رياضيات القرن 6ه/ 12م:
حل مسائل من التقليد الرياضي العربي في الشرق الإسلامي

وسيلة غرابة
مخبر الإبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
أستاذة بقسم الرياضيات والإعلام الآلي، كلية العلوم، جامعة الدكتور يحي فارس، المدية
o.gheraba@yahoo.fr

مقدمة

من سمات الرياضيات في القرن السادس الهجري/الثاني عشر الميلادي، ظهور أعمال أصيلة في الرياضيات، واستثمار ومناقشة مسائل أثيرت في التقليد الرياضياتي العربي نفسه، والتي لا تُماثل المسائل التي أثيرت في مرحلة الترجمات، حيث كانت تلك المسائل تتعلق بالتراث اليوناني. فنشوء مادة الجبر وتجديده وتطويره وتطبيقه على الحساب التقليدي ساهم في تأليف بدايات التحليل العددي، من خلال تعميم طرائق استخراج الجذور وطرق تقريبها، وساهم أيضًا في اختراع كسور جديدة هي الكسور العشرية. وساهم الجبر المطور أيضًا في حل المعادلات العددية من خلال محاولة إيجاد حل جبري بواسطة الجذور للمعادلات التكعيبية. أما فيما يخص التحليل الديوفنطسي، فقد ساهم في محاولة إيجاد حلول في مجموعة الأعداد الصحيحة، خصوصًا للمعادلات المثلثية القائمة المعروفة بالثلاثيات الفيثاغورية، والتي كان تعميمها هو ما يُعرف حاليًا بمبرهنة فيرما (Fermat). كما كانت هناك أعمال ومعادلات أصيلة خاصة بمعادلات الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد الطبيعية.

كان تطور وتجديد علم الجبر بعد الخوارزمي على مسارين: الأول حسابي، وقد أسهم فيه رياضياتيون كالكرجي (نهاية القرن العاشر وبداية القرن الحادي عشر الميلادي) والسموأل (ت. 1174م) [4]. المسار الثاني الذي تطور من خلاله علم الجبر هو الجانب الهندسي بواسطة رياضياتيين ارتبطت أعمالهم بالهندسة. وقد توصل عمر الخيام (ت. 1131م) وشرف الدين الطوسي (ت. 1213م) إلى الدراسة الجبرية للمنحنيات، حيث وضعا الأسس للهندسة الجبرية [4].

لم تُحل معادلات الدرجة الثالثة (التي كان الخيام أول من صنّف أنواعها) كما كان الأمر بالنسبة لمعادلات الدرجة الثانية بطريقة الجذور، لكن جبر الخيام، وبعده شرف الدين الطوسي، قدّما حلولًا باستخدام معادلة الدائرة والقطع المكافئ، أو بواسطة قطع مكافئ مع قطع زائد، وبالتالي كانت هذه بداية لدراسة المنحنيات الهندسية [4].

1. السموأل المغربي

بالنسبة إلى المسار الأول، أي التقليد الحسابي، فقد كان من خلال حسبنة الجبر. أكمل السموأل (ت. 570ه/1174م) (1) أعمال الكرجي وذلك بدراسة قابلية القسمة في الحلقة $Q(x)+Q(1/x)$ وتقريب الكسور التامة بعناصر من الحلقة ذاتها وذلك للمرة الأولى. وتمكّن السموأل بالنسبة للجذر التربيعي لكثير حدود من إكمال أعمال الكرجي وتوسيعها للجذر التربيعي لكثير حدود ذي معاملات نسبية. من النتائج المباشرة لهذه الحسبنة ابتكار الكسور العشرية التي ساهمت في تطور الطرائق العددية للتقريب. يقدّم السموأل في كتابه **القوامي في الحساب الهندي** عرضًا للكسور العشرية، ويتضمن فصولًا عديدة مخصصة لمسائل التقريب، خاصة استخراج وتقريب الجذر الميمي الموجب لعدد ما [4].

نجد هذه النتائج أيضًا في كتابه **التبصرة في علم الحساب** [8]، وهو مؤلف في الحساب الهندي بقي متداولًا في اليمن حتى القرن السابع عشر، وهو ما تدل عليه نسخة نُسخت في 1084 هـ. يحتوي هذا الكتاب على حساب الكسور العشرية من خلال مثال وهو الكسر $\frac{5}{11}$. للحصول على التقريب، يضرب ويقسم بواقي القسمة الناتجة مرتين في العدد 10، ثم في 8، ثم في 5. ويذكر أنه يمكننا التقريب على أي رتبة شئنا ويمكن الضرب والقسمة على أي عدد من الأعداد التسعة، ويعطي الطريقة لإيجاد التفاوت بين القيمة الصحيحة والقيمة التقريبية للكسر، لكنه لا يعرف الدور للكسور العشرية [8]. يُقدّم ثلاث طرق لتقريب الجذور الصماء، اثنتان منهما تقريب بأجزاء عشرية، ويذكر أن أفضلها هو التقريب العشري الذي يحسبه بإضافة الأصفار بأس زوجي [8]. أساس هذه الطريقة هو نفس طريقة حساب الجذور الصماء بطريقة الأصفار في كتاب **التكملة في الحساب** لعبد القاهر البغدادي (ق. 10م) لكن الأخير يحسب الأجزاء الستينية في النظام الستيني [3].

2. عمر الخيام

لإعداد نظرية المعادلات التكعيبية وما دونها، كان على الخيام (440-526هـ/1048-1131م) (2) أن يتصور ويصوغ علاقات جديدة بين الجبر والهندسة. المفهوم المركزي الذي أدرجه في هذا السياق هو مفهوم وحدة القياس وعلاقته بالبعد، الذي سمح بتطبيق الهندسة على الجبر من خلال مناقشة مفهوم المقدار [5].

فالخيام في مقدمته التي أوردها قبل تصنيفه للمعادلات، يناقش مسألة المقادير الكمية المتصلة وهي الخط والسطح والجسم والزمان. تقابل الكميات الثلاث الأولى المقادير الجبرية: الشيء والمال والمكعب، ويذكر أن مال المال وما فوقها هي على سبيل المجاز لا تقع في المقادير، وإنّما تُستنتج بطريق نسبة المراتب بعضها من بعض. ثم قابل الكميات المتصلة والمقادير الثلاثة الأولى مع الأبعاد: البعد الواحد، والبعدان، والثلاثة أبعاد. وهو ما سمح له باستخدام وحدة الطول، ووحدة المساحة (وهي المربع)، ووحدة المجسمات (وهي المكعب) (3). هذه المفاهيم هي المذكورة من قبل ديوفنطس في كتابه **المسائل العددية**، الذي يتحدث فيه عن العدد باعتباره كثرة من الوحدات وأجزائه باعتبارها كسورًا لمقادير، ويذكر ثلاثة أنواع مختلفة للعدد: العدد الخطي وهو العدد المشارك للوحدة ويقسم بطريقة واحدة، والعدد السطحي وهو العدد المشارك بالقوة والذي يقسم بطريقتين، أي على عددين مساويين لأضلاعه، والعدد الجسمي وهو العدد المشارك وفقًا للمكعب ويقسم بطرق ثلاث [4].

كان الجبر في أعمال الخيام مختزلًا في مسألة المعادلات الجبرية، وكان عرضه الجبري محصورًا في هذا الفصل بالذات. هكذا إذن، وخلافًا للجبريين الحسابيين، أزاح الخيام من دراسته الجزء الذي اعتاد أن يحتل المكان الأكبر في أي عمل جبري معاصر، وهو دراسة القوى الجبرية وكثيرات الحدود والعمليات التي يمكن تطبيقها عليها والأعداد الصمّاء. ثم قدّم تصنيفه الخاص للمعادلات وطرح المقدمات الضرورية لكي يعالج أخيرًا بالترتيب، وبحسب تصاعد درجات صعوبتها، معادلات الدرجة الثانية ثلاثية الحدود، معادلات الدرجة الثالثة ثلاثية الحدود، معادلات الدرجة الثالثة رباعية الحدود، والمعادلات المتعلقة بمقلوب المجهول. وفي رسالته هذه، تَوصّل الخيام إلى نتيجتين: حل عام لمجمل معادلات الدرجة الثالثة بواسطة تقاطع قطعين مخروطيين، وحسابات هندسية أصبحت ممكنة عن طريق انتقاء وحدة قياسية للأطوال. كما حاول الخيام إعطاء حل عددي تقريبي للمعادلة التكعيبية عن طريق جداول علم المثلثات [5].

اهتم عمر الخيام كغيره من السابقين، بالمصادرة الخامسة من كتاب **الأصول**. ففي القسم الأول من كتابه **رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات كتاب أقليدس**، انتقد برهان ابن الهيثم واستبدله بآخر. رفض الخيام استعمال الحركات في الهندسة، وذكر أن سبب الخطأ الذي ارتكبه علماء سابقون في برهان المصادرة يعود إلى أنهم لم يعيروا الانتباه للمبادئ المقتبسة عن الفيلسوف (أي أرسطو). قدّم عمر الخيام خمسة من هذه المبادئ، وبرهن المصادرة بالاستناد إلى مصادرة

أخرى واضحة اعتبرها أكثر بساطة، مرتكزًا على الكميات المتجزئة إلى مالانهاية. وهكذا تجنب الخطأ المنطقي الذي ارتكبه أسلافه، واستخدم رباعي أضلاع له زاويتان قائمتان عند قاعدته وله أضلاع جانبية متساوية. قدّم ج. ساتشيري G. Saccheri (1667-1733م) فيما بعد الرباعي ذاته في نظريته عن الخطوط المتوازية، وكان ابن الهيثم استنادًا إلى مبدئه قد دحض إمكانية أن تكون الزوايا حادة أو منفرجة وبرهن المصادرة الخامسة [7].

في الفصلين الثاني والثالث من **رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات أقليدس**، قدّم الخيام مساهمة هامة بتعميم العدد الطبيعي حيث عالج على التوالي نسبة المقادير إلى تركيباتها. كان محتواها امتدادًا للكتاب الخامس من **الأصول** مع إسهامات جديدة. في الفصل الثاني، استخدم مصطلح "الرابع المتناسب" لثلاثة مقادير معطاة للتأكيد على وجود مقدار رابع مرفق بنسبة معطاة، بمعنى شيء يمكن معالجته كعدد. في الفصل الثالث، قدّم "الوحدة المقسمة" والتي سمحت بتعويض مقدار مرفق بنسبة معطاة بقياس (بالنسبة إلى وحدة مختارة). هذا القياس استخدم على أنه "قيمة" لهذه النسبة، أي أنه عدد، مما سمح بتوسيع العمليات الحسابية الكلاسيكية. هذه المساهمات النظرية توسعت بواسطة طبيعة الخوارزميات التي سمحت بتحديد تقريبي للقيمة العددية للمقدار والذي كان من غير الممكن تحديده هندسيا. هكذا تمكّن شرف الدين الطوسي (ت. 610ه/1213م) من إعطاء القيمة التقريبية الموجبة لحلول معادلات الدرجة الثالثة. وقد استطاع جمشيد الكاشي (ت. 833ه/1429م) في **الرسالة المحيطية** حساب قيمة الخطأ بأصغر قدر يريده، والقيمة المقربة لنسبة محيط الدائرة إلى قطرها، أي العدد π [10].

3. شرف الدين الطوسي

في استمرارية لتقليد حل المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة الذي أحدثه الخيام، والذي بدا فيه معزولًا، ومع النصف الثاني من القرن السادس الهجري/الثاني عشر الميلادي، كان هناك خلف واحد سار قدمًا في تحليلاته مطورًا ومحورًا في العمق النظرية الجديدة، وهو شرف الدين الطوسي (ت. 1213م) (4). يستهل الطوسي رسالته بدراسة منحنيين مخروطيين يستعملهما لاحقًا وهما القطع المكافئ والقطع الزائد بالإضافة إلى الدائرة، واكتفى بمخروط ذي زاوية رأسية قائمة لكي يحصل على هذه المنحنيات، كما اكتفى بدراسة ما يلزمه منها لأجل بنائه الهندسي للجذور الموجبة التي كانت أساس تشكيل نظريته للمعادلات من خلال ترجمة المزدوجة جبرية-هندسية. وفي حله العددي، استخدم الطوسي ما يعرف حاليًا بطريقة روفيني-هورنر (Ruffini-Horner) (5)، ويلي ذلك تصنيف للمعادلات من الدرجة الثالثة، حيث اختار الطوسي ترتيبها بحسب وجود أو عدم وجود الجذور الموجبة لها [5].

يدرس الطوسي في الجزء الأول، كما فعل الخيام، البناء الهندسي للجذور الموجبة لعشرين معادلة، لأن المعادلات المتبقية يمكن إرجاعها إلى إحدى المعادلات المدروسة بواسطة التحويلات التآلفية. وعلى غرار الخيام، كان يعتمد البناء الهندسي المستوي عند إمكانية تحول المعادلة إلى معادلة من الدرجة الأولى والثانية، كما كان يعتمد البناء الهندسي بواسطة اثنين من القطوع المخروطية الثلاثة المذكورة إذا كانت المعادلات تكعيبية. خصص الجزء الثاني من الكتاب لدراسة المعادلات الخمس المتبقية التي لا يوجد فيها أي جذر موجب، ولجأ بشكل مكثف إلى التحويلات التآلفية والمسافة بين نقطة ومستقيم. وفي هذا الجزء كان التحول العميق عن نهج الخيام حيث قام الطوسي بإدخال مفهوم النهاية العظمى لعبارة جبرية، وهو ما يشير به "بالعدد الأعظم". بعدها أدخل مفهومًا، لا يختلف إلا من حيث شكل الكتابة، للمشتق. في هذه الرسالة، وللمرة الأولى في تاريخ الرياضيات على الأرجح، وجدت فكرة تحديد النهايات القصوى للعبارات الجبرية من جهة، ومن جهة أخرى دراسة تغيرات دالة كثير حدود في جوار نهاية قصوى معينة لكي يتم احتساب هذه النهاية القصوى. لم يكن الموضوع هذه المرة احتساب حجم أقصى أو مساحة قصوى، بل احتساب القيمة القصوى لدالة كثير حدود. شكّل غياب

الأعداد السالبة عائقًا ممّا استدعى الإكثار من حالات الدراسة، فاضطر الطوسي إلى الاستعانة بمعادلتين مساعدتين في المسائل [5].

ما يلاحَظ في القرن السادس الهجري/الثاني عشر الميلادي أن أعمال الرياضياتيين كانت معزولة؛ فالسموأل المغربي عاش حتى العقد السابع من هذا القرن وتوفي بعد خمسين سنة من الخيام، وعاش السموأل وعمر الخيام في منطقتين متقاربتين نسبيًا هما مراغة ونيسابور، ولكن أعمال عمر الخيام لم تُذكر في المصادر التي وصلت إلينا من أعمال السموأل.

أمّا عن القرون اللاحقة، فتُذكر أعمال الخيام وشرف الدين الطوسي عند ابن فلوس (593-637 ه)، الذي كان مدرّسًا في القاهرة والشام، في مختصره الجبري **نصاب الحبر في حساب الجبر**، حيث قال عن معادلات الدرجة الثالثة: "فهذه خمسة وعشرون مسألة بعضها يمكن إخراجها بتلك الستة المشهورة، والتي لا يمكن إخراجها بها لابد فيها من تحقيق طريقة عمر الخيام المستخرجة من مقالات ديوفنطس لتخرج بها، فإن لم تخرج بها فلابد من طريقة الجدول الذي وضعه الإمام شرف الدين الطوسي" [9].

كما ذُكرت أعمال الخيام والسموأل وشرف الدين الطوسي أيضًا عند ابن الأكفاني (ت. 749ه) المقيم في القاهرة في كتابه **إرشاد الطالب إلى أسنى المقاصد**، حيث يذكر الكتب المصنفة في الجبر فيقول "ومن الكتب المختصرة فيه نصاب الجبر لابن فلوس لمارديني والمفيد لابن مجلي الموصلي، ومن المتوسطة كتاب المظفر الطوسي، ومن المبسوطة جامع الأصول لابن المحلي والكامل لأبي شجاع ابن أسلم، وبرهن السموأل على مسائله بالبراهين العددية وبرهن عليها الخيام بالبراهين الهندسية" [1].

في الغرب الإسلامي، يبدو أن أعمال عمر الخيام ونصير الدين الطوسي لم تصل حتى في زمان ابن خلدون (732-808ه/ 1332-1406م)، فهو يقول: "وقد بلغنا أن بعض أئمة التعاليم من أهل الشرق أنهى المعادلات على أكثر من الستة أجناس، وبلغها إلى فوق العشرين واستخرج لها كلها أعمالًا أتبعه ببراهين هندسية" [2].

التعليقات

(1) السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، مهندس رياضياتي، عالم بالطب والحكمة، أصله من المغرب، سكن بغداد مدة وانتقل إلى فارس، وتوفي بمراغة.

(2) هو عمر الخيام أو الخيامي، ولد بنيسابور توفي في مسقط رأسه بنيسابور.

(3) الخيام، عمر بن إبراهيم: **رسالة على البراهين على مسائل الجبر والمقابلة** [6].

(4) هو المظفر بن محمد الطوسي، من طوس (مشهد حاليا بإيران)، رياضياتي فلكي اشتهر بالأسطرلاب الخطي، قام بالتدريس في حلب والموصل، من تلاميذه كمال الدين بن يونس، توفي ببغداد.

(5) التماثل واضح في المفردات المستعملة والعمليات المنجزة عند كل من الطوسي وفييت. ومن الثابت أن مدرسة الكرجي قد عرفت طريقة روفيني-هورنر بالنسبة إلى الطريقة الخاصة التي ذكرها الطوسي [4].

المراجع

[1] ابن الأكفاني، شمس الدين، إرشاد الطالب إلى أسنى المقاصد، ت. أ. ب. ح. و. م. سليم الآمدي، المحرر، بيروت، 1322ه.

[2] ابن خلدون، عبد الرحمن، مقدمة ابن خلدون، المجلد 2، ت. ع. ا. م. الدرويش، المحرر، دار البلخي-مكتبة الهداية، دمشق، 2004.

[3] البغدادي، أبو منصور عبد القاهر بن طاهر، التكملة في الحساب، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد المخطوطات العربية، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، الكويت، 1985.

[4] راشد، رشدي، تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب، المجلد 1، بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، 1989.

[5] راشد، رشدي، الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر، مؤلفات شرف الدين الطوسي، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 1998.

[6] رضا زاده، رحيم رضا، موسوعة الخيام: رسائله العلمية والفلسفية والأدبية، ترجمة جلال زنكابادي، منشورات أرجوان –دار التكوين، دبي، 2013.

[7] روزنفيلد، بوريس أ.، و يوشكفيتش، أدولف ب.، الهندسة، في موسوعة تاريخ العلوم العربية، ج. 2، إشراف رشدي راشد بمعاونة ريجيس مورلون، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 2005.

[8] السموأل بن يحي بن عباس المغربي، التبصرة في علم الحساب، مخطوط مكتبة برلين رقم Glaser 40، ت.570هـ/1174 م.

[9] المارديني، ابن فلوس، نصاب الحبر في حساب الجبر، مخطوطة مكتبة برلين، رقم Lbg.199، من مجموع يحتل الصفحات 9-35.

[10] Djebbar, Ahmed, Les nombres et leurs propriétés en pays d'Islam, Encyclopédie de l'Islam iranienne, 2020.