الدوال الاختبارية ودورها في التحليل الدالي والمعادلات ذات المشتقات الجزئية

عبد الرشيد سعدي
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة محمد بوضياف، المسيلة
abderrachid.saadi@univ-msila.dz

1. مقدمة

الكل يعلم مدى ارتباط العلوم الفيزيائية بالعلوم الرياضية. من ذلك أن الفيزيائيين غالبا ما يلجؤون إلى ما يُطلق عليه نمذجة الظواهر الفيزيائية، والتي تقتضي تحويل دراسة هذه الظواهر من النموذج الوصفي إلى النموذج الكمي. ينتهي هذا عادة إلى علاقات متداخلة تضم مقادير معلومة وأخرى مجهولة. تُسمى هذه العلاقات معادلات الفيزياء الرياضية، وهي معادلات ذات مشتقات جزئية شهدت تطورًا هائلًا طيلة القرن الماضي، خصوصا مع ظهور نظريات جديدة مثل الأنظمة الديناميكية والتحليل التابعي ونظرية التوزيعات.

إن وجود المشتقات الجزئية – فضلًا عن حلها - يعتبر في حد ذاته تحديًا رياضيًا. فما بالك بالرجوع إلى الظواهر التي، إن تم نمذجتها على شكل دوال، فإنها تكون على شكل غشيم يفتقد إلى المرونة والصقالة، على العكس من حلول المعادلات المتعلقة بها المتطلبة قيودًا قد لا تتحقق تجريبيًا. لقد أدت هذه المعضلة بالرياضيين إلى التفكير وفق مقاربتين مترابطتين مع بعضهما البعض، شأنهما شأن الكثير من فروع الرياضيات:

- إيجاد حلول مخففة سُميت حلولًا ضعيفة تمييزًا لها عن الحلول المباشرة والتي سُميت قوية.
- تقريب الحلول إلى متتاليات متقاربة نحوها تسمى حلولًا عددية.

أدت المقاربة الأولى إلى ظهور نظرية التوزيعات وفضاءات سوبولاف (Sobolev) اللتين تُعتبران جزءًا مهمًا في التحليل التابعي، بينما أدت المقاربة الثانية إلى المساهمة في ظهور التحليل العددي.

نهتم في بحثنا هذا بعنصر مهم في المقاربة الأولى أطلق عليه اسم التوابع الاختبارية، وهو اسم مرن يُطلق على نمط من الدوال تحقق خصائص معينة نتعرض إليها لاحقًا.

2. مفهوم التابع الاختباري

في عام 1934، نشر ج. ليري (J. Leray) بحثًا عنوانه "**حول حركة مائع لزج عبر الفضاء**"، تناول فيه دراسة لمعادلة نافييه–ستوكس (Navier-Stokes) في ميدان من الفضاء الحقيقي ثلاثي الأبعاد، أشار فيه إلى حلول اقترح تسميتها حلولًا مضطربة تخضع لمعادلات نافييه - ستوكس لكنها لا تبقى منتظمة طوال الوقت حسب تعبيره. أكد ليري أن هذا النوع من الحلول، لو فقد تعبيره عن الظاهرة التي تنمذجها معادلة نافييه–ستوكس، فإن ذلك لا يعني فقدان أهميته الفيزيائية–الرياضية، إذ لا بد وأن تواجهنا ظواهر فيزيائية تكون هذه الحلول المضطربة مناسبة لها.

ومن ضمن ما قدّم ليري في هذا البحث مفهومان لهما ارتباط بما نحن بصدد تقديمه:

- المفهوم الأول: هو مفهوم "التقارب الضعيف بالمتوسط (التربيعي)"، والذي ينص على أن متتالية توابع (U_n) تتقارب بضعف بالمتوسط نحو تابع U على ميدان Ω إذا وفقط إذا كان $\int_\Omega U_n^2<\infty$ وكان $\int_\Omega U_n.A$ يتقارب نحو

$\int_\Omega U.A$ مهما كانت الدالة A التي تحقق $\int_\Omega A^2<\infty$. إن هذا التقارب يتطابق تماما مع مفهوم التقارب بضعف في فضاء لوبيغ (Lebesgue) $L^2(\Omega)$.

- **المفهوم الثاني**: هو مفهوم "**شبه المشتقة**" الذي شاع فيما بعد تحت اسم "**المشتق الضعيف**"، والذي يستند إلى علاقة المكاملة بالتجزئة الشهيرة (أو علاقة غرين Green).

تقبل الدالة U شبه مشتقة في الاتجاه i إذا وفقط إذا وجدت دالة u_i تحقق العلاقة التالية:

$$\int_\Omega \left(U.\frac{\partial A}{\partial x_i}+u_i.A\right)=0$$

وذلك من أجل كل دالة A من $L^2(\Omega)$ ذات مشتقات جزئية مستمرة في $L^2(\Omega)$.

تعتبر الدوال A المقدمة في التعريفين بمثابة دوال اختبارية في $L^2(\Omega)$، والتي يمكن تعميمها إلى الفضاء $L^p(\Omega)$ $(p\geq1)$ فتكون الدوال الاختبارية منتمية إلى الفضاء $L^{p'}(\Omega)$ $(p\geq1)$ حيث يمثل p' مرافق لوبيغ للعدد p $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$.

غير أن المفهوم الشائع للدوال الاختبارية هو ذلك المفهوم الذي قدّمه ل. شوارتز (L. Schwartz) في كتابه الشهير "**نظرية التوزيعات**" حيث وصفها بأنها دوال قابلة للاشتقاق لانهائيا، وتنعدم خارج مجموعة محدودة من Ω. نرفق بكل تابع φ من هذه التوابع "نواة" (والذي يعرف حاليا باسم حامل الدالة)، وهي مجموعة متراصة تتميز بأن متممتها هي أكبر مجموعة مفتوحة حيث φ=0.

نرمز للدوال الاختبارية على المفتوح Ω بالرموز: $D(\Omega)$، $C_c^\infty(\Omega)$، $C_0^\infty(\Omega)$. كما توجد دوال اختبارية قابلة للاشتقاق m مرة وذات حوامل متراصة، يرمز لمجموعة هذه التوابع بالرموز: $D^m(\Omega)$، $C_c^m(\Omega)$، $C_0^m(\Omega)$.. الحرف m يرمز لرتبة الاشتقاق بينما يرمز الحرف الصغير c إلى تراص الحامل، أما العدد 0 فيرمز إلى انعدام الدالة ومشتقاتها خارج مفتوح متممته محدودة.

3. طبولوجيا من نوع خاص

إن استعمالنا للتوابع الاختبارية سيؤدي بنا إلى استخدام سلسلة من الإجراءات الجبرية والطبولوجية، مما يحتم علينا الانتباه جيدًا لما نقوم به، خصوصا عند المرور للنهايات. من أجل هذا تم تزويد فضاءات التوابع الاختبارية بطبولوجيات خاصة مراعاة لخصائصها. نحتاج في ذلك لأمرين أساسيين:

- **التمام**: ويمكن التعبير عنه بأنه كلما كانت المسافة بين عنصرين من عناصر متتالية ما تؤول إلى الصفر في جوار المالانهاية، كانت هذه المتتالية تتقارب نحو عنصر من هذا الفضاء. نقول عن الفضاء هنا بأنه تام، وإذا كان فضاء شعاعيًا نظيميًا فإننا نقول عنه إنه بناخي.
- **الغلق**: يمكن استعمال الخاصية الموالية لمجموعة مغلقة: كلما كانت متتالية من مجموعة A متقاربة فإن نهايتها تنتمي إلى A.

في حالة الفضاءات المترية، هناك علاقة بين التمام والغلق يمكن مراجعتها في مكانها من كتب الطبولوجيا العامة.

بالنسبة لفضاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$، نستطيع تزويدها ببنية فضاء بناخي اعتمادًا على الخاصية التي يضمنها تعريف هذه الفضاءات، وتسمى بخاصية p جمعية.

كما أن هناك نوعًا خاصًا من الفضاءات الطبولوجية يتمتع ببنية فضاء شعاعي لكنه ليس نظيميًا بالضرورة، يسمى هذا النوع من الفضاءات بالفضاءات الشعاعية الطبولوجية، ومن بين الأمثلة عليه فضاء الدوال الاختبارية من النوع الثاني. يُشترط في هذا النوع من الفضاءات أن يكون الانسحاب والتحاكي تطبيقين مستمرين وفق هذه الطبولوجيا

وما يتولد منها، ويتم إنشاؤها بإعطاء طبولوجيا محدبة محليًا، منسجمة مع بنية الفضاء الشعاعي، عن طريق إعطاء جملة أساسية لجوارات 0، ثم جوارات نقطة كيفية، وفقًا لصمود الطبولوجيا بالانسحاب.

إن تقديم هذه الطبولوجيا عملية معقدة يمكن الرجوع فيها إلى الكتب التي تتناول هذا النوع من الفضاءات (يمكن للقارئ الرجوع إلى المرجعين [3] و [4]). سنكتفي هنا بالقول إن هذا يعتمد على اختيار أنصاف النظيمات التي تنتج منها جملة الجوارات الأساسية؛ ففي حالة الفضاء $D(\Omega)$ تنتج من قابلية الاشتقاق اللانهائي محدودية كل مشتقة من رتبة معينة على كل متراص. وهذا ما يسمح لنا بتعريف نظيم التقارب المنتظم لكل مشتقة على كل متراص، والذي يعتبر نصف نظيم إذا أخذناه في فضاء التوابع القابلة للاشتقاق لانهائيًا (أو حتى رتبة معينة) على مفتوح. تسمى هذه العملية بالنهاية الاستقرائية الدقيقة.

4. الكثافة ومفهوم الصقل

مفهوم الكثافة هو مفهوم لا يمكن الاستغناء عنه في التحليل الدالي، والذي يمكن التعبير عنه بما يلي: تكون مجموعة A كثيفة في فضاء E إذا أمكن تقريب كل عنصر من E بمتتالية عناصر من A وفق طبولوجيا الفضاء E. يسمح لنا هذا التقريب بنقل العمليات المختلفة (التقارب الضعيف، النهاية والاشتقاق تحت إشارة التكامل، ...) إلى عناصر من مجموعة A مختارة بعناية بحيث تكون عناصرها لطيفة بالقدر الذي نريده، ثم العودة إلى عناصر الفضاء الأول ما أمكن ذلك (نشير إلى أن عملية الرجوع ليست ممكنة إلا تحت شروط).

من بين المفاهيم المتعلقة بالكثافة مفهوم قابلية الفصل، وهو أن يقبل فضاء طبولوجي E مجموعة قابلة للعد كثيفة فيه. فإذا كان E فضاء شعاعيًا نظيميًا، يمكن جعل المجموعة القابلة للعد عبارة عن اتحاد فضاءات شعاعية جزئية منتهية البعد، وهو ما يسمح بتقريب المسائل من مسائل في فضاءات غير منتهية الأبعاد إلى فضاءات منتهية الأبعاد، كما هو الحال في طريقة فايدو-غالاركين (Faedo-Galerkin) مثلًا.

يعتبر فضاء التوابع الاختبارية $D(\Omega)$ كثيفًا في كثير من الفضاءات الدالية، ومن بينها:

- فضاء الدوال المستمرة على متراص، وذلك وفقًا للطبولوجيا المرفقة بنظيم التقارب المنتظم.
- فضاء الدوال القابلة للاشتقاق حتى رتبة m، وذلك وفقًا للطبولوجيا التي تم الإشارة إليها.
- فضاء الدوال القابلة للاشتقاق لانهائيا، وذلك وفقًا للطبولوجيا التي تم الإشارة إليها.
- فضاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$ وفق النظيم المرفق بها.
- فضاء التوزيعات $D'(\Omega)$.
- الفضاء $W_0^{m,p}(\Omega)$ المكون من الدوال المنتمية إلى $W^{m,p}(\Omega)$ والتي تنعدم على حافة Ω.

يعتمد مفهوم الصقل على نقل قابلية المفاضلة من دالة يُفترض أنها مصقولة (قابلة للمفاضلة بنحو كاف) إلى الجداء التزاوجي لها مع دالة أخرى لا تتمتع بهذه الخاصية، كأن تكون من فضاء لوبيغ مثلًا. هناك متتاليات خاصة تسمى متتاليات صاقلة يتم إدخالها على جداء التزاوج لإثبات الكثافة أو لإيجاد حلول صريحة لمعادلات تفاضلية أو ذات مشتقات جزئية.

5. الحلول الضعيفة وفضاءات سوبولاف

بالرجوع إلى ما تم تقديمه في الفقرة الثانية حول مفهوم المشتق الضعيف، وباعتماد دالة اختبارية مناسبة، يمكننا الانتقال من مسألة ذات قيم حدية لمعادلة ذات مشتقات جزئية من الرتبة الثانية إلى معادلة تتضمن مشتقات من الرتبة الأولى.

لنأخذ مثلا المسألة التالية:

$$(P)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f:\ \Omega \text{ في} \\ u = 0:\ \partial\Omega \text{ على} \end{cases}$$

حيث Ω يمثل مفتوحًا محدودًا من $\mathbb{R}^n$ ذا حافة $\partial\Omega$ مصقولة بالقدر الذي نريد، و f دالة تحقق شروطًا سيتم تحديدها بناء على طبيعة المسألة.

يمكننا الانتقال من المسألة المذكورة أعلاه إلى المسألة الموالية باستخدام دوال اختبارية v مختارة بعناية وتطبيق دستور المكاملة بالتجزئة المعمم (دستور غرين):

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega \mathrm{f}.v \qquad (FV)$$

كي تكون هذه المسألة (FV) معرفة جيدًا، يكفي أن تكون جميع الدوال المذكورة تنتمي إلى $L^2(\Omega)$ مثلًا. إن هذا يقتضي انتماء الدوال الاختبارية وجميع مشتقاتها الجزئية بالمفهوم الضعيف إلى فضاء لوبيغ $L^2(\Omega)$، وهذا هو بالضبط مفهوم انتماء هذه الدوال الاختبارية إلى فضاء سوبولاف $H^1(\Omega)$.

بتعميم هذا التعريف إلى أساس كيفي $p\geq1$ ومشتقات رتبتها أقل أو تساوي $m \in \mathbb{N}^*$، نحصل على فضاءات سوبولاف ذات الرتب الصحيحة $W^{m,p}(\Omega)$، وهي الوعاء الدالي لكثير من المسائل ذات القيم الحدية الخطية وغير الخطية.

تُسمى المسألة (FV) بالصيغة التغايرية للمسألة (P)، والتي يمكن كتابتها عمومًا على الشكل التالي:

$$(Au,v) = \langle F,v\rangle, \qquad \forall v\in V \qquad (Q)$$

حيث يُمثّل V فضاء شعاعيًا نظيميًا (من نمط سوبولاف في كثير من الأحيان)، ويُمثّل A مؤثرًا من V نحو ثنويه V'، كما يُمثل F تابعية على V (تطبيق من V نحو $\mathbb{R}$).

- إذا كان F شكلًا خطيًا مستمرًا وكان A تطبيقًا خطيًا مستمرًا وقسريًا (coercive)، فإن نظرية لاكس–ميلغرام (Lax-Milgram) تضمن لنا وجود حل وحيد للمسألة (Q) على الفضاء الهيلبرتي V. إن نظرية لاكس-ميلغرام لا يمكن تطبيقها إلا على فضاءات هيلبرتية، ومثلها نظرية ستامباخيا (Stampacchia) المتعلقة بالمتراجحات التغايرية لا تطبق إلى على محدب من فضاء هيلبرتي.
- أما إذا كان A تطبيقًا غير خطي، فإننا نلجأ إلى نظرية التوابع الرتيبة والمعروفة أحيانا باسم مينتي–براودر (Minty–Browder)، والتي يكفي أن يكون فيها A محدودًا، قسريًا، رتيبًا، مستمرًا بطريقة محددة، لنضمن وجود حل للمسألة (Q) دون الوحدانية التي تتطلب شروطًا إضافية.
- أما في حالة كون F غير خطي، فإننا نلجأ إلى طرق أخرى مثل طرق النقطة الصامدة والطريقة التغايرية، وطريقة التقريب لفايدو – غالاركين، وغير ذلك من الطرق التي لا يمكن حصرها هنا.

إن اشتراط القصرية للمؤثر A يعتبر أساسيًا في هذا النوع من المسائل، وبفقدانه نقول عن المؤثر A إنه مضمحل أو شاذ. في هذه الحالة علينا اللجوء إلى حيل أخرى، من بينها تغيير النظيم مثلًا باستخدام إحدى متباينات بوانكاريه (Poincaré)، أو الضرب في دالة مختارة بعناية تسمى دالة ثقالية، ومن ثم نضطر إلى الانتقال إلى فضاءات سوبولاف الثقالية. وفي كثير من الأحيان، لا يمكننا فعل ذلك فنلجأ إلى توسيع فضاء الحل أكثر كما سنبينه في الفقرة الموالية بإيجاز.

6. الحلول بمفهوم التوزيعات

إن الطرق السابقة لا تقدم لنا فضاءات مُثلى للحل، فهي عادة ما تكون جزءًا من الفضاء الثنوي للفضاء الذي ينتمي إليه مؤثر الطرف الأيمن. ومن أجل ذلك نلجأ إلى خطوة إضافية تسمى البحث عن صقالة الحل، أي اختيار أقل فضاء يمكن أن ينتمي إليه حل المسألة. تعتمد هذه الخطوة على اختيار مناسب للدوال الاختبارية وبعض التعاريف والخواص المتعلقة بفضاءات سوبولاف، تجعل الحل ينتمي إلى فضاءات مُثلى.

إن هذا يبين لنا أهمية الطرف الثاني وأن صقالته تؤثر بصفة مباشرة على صقالة الحل، وأن أقصى ما يمكن أن تقدّمه النظريات السابقة هو ضمان الحل في حالة وجود الطرف الثاني ضمن الثنوي الخاص بفضاء الدوال الاختبارية المرفقة. وهذا ما تم النص عليه بصراحة في نظريات لاكس–ميلغرام وستامباخيا ومينتي–براودر.

والسؤال المتبادر للذهن: ما الذي يحدث إذا اعتبرنا طرفًا ثانيًا غشيمًا (رديء الصقالة)، كأن يكون في فضاء لوبيغ الأوسع $L^1(\Omega)$ (لا تنس أننا نتكلم عن مفتوحات محدودة)، أو حتى يفقد كونه دالة، كأن يكون قياس رادون مثلا؟

يقتضي هذا النوع من المسائل البحث عن الحلول في مجموعة أوسع، ويكون الجداء الثنوي المعتبر في المسألة (Q) بمفهوم التوزيعات، فيتم اختيار دوال اختبارية من $D(\Omega)$، بينما يتم اختيار الحلول في فضاء سوبولاف واسع مثل $W_0^{1,1}(\Omega)$.

تعتمد الطريقة باختصار على بتر المؤثر A للحصول على متتالية مؤثرات قسرية (A_k) تمكننا تطبيق إحدى النظريات السابقة للوصول على حلول تقريبية، ومن ثم إعطاء تقديرات واستعمال نظريات التقارب والكثافة للوصول إلى الحل الأصلي للمسألة (Q).

7. خلاصة

يعتبر ميدان التحليل التابعي والمعادلات ذات المشتقات الجزئية من أوسع ميادين التحليل. وكما رأينا تتمتع الدوال الاختبارية بمكانة مرموقة ضمن هذين الميدانين الواسعين، وهذا ما يبين لنا الأهمية التي تحتلها هذه الدوال. كما تبرز أهمية اختيار الدوال الاختبارية في إيجاد الحلول الخاصة بالمسائل ذات القيم الحدية المتعلقة بالمعادلات ذات المشتقات الجزئية، وكذا نظريات الكثافة ضمن مختلف الفضاءات الدالية.

مراجع

[1] Boccardo, L. and Croce, G. Elliptic Partial Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 2014.
[2] Gallouët, T. and Herbin, R. Solutions faibles des équations aux dérivées partielles : Cours de Master 2 de mathématiques Université Aix Marseille, 2015.
[3] Garsoux, J. Espaces vectoriels topologiques et distributions, Dunod, Paris,1963.
[4] Khoan, V.-K. Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles, Vuibert, Paris, 1972.
[5] Leray, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63, 193-248, 1934.
[6] Schwartz, L. Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.