميس، يكون التقاطع الذاتيّ دائرة مرسومة في المستوي Oxy.

الثابت الموجب r هو شعاع (نصف قطر) هذه الدائرة. يعطي الوسيط u الزاوية في Oxy و v وسيطٌ يعرّف مقطع الشكل 8.



الشكل 4

ها هي معادلة ديكارتية لهذا السطح من إنتاج إيان ستيوارت (Ian Stewart)

$$\left(x^2+y^2+z^2+2y-1\right)\left[\left(x^2+y^2+z^2-2y-1\right)^2-8z^2\right]+$$
$$16xz\left(x^2+y^2+z^2-2y-1\right)=0.$$

يمكن نمذجة توسيط في $\mathbf{R}^4$ بغير تقاطع ذاتيّ وفقا لذلك الخاصّ بالطارة المسطّحة

$$(u,v)\mapsto(x,y,z,w)$$

مع

$$x=R\left(\cos\frac{u}{2}\cos v-\sin\frac{u}{2}\sin 2v\right),\ y=R\left(\sin\frac{u}{2}\cos v+\sin\frac{u}{2}\sin 2v\right)$$
$$z=P\cos u\left(1+\varepsilon\sin v\right),\ w=P\sin u\left(1+\varepsilon\sin v\right),$$

حيث P و R ثابتان يحدّدان نسبة العَرض أو نسبة الأبعاد، u ، v يُشبِهان ذيْنكم المحدّدين أعلاه ؛ v يحدّد الموضع حول الشكل 8 وكذلك الموضع في المستوي Oxy ، يحدد u أيضا زاوية دوران الشكل 8 والموضع حول المستوي Ozw ، ε ثابت صغير و $\varepsilon\sin v$ كمية صغيرة متعلّقة بـ v في المستوي Ozw، تُجنِّب التقاطعَ الذاتيَّ التلقائيَّ. عندما يكون $\varepsilon=0$ يكون التقاطع الذاتيّ دائرة في المستوي Ozw.

3. بعض من الخصائص الأخرى لزجاجة كلاين

1) مميّز أويْلر- پوانكاري لزجاجة كلاين والتي نرمز إليها بـ K_2 لسبب يتجلّى لاحقا، يساوي صفرا.
2) أرقام بيتّي غير المنعدمة هي $b_0=1$ و $b_1=1$.
3) رقمها اللوني يساوي 6.
4) زمرتها الأساسية (التي يمكن حسابها باعتبارها CW- مركّبا، أو حاصل قسمة المستوي أو الطارة، أو كفضاء كلّي لتلييف بالدوائر على الدائرة) هي الجداء نصف المباشر لـ $\mathbf{Z}$ في نفسه والمعطى بالتمثيل $\langle a,b\mid aba^{-1}b\rangle$.
5) زُمرُ التماثل لزجاجة كلاين هي $H_0(K_2,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$ ، $H_1(K_2,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ و $H_n(K_2,\mathbf{Z})=\{0\}$ من أجل $2\le n$.
6) تمتلك زجاجة كلاين تغطية قابلة للتوجيه من وُرَيقتين، تفامتشاكلة مع الطارة.

4. زجاجة كلاين وقلب الطارة

إذا تمّ طلاء زجاجة كلاين، فإنّ طبقة الطلاء الناتجة، والتي تكون في قطعة واحدة كون السطح ذا جانب واحد، هي تغميس للطارة، وبعبارة أخرى، فإنّ التغطية ذات الوُريقتين هي الطارة؛ ولهذا السبب تمّ استخدام زجاجة كلاين كخطوة مركزية في قلب الطارة ("Retournement du tore, Torus eversion " أيْ تحويل الداخل إلى الخارج).

5. زجاجة كلاين ومسألة المنازل الثلاثة

مشكلة المنازل الثلاثة والمصانع الثلاثة قابلة للحلّ على زجاجة كلاين، على عكس المستوي. بمعنى آخر، يمكن رسم البيان الشطراني (ذي الفرعين) $K_{3,3}$ على زجاجة كلاين دون تقاطع الحوافّ.

نذكّر أنّ البيانين $K_{3,3}$ و K_5 (غير المستويين) قابلان للتغطيس في كلّ سطح مترابط، متراصّ وبغير حافّة.

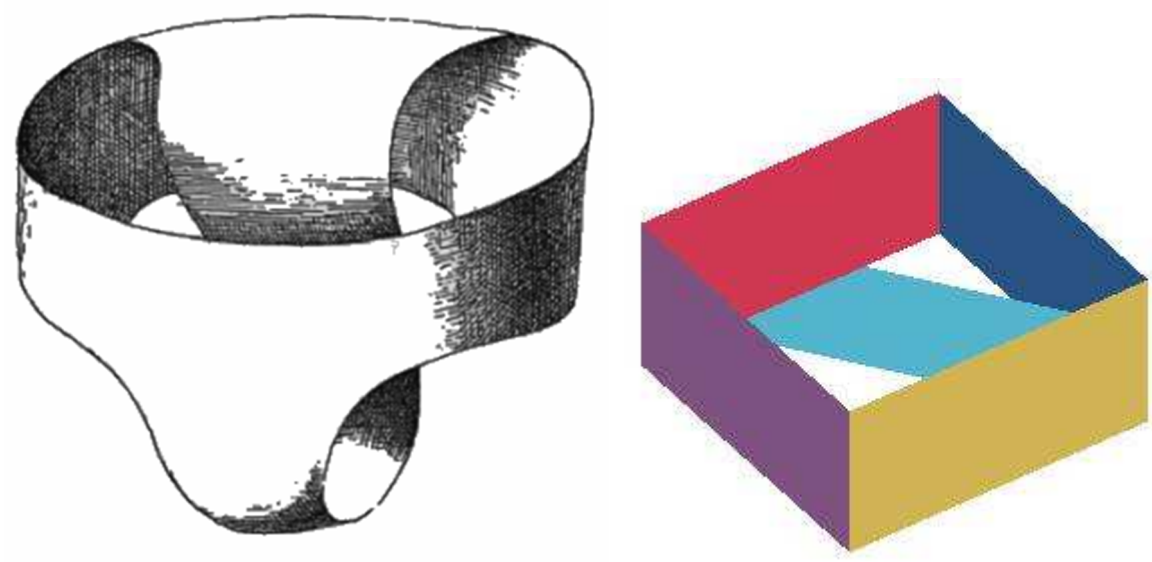
6. السطوح المنشأة من زجاجة كلاين

تنقسم السطوح غير القابلة للتوجيه إلى عائلتين، واحدة تتشكّل عن طريق إضافة مقابض إلى زجاجة كلاين، والأخرى عن طريق إضافة مقابض إلى المستوي الإسقاطيّ الحقيقيّ (تماما كما يمكن تشكيل جميع السطوح القابلة للتوجيه عن طريق إضافة مقابض إلى كرة). السطوح القائمة على زجاجة كلاين لها مميّز أويْلر زوجيّ، وتلك التي تعتمد على المستوي الإسقاطيّ لها مميّز أويْلر فرديّ.

تحظى زجاجة كلاين بشعبية كبيرة في الطوبولوجيا وتحظى بشعبية كبيرة في علم الكون (انظروا على سبيل المثال: المرجع 4).

7. زجاجة كلاين المثقوبة

يمكن تمثيل زجاجة كلاين المثقوبة (التي تتميّز بكونها سطحا أحاديّ الجانب بحافّة ومن الصنف 2) بسروال موبيوسي: يتمّ الحصول عليها عن طريق ربط شريط مغلق غير مَجْدول بشريط كما هو موضّح في الشكل 5.



الشكل 5

زجاجة كلاين مثقوبة!

8. زجاجة كلاين المتعدّدة

تماما مثلما يمكن تعميم شريط موبيوس إلى شريط به n نصف دورة (ويحصل المرء على شريط موبيوس طوبولوجيا فقط عندما يكون n فرديا)، يمكن تعميم زجاجة كلاين إلى زجاجة ذات n انعكاسات، وهي زجاجة كلاين طوبولوجيا فقط عندما يكون n فرديا.

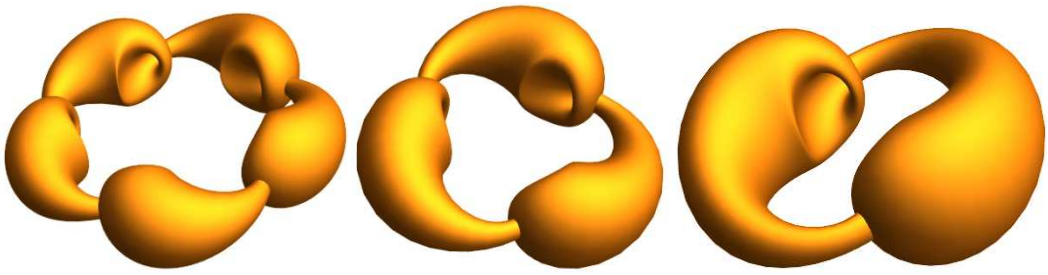
على سبيل المثال، نحصل على زجاجة كلاين -من المرتبة n عن طريق إلصاق حافّتَيْ شريطين لموبيوس من المرتبة n.

ها هو توسيط لزجاجةٍ لكْلاين متعدّدة

$$(u,v)\mapsto\begin{cases}x=(n+1)\cos u-\cos(n+1)u-\dfrac{n}{n+1}w(u,v)\sin\dfrac{n+2}{2}u\cos v\\ y=(n+1)\sin u-\sin(n+1)u-\dfrac{n}{n+1}w(u,v)\cos\dfrac{n+2}{2}u\cos v\\ z=w(u,v)\sin v\end{cases}$$

حيث $w(u,v)=\sin nu+c$ (الشكل 6).

زجاجة كلاين المتعدّدة هي حالة خاصّة من زجاجات بونان- جينر- كلاين (Bonan-Jeener-Klein).



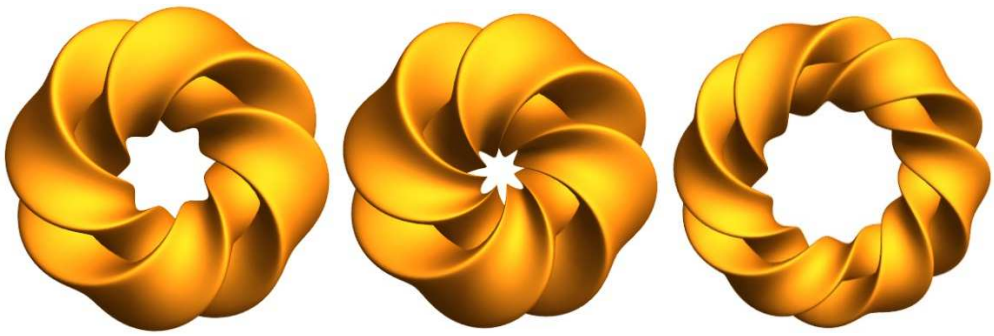
الشكل 6

9. زجاجة كلاين ڤري

زجاجة كلاين-ڤري (Klein-Gray) هي السطح المعرّف بالتوسيط

$$(u,v)\mapsto\begin{cases}x=\left(a+\cos(nu/2.0)\sin v-\sin(nu/2.0)\sin(2v)\right)\cos(mu/2.0)\\ y=\left(a+\cos(nu/2.0)\sin v-\sin(nu/2.0)\sin(2v)\right)\sin(mu/2.0)\\ z=\sin(nu/2.0n)\sin v+\cos(nu/2.0)\sin(2v)\end{cases}$$

حيث $(u,v)\in[0,4\pi]\times[0,2\pi]$ (الشكل 7).



الشكل 7

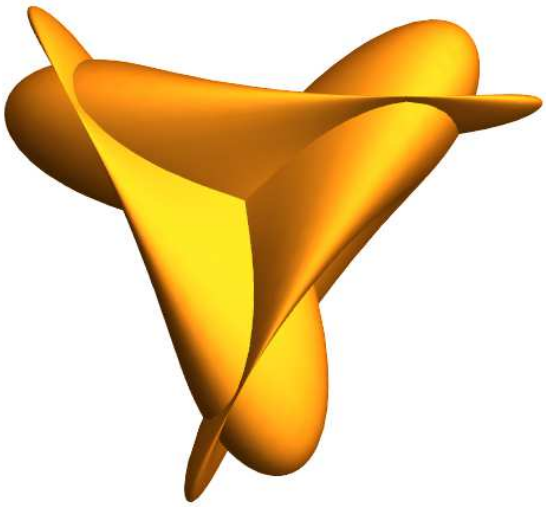
10.زجاجة كلاين جينر

زجاجة كلاين-جينر (Klein-Jeener) (الشكل 8) هي السطح المعرّف بالتوسيط

$$(u,v)\mapsto\begin{cases}x=m\cos u+\cos mu-\dfrac{m+1}{2}mW\sin\dfrac{(m-1)u}{2}\cos v\\ y=m\sin u-\sin mu-\dfrac{m+1}{2}mW\cos\dfrac{(m-1)u}{2}\cos v\\ z=W\sin v\end{cases}$$

حيث

$$W=\cos\left((m+1)u+\frac{\pi}{m+1}\right)+\frac{3}{2}.$$



الشكل 8

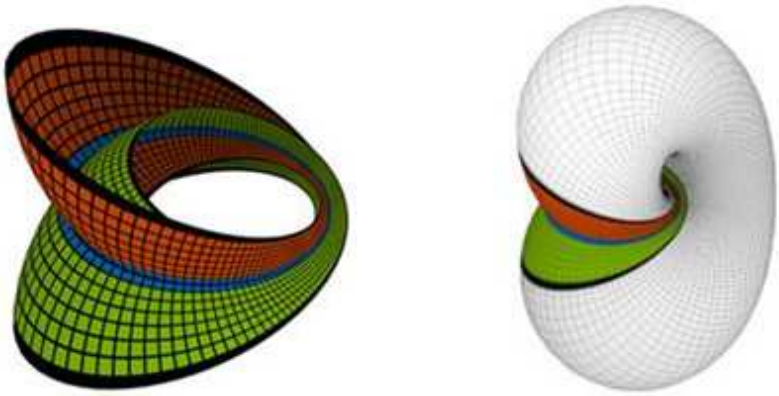
11. زجاجة كلاين لوسُن

ليكن التطبيق $\Psi_{m,n}:\mathbf{R}^2\looparrowright\mathbf{S}^3$ حيث $\mathbf{S}^3$ هي كرة الوَحدة في $\mathbf{R}^4$ المعرّف بـ

$$\Psi_{m,n}(x,y)=\left(\cos mx\,\cos y,\sin mx\,\cos y,\cos nx\,\sin y,\sin nx\,\sin y\right).$$

إذا كان m و n عددين صحيحين أوّلين في ما بينهما وكان أحدهما زوجيا فإنّ السطح (الأصغريّ المتراصّ) يُدعى زجاجة كلاين-لوسُن. (Klein-Lawson)

نلاحظ أنّ لوسُن ثبّت الحدّ الأدنى لأشكال الطاقة للعديد من الأشكال الطوبولوجية. ومن بين أمور أخرى، قدّم الشكل المثير للاهتمام المبَيَّن في الشكل 9 ا، والذي تمّ توضيحه جيّدًا من طرف پولْثَيْر (Konrad Polthier) (الشكل 9 ب). توقّع كاسنر (Robert Kusner) أنّ طاقة ويلمور (Énergie de Willmore) للعديد من زجاجات كلاين- لوسُن قد تمّ تقليلها بالفعل من خلال هذا الشكل المحدّد.



(ب) (ا)

يتقاطع شريطان لموبيوس على زجاجة كلاين-لوسُن في $\mathbf{S}^3$ بشكل متعامد على طول دائرتهما الأساسية.

الشكل 9

12. زجاجة كلاين من البعد n

ينشأ الفضاء حاصل القسمة

$$\mathcal{K}_n = \left(\mathbf{S}^1\right)^n \Big/ \mathcal{R} \qquad (*)$$

حيث $\mathcal{R}$ هي علاقة التكافؤ المعرّفة في $\mathbf{C}^n$ بـ $(z_1,...,z_{n-1},z_n)\mathcal{R}(\bar{z}_1,...,\bar{z}_{n-1},-z_n)$ طبيعيا في دراسة المتخصّصين للتعقيد الطوبولوجي لفضاءات المضلّعات المستوية.

ويُبيّن النموذج

$$\mathcal{K}_n \approx \left(\left(\mathbf{S}^1\right)^{n-1} \times I\right) \Big/ \mathcal{R}' \qquad (**)$$

حيث $(z_1,...,z_{n-1},0)\mathcal{R}'(\bar{z}_1,...,\bar{z}_{n-1},1)$ ، أنّ السطح $\mathcal{K}_2$ هو زجاجة كلاين وأنّ $\mathcal{K}_n$ تعميم طبيعيّ لها في البعد n.

يُعطى مستشاكل بين (*) و (**) بـ

$$\left[(z_1,...,z_{n-1},e^{2\pi i t_n})\right] \mapsto \left[(z_1,...,z_{n-1},2t_n \,(\mathrm{mod}.1))\right].$$

برهن دونالد م. دبهيس (Donald M. Davis) أنّ أصغر فضاء إقليديّ يمكن أن تُغَطّس فيه $\mathcal{K}_n$ هو $\mathbf{R}^{n+1}$ إذا كان n فرديا و $\mathbf{R}^{n+2}$ إذا كان n زوجيا. [arXiv :1706.03704v2 [math.AT] 19 Jun 2017]

13. سطوح للنصّ علاقة بها

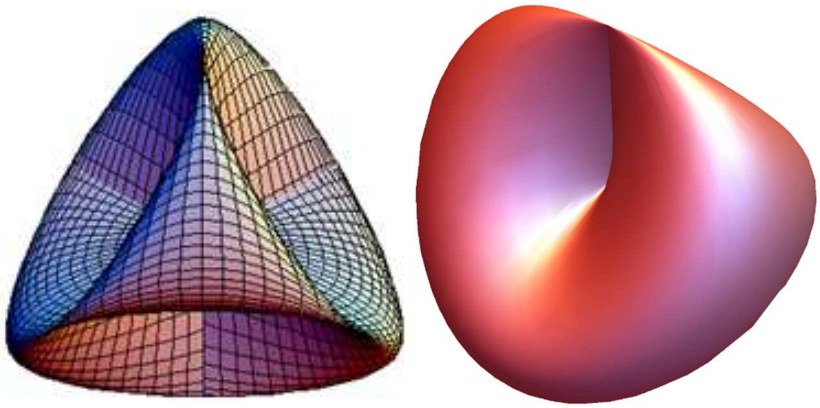
نعيد الإشارة أنّ زجاجة كلاين ترتبط ارتباطا وثيقا بشريط موبيوس وبتغميسات المستوي الإسقاطيّ الحقيقيّ (في $\mathbf{R}^3$) الأربعة التقليدية الآتية (الشكل 10):

القبّعة المتقاطعة (الأبسط بين الـ 4)،

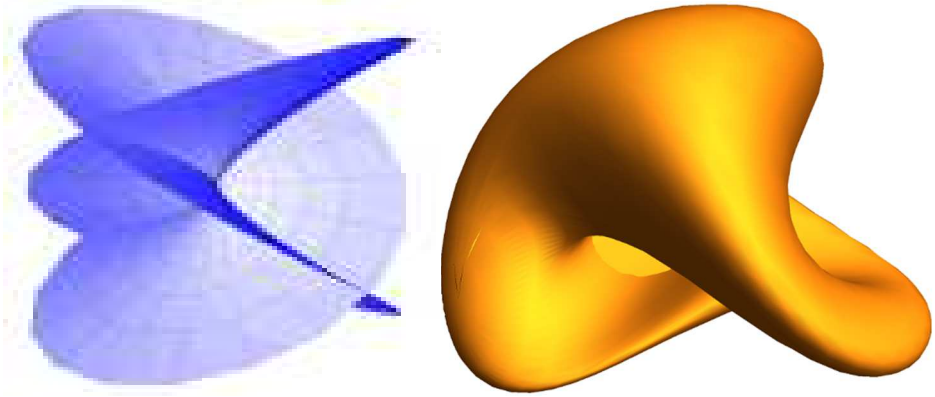
السطح الروماني (أوّل اكتشاف تاريخيّ)،

سطح بويْ (أكثر تعقيدًا، ولكن بغير "نقطة قَرْص" (أو نقطة قُرنية، Point de pincement)، على عكس الأوّلين)،

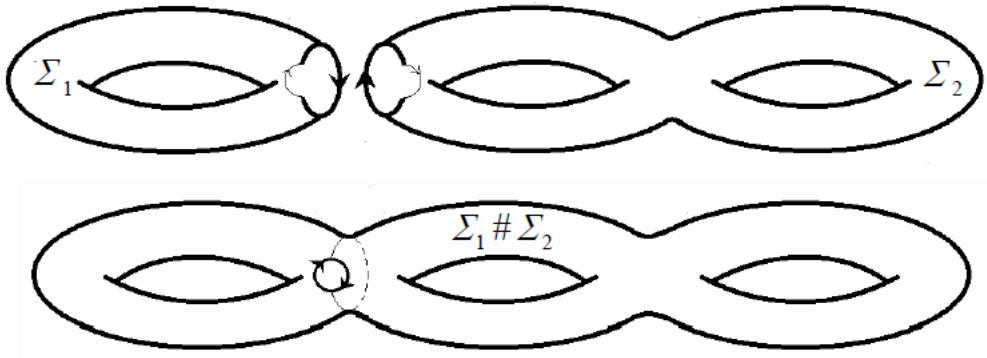
سطح هبنّبرغ (Henneberg)، وهو فضلا عن ذلك سطح أصغريّ.



القبّعة المتقاطعة السطح الروماني



سطح بويْ سطح هبنّبرق



المجموع المترابط $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ للسطحين Σ_1 و Σ_2.

الشكل 10

مراجع

ا) ويكس، جيفري: شكل الفضاء، ترجمة حمزة خليف.

[1] Cohen, Daniel C., Vandembroucq, Lucile, *Topological complexity of the Klein bottle*, J Appl. and Comput. Topology (2017) 1:199–213. https://doi.org/10.1007/s41468-017-0002-0.

[2] Gray, Alfred, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Chapman and Hall/CRC, 2006.

[3] Khelif, Hamza, *Le jardin des surfaces, Dictionnaire raisonné des courbes gauches, des surfaces et d'autres variétés célèbres et remarquables*, 2048 pages. KDP Amazon, 2020.

[4] Lachièze-Rey, Marc and Luminet, Jean-Pierre, *Cosmic Topology*, arXiv:gr-qc/9605010v2 9 Jan 2003.

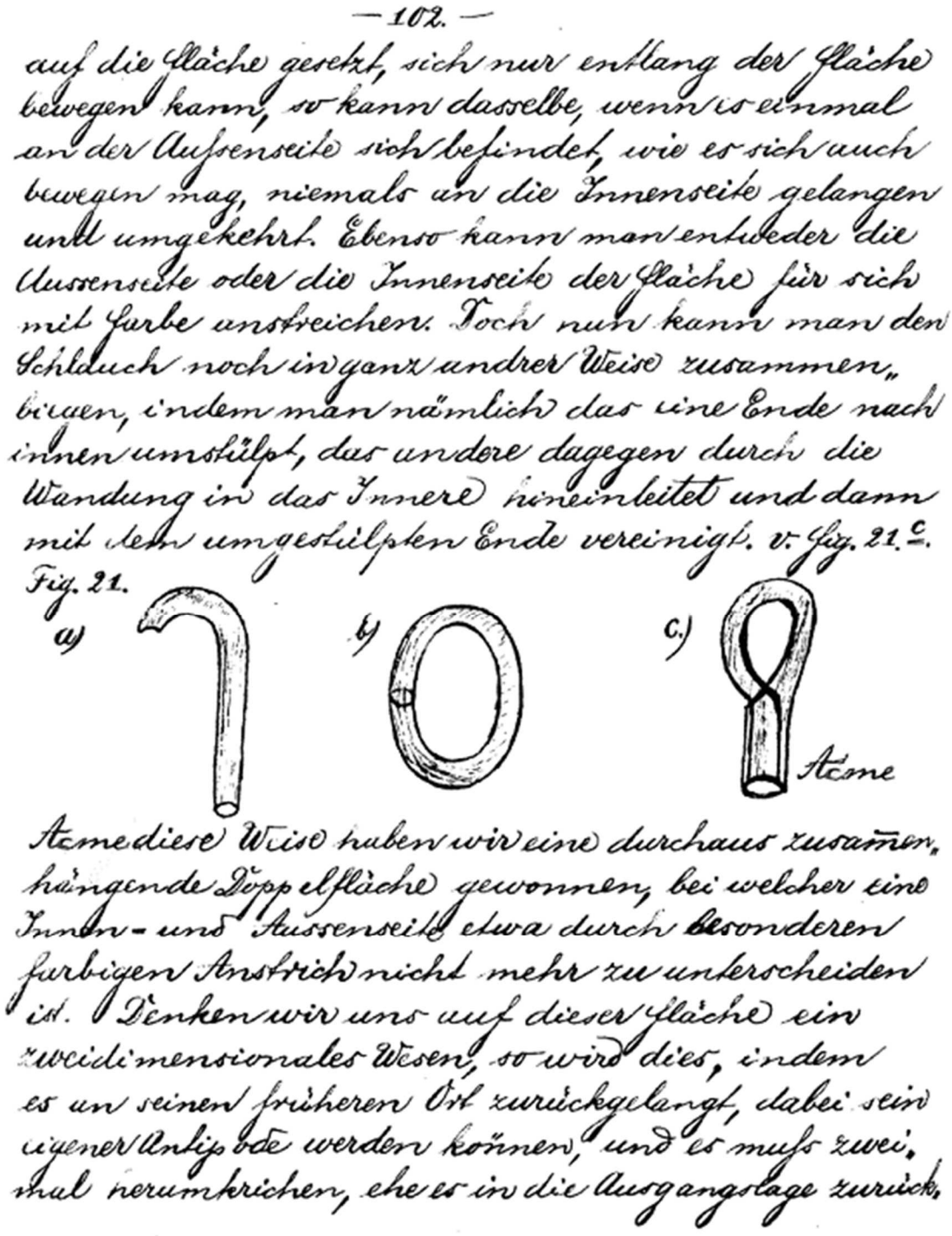
[5] Renker, von Sebastian, *Topologie der Fläche* (International Journal of Computer Vision),

[6] Swindale, N. V., *Visual cortex: Looking into a Klein bottle*, Current Biology 1996, Vol 6 No 7:776–779.

[7] http://www.mathcurve.com/surfaces/klein/klein.shtml

[8] http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/vrac/klein01/

[9] https://fr.wikipedia.org/wiki/Bouteille_de_Klein



— 102. —

auf die Fläche gesetzt, sich nur entlang der Fläche bewegen kann, so kann dasselbe, wenn es einmal an der Aussenseite sich befindet, wie es sich auch bewegen mag, niemals an die Innenseite gelangen und umgekehrt. Ebenso kann man entweder die Aussenseite oder die Innenseite der Fläche für sich mit Farbe anstreichen. Doch nun kann man den Schlauch noch in ganz andrer Weise zusammenbiegen, indem man nämlich das eine Ende nach innen umstülpt, das andere dagegen durch die Wandung in das Innere hineinleitet und dann mit dem umgestülpten Ende vereinigt. v. Fig. 21. c.

Fig. 21.

a) b) c)

Atome

Atome diese Weise haben wir eine durchaus zusammenhängende Doppelfläche gewonnen, bei welcher eine Innen- und Aussenseite etwa durch besonderen farbigen Anstrich nicht mehr zu unterscheiden ist. Denken wir uns auf dieser Fläche ein zweidimensionales Wesen, so wird dies, indem es an seinen früheren Ort zurückgelangt, dabei sein eigener Antipode werden können, und es muss zweimal herumkriechen, ehe es in die Ausgangslage zurück

مخطوط أصليّ من درس لـ فيليكس كْلاين