الهندسة الكسورية: عالم من الجمال والتعقيد (1)

سكينة عثماني
أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
othmani.sakinaa@gmail.com

"لماذا توصف الهندسة في كثير من الأحيان بأنها "باردة" و"جافة"؟ يكمن أحد الأسباب في عدم قدرتها على وصف شكل السحابة أو الجبل أو الساحل أو الشجرة. فالسحب ليست كرات، والجبال ليست مخاريط، والسواحل ليست دوائر، واللحاء ليس أملسًا، ولا البرق يسير في خط مستقيم". بينوا ماندلبروت

يقدّم هذا المقال لمحة تاريخية عن الهندسة الكسورية عبر العصور الثلاثة: القديم، والوسيط، والحديث. يحتوي هذا الموروث التاريخي على العديد من الكسوريات التي تم توظيفها في مختلف الأعمال الفنية. بعد ذلك، يتم عرض المفاهيم الأساسية للكسير التي قدّمها عالم الرياضيات البولندي بينوا ماندلبروت، مع تصنيف الكسوريات وفقًا لخاصية التشابه الذاتي. كما يتم التطرق لبعض الكسوريات الكلاسيكية، بما في ذلك تلك التي اكتشفها فايرشتراس، كانتور، شيربينسكي، منجر، وكوخ. يعقب ذلك تسليط الضوء على نماذج مثيرة للاهتمام من كسيريات جوليا وماندلبروت، القائمة على الأنظمة الديناميكية والعمليات التكرارية. يُعرض أيضًا مفهوم البعد الكسوري الذي وضعه عالم الرياضيات الألماني هاوسدورف والروسي بيسيكوفيتش، والذي أسس عليه ماندلبروت تعريفه الأولي للكُسير. وأخيرًا، سنتطرق إلى بعض تطبيقات الهندسة الكسورية في الطبيعة والفن.

مقدمة

﴿بَدِيعُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ﴾ (سورة البقرة: 117)، ﴿إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ﴾ (سورة القمر: 49). من يتأمل في آيات الكون والخلق لا بد أن يرى عظمة وإبداع الله في كل شيء. هذا الخلق البديع المحيط بنا في الكون الفسيح ليس وليد الصدفة أو الظواهر العشوائية، وإنما نتيجة نظام متناسق ومنسجم، حيث كل صوره محكومة بقوانين معينة. فكل شيء خُلق بقياس، وهذا هو سر الإبداع في هذا الكون العظيم والمتوازن. درس العلماء الهندسة المنظمة التي تتحكم في كل أنماط الوجود والحياة، من أصغر الكائنات الحية إلى أكبر المجرات. يعتمد المنظور الهندسي على فهم عميق لهذه المظاهر الخلقية والنظم الهندسية المكونة لها، بما في ذلك الأشكال الهندسية والنسب الرياضية التي تُستخدم في تصميم جميع ما في الطبيعة.

منذ القدم، اهتم علم الرياضيات إلى حد كبير بالمجموعات والدوال التي يمكن تطبيق طرق التفاضل والتكامل الكلاسيكية عليها. أما تلك التي لم تكن سَلِسَة أو منتظمة بما فيه الكفاية، فقد تم تجاهلها باعتبارها مَرَضية ولا تستحق

الدراسة. ومن المؤكد أنه كان يُنظر إليها على أنها فضول فردي، ونادرًا ما كان يُنظر إليها كفئة يمكن أن تنطبق عليها النظريات العامة. إلا أن هذا الموقف تغيّر في السنوات الأخيرة، حيث تم إدراك أهمية دراسة الأجسام غير الملساء، والمسماة بالكسوريات.

يُعرف الكُسير على أنه شكل هندسي معقد ومفصل في الرياضيات على مقاييس مختلفة. وقد صاغ هذا المصطلح قبل أقل من خمسين عامًا أحدُ أكثر علماء الرياضيات ابتكارًا في التاريخ، وهو بينوا ماندلبروت Benoît Mandelbrot (1924-2010)، الذي كان أول من قدّم وشرح المفاهيم التي يقوم عليها هذا المنظور الجديد للهندسة. على الرغم من أن رياضياتيين آخرين مثل جورج كانتور Georg Cantor (1845-1918)، فيليكس هاوسدورف Felix Hausdorff (1868-1942)، هيلج فون كوخ Helge von Koch (1870-1924)، فاكلاف شيربينسكي Wacław Sierpiński (1882-1969)، غاستون جوليا Gaston Julia (1893-1978) قد توصلوا إلى رؤى منفصلة لفهم الكسوريات، فإن هذه الأفكار تم تجاهلها إلى أن جمعها ماندلبروت في نظام متماسك ورائع.

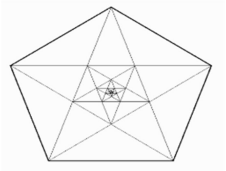
ظهرت نظرية الهندسة الكسورية كفرع مبتكر من فروع الرياضيات الحديثة، حيث تُمثّل رؤية ومنهجية جديدة بشكل أساسي للعالم. وعلى عكس الأشكال الهندسية المنتظمة للهندسة الإقليدية التقليدية، فإن معظم الأنظمة الطبيعية والعديد من المنشآت المبتكرة من قِبل الإنسان غير منتظمة الشكل. توفر الهندسة الكسورية إطارًا لا حدود له لوصف هذه الظواهر المعقدة وقياسها والتنبؤ بها. وقد اكتشف العديد من العلماء أن الهندسة الكسورية هي أداة قوية للكشف عن الأنماط الكامنة في الأنظمة المتنوعة ومعالجة التحديات الحرجة في العلوم التطبيقية.

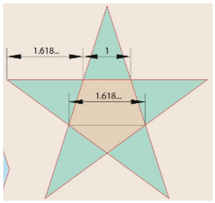
1. الخلفية التاريخية

1.1. أصول الهندسة الكسورية في العصور القديمة

يُعدّ فيثاغورس Pythagoras (570-495 ق.م.)، المولود في جزيرة ساموس اليونانية، مُعلمًا ومؤسسًا لإحدى أشهر المدارس الفلسفية. ترك فيثاغورس إرثًا فكريًا هائلًا كان له تأثير كبير على العلوم والفلسفة على مر العصور. كما يُعتبر من أوائل من تعاملوا مع التناسب المرتبط بالنسبة الذهبية، المعروفة أيضا باسم "العدد الذهبي" أو "النسبة الإلهية" في الثقافات القديمة، والتي تُقدّر قيمتها بحوالي 1.618.

ظهرت هذه العلاقة عدة مرات في سلسلة لا نهائية من الخماسيات والنجوم الخماسية المتداخلة، والتي تُظهر خاصية التشابه الذاتي المميزة للكسوريات، كما هو موضح في الشكل أدناه [9].





استخدم النحات اليوناني فيدياس Phidias النسبة الذهبية في منحوتاته بشكل متكرر ودقيق. ومن المفترض أن موروث فيثاغورس قد انتقل عن طريق أتباعه، ثيودورس القوريني Theodorus وأفلاطون Plato، إلى أقليدس الإسكندري (Euclid)، وهو عالم رياضيات يوناني عاش في القرن الثالث قبل الميلاد. يُعرف أقليدس بأبي الهندسة لمساهماته الفارقة في إرساء ركائز الهندسة الإقليدية. وتُعتبر كتبه، خاصة "الأصول"، من أهم كتب الرياضيات في التاريخ؛ إذ يؤرخ هذا الكتاب لمسلمات الهندسة الكلاسيكية كركيزة في بناء النظريات والبراهين [9] [10] [11].

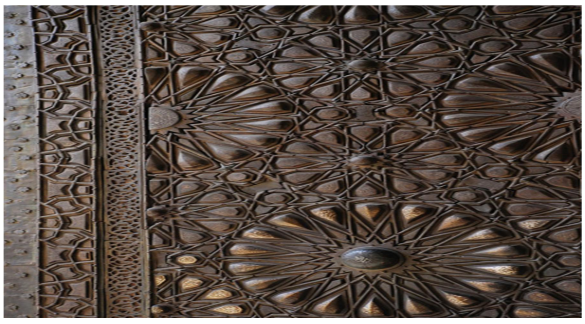
تُعتبر إسهامات أقليدس الأكثر شهرة واستخدامًا على نطاق واسع في واقعنا، وأثرها في أذهاننا عميق جدًا لدرجة أننا بطبيعتنا نحب ونقبل السلاسة المتواجدة في الأجسام المنتظمة والملساء. ونتيجة لذلك، فإن كل ما تصنعه اليد البشرية يكون على شكل مجموعة من عناصر، مثل المثلثات، المربعات، الدوائر وغيرها. لقد آمن أقليدس وخلفه، مثل أبولونيوس Apollonius وأرخميدس Archimedes ، إيمانًا راسخًا بأن كل شيء في هذا الكون له شكل من أشكال هذه الأجسام بطريقة ما. غير أن من الواضح أن هذه الأجسام الهندسية مثالية للغاية مقارنة بما لدينا بالفعل في محيطنا.

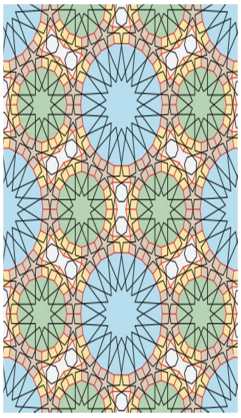
2.1. أصول الهندسة الكسورية في العصور الوسطى

استندت معارف الرياضيات في العالم الإسلامي إلى تقاليد مختلفة، منها الرياضيات اليونانية، ابتداءً من الكلاسيكيات الهندسية العظيمة لأقليدس وأبولونيوس وأرخميدس، إلى الحلول العددية للمسائل غير المحددة في كتاب ديوفنتوس (Diophantus) في الحساب، إلى الكتيبات العملية لهيرون (Hero). كان النظام الحسابي الهندي تقليدًا آخر سمح للهنود بالمساهمة في حل المسائل الفلكية بالطرق الجبرية، حساب المثلثات النسبية، وطرق من الهندسة الصلبة.

وبناءً على هذا الرصيد العلمي والمجهودات المبذولة طيلة العصور الوسطى، طوّر العلماء المسلمون، من بينهم محمد بن موسى الخوارزمي، وأبو بكر الكرجي، وعمر الخيام، وأبو الريحان البيروني، وابن الهيثم، علومهم الحسابية والهندسية. حيث نُقلت المعرفة بنظام الأعداد الهندي إلى المسلمين عن طريق الخوارزمي عبر رسالته القصيرة. أما في أواخر القرن العاشر، فقد قدّم الكرجي مفهومًا موسعًا للأعداد الحقيقية ضمن إطار استنتاجي، اعتمد فيه على تصنيف أقليدس للمقادير غير النسبية الواردة في الكتاب العاشر من "الأصول".

أبدى عمر الخيام أيضًا اهتمامًا بدراسة جذور الأعداد الصحيحة. علاوة على ذلك، فإن ابتكار المسلمين للأسطرلابات المتوارثة عن الحضارة اليونانية، حفّز الخيال الهندسي لدى العديد من العلماء المسلمين. نبغ كل من البيروني وابن الهيثم وغيرهم في تطوير الهندسة الإسلامية القابلة للتطبيق على التصاميم الزخرفية، والتي تتسم بالتكرار والتشابه المميزين أيضًا للأشكال الكسورية. تتضمن هذه التطبيقات نماذج خاصة بالزخرفة المعمارية المتجلية بوضوح في مسجد أصفهان وقصر الحمراء [1] [11].



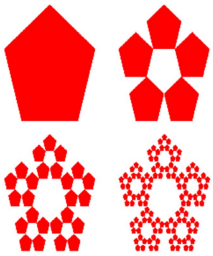


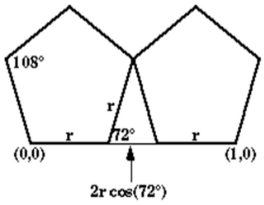
استخدمت أيضًا العديد من التصاميم الزخرفية في التقاليد الرومانية على أرضيات الكنائس، والتي يعود تاريخها إلى القرن الحادي عشر. تشبه هذه التصاميم إلى حد كبير الأشكال الكسورية وتستند إلى تركيب متعدد المقاييس. ينطبق هذا الوصف على الأرضيات المعروفة بأرضيات عائلة كوزماتي (Cosmati) الإيطالية، مما يوحي بطبيعة الحال بوجود تحليل كسوري. يتضح أن هناك بنية معينة في العديد من هذه الأرضيات تُعرف بما نسميه الآن مثلث شيربينسكي، وهو عبارة عن تقسيم فرعي على مقياس أدق وأدق من المثلثات المتشابهة ذاتيًا. هذه البنية إما تكون معزولة في الأرضيات على قرص رخامي أحمر، أو منسوجة في شبكات. تتكرر جميع مثلثات شيربينسكي الموجودة في هذه الزخارف حتى ثلاثة مستويات [3].

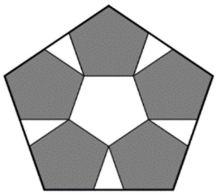
كان آلبرخت دورر Albrecht Dürer (1471-1528) رسامًا ونقاشًا خلال عصر النهضة، وعُرف أيضًا باهتمامه بالنظريات الهندسية. اكتسب شهرة واسعة في العشرينيات من عمره بفضل نقوشه الخشبية عالية الجودة. ويُعدّ من أقدم الفنانين الذين تعاملوا مع الأشكال الكسورية، حيث ابتكر مجسمًا كسوريًا يعتمد على الخماسيات المنتظمة [6]. يمكن إنشاؤه من خلال أخذ شكل خماسي منتظم طول ضلعه r وإحاطته بخمسة خماسيات متماثلة. الشكل الناتج يتوافق مع شكل خماسي أكبر طول ضلعه R مع خمس قطع على شكل مثلثات متساوية الساقين تقع في مركز كل ضلع. الزوايا المتساوية لهذه المثلثات هي 72 درجة، أما الزاوية الثالثة فهي نصف هذه الأخيرة، أي 36 درجة. تندرج النسبة بين أضلاع هذا المثلث ضمن "النسبة الذهبية"، المعروفة جيدًا منذ أيام فيثاغورس كما سبق الذكر.

كل ما نحتاج إلى معرفته الآن هو أن الضلع الأصغر للمثلث يمكن حسابه على أنه $2rcos(75°)$ كما هو موضح في الشكل أدناه. هذا يعني أن النسبة بين طولي ضلعي المثلث الخماسي هي

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2+2\cos(72)}.$$







يمكننا تخيل بدء عملية الإنشاء من المضلع الخماسي الكبير. بمعرفة طريقة حساب r من R، يمكننا رسم المضلعات الخماسية الستة الأصغر التي تقع داخل المضلع الكبير. لِمَ الاكتفاء بهذا؟ إذ يمكن أن يستمر التقسيم الفرعي، مع إنتاج خماسيات متناقصة باستمرار. كل مضلع خماسي جزئي هو نسخة من الكل. إذا استمر التقسيم الفرعي إلى ما لا نهاية، فإن خماسيات دورر تشكل جسمًا كسوريًا حقيقيًا [4].

3.1. أصول الهندسة الكسورية في العصر الحديث

لم يدخل علم الرياضيات الإسلامي إلى أوروبا إلا في أوائل القرن الثالث عشر الميلادي على يد ليوناردو دا بيزا Leonardo di Pisa (1240-1170)، الملقب بفيبوناتشي. تعلّم فيبوناتشي نظام الأعداد العربي وعاد إلى بيزا حيث شارك مع معاصريه الأوروبيين المعارف التي اكتسبها في إفريقيا. وقام بتأليف العديد من الكتب، أبرزها كتاب *Liber Abaci*. يعرض في هذا الكتاب مسألة الأرانب التي تحتوي على ما يُسمى بمتتالية فيبوناتشي، المرتبطة بشكل مباشر بالعدد الذهبي.

انتقلت أعمال ليوناردو دا بيزا إلى خلفائه مثل لوكا باتشولي Luca Pacioli (1517-1447) وليوناردو دافنشي Leonardo da Vinci (1519-1452)، وكلاهما كان شغوفًا بالحساب والهندسة، كما اشتركا في الاهتمام بالنسب. ويعترف باتشولي في أعماله بإسهامات أسلافه، بما في ذلك فيبوناتشي. وبعد حوالي أربعمائة عام من فيبوناتشي، وبعد حوالي 400 عام من وفاة فيبوناتشي، كان ارتباط متتالية فيبوناتشي بالعدد الذهبي لا يزال مجهولا. ولكن في ذلك الوقت، وضع عالم الرياضيات ألبرت جيرار Albert Girard (1632-1595) مسألة الأرانب في شكلها الرياضياتي، أي أن كل حد من المتتالية يُعرّف بجمع الحدين السابقين في المتتالية.

في عام 1753، أشار روبرت سيمسون Robert Simson إلى أن المتتالية التي يتم الحصول عليها بقسمة حدين متتابعين من متتالية فيبوناتشي متقاربة، وأن نهاية هذه المتتالية في الواقع هي العدد الذهبي. من الواضح إلى حد ما أنه في هذه الفترة، كان علماء مثل لوكا باتشولي قد فهموا بالفعل أهمية العدد الذهبي في الخلق والطبيعة [5] [12] [16]. رأوا بالتأكيد أن هذا التناسب الذهبي هو ما يميز أيضًا مختلف الكسوريات من حولهم في الطبيعة. ويعزى ذلك إلى اشتراك كل من التناسب الذهبي والكسوريات بخاصية التشابه الذاتي في بعض الحالات. تُعدّ الأصداف البحرية والصبار أمثلة توضيحية لذلك.

2. تعرّف أكثر على الهندسة الكسورية

ثمة منظور آخر يجب أن ننظر من خلاله إلى الطبيعة، يتجاوز نطاق الهندسة الإقليدية، وهو نوع جديد من الهندسة اللاإقليدية يُعرف الآن باسم الهندسة الكسورية. على الرغم من أن أصول هذا الفرع من الرياضيات ترتبط بعدد من المختصين الذين يعود تاريخهم إلى أواخر القرن التاسع عشر، إلا أن ولادتها من جديد، وتعريفها وتطورها اللاحق يُعزى في المقام الأول إلى عالم الرياضيات البولندي المولد ماندلبروت، بالطريقة نفسها التي تُنسب بها الهندسة الإغريقية إلى أعمال أقليدس.

يكمن الموضوع الفلسفي الأساسي للهندسة الكسورية في أن الطبيعة، على الرغم من أنها تبدو معقدة، تظهر خاصية أساسية تُعرف عمومًا باسم التشابه الذاتي. وبعبارة أخرى، بغض النظر عن مدى تعقيد شكل النظام أو سلوكه الديناميكي، إذا نظر المرء بعناية وخيال كافيين، يمكن أن يجد سمات عند أحد المقاييس مشابهة لتلك الموجودة على المقاييس الأخرى. وعلى الرغم من أن هذه الفكرة رائعة من حيث وضوحها، إلا أن هذه الطريقة في التفكير لم تبدأ في التطور رياضياتيًا وتطبيقها على مختلف فروع العلوم والهندسة إلا مؤخرًا.

1.2. تعريف الكسوريات

صاغ ماندلبروت مصطلح "الكسير" من الكلمة اللاتينية "fractus" التي تعني "مكسور" أو "مجزأ" في مقاله التأسيسي عام 1975. وهي صفة لاتينية تشير إلى شكل الحجر بعد ضربه بشدة [12].

في عام 1982، قدّم ماندلبروت التعريف المبدئي التالي للكسوريات: "يُعرف الكسير بأنه مجموعة يتجاوز فيها بعد هاوسدورف-بيسيكوفيتش البعد الطوبولوجي". على الرغم من صحة ودقة هذا التعريف، إلا أنه مقيد للغاية، فهو يستبعد العديد من الكسوريات المفيدة في الفيزياء. بناءً على ذلك، تراجع ماندلبروت في عام 1986 عن هذا التعريف واقترح بدلًا من ذلك ما يلي: "الكسير هو شكل مكون من أجزاء مشابهة للكل بطريقة ما". يتضمن هذا التعديل الميزة الأساسية التي تظهر في التجارب: الكسوريات تبدو متشابهة مهما كان المقياس. بالنظر إلى بعض السحب الركامية الجميلة، نجد أنها تتشكل، على مقاييس مختلفة، من أكوام كبيرة مع نتوءات صغيرة الحجم، والتي بدورها تحتوي على نتوءات أصغر [8] [13].

2.2. تصنيف الكسوريات

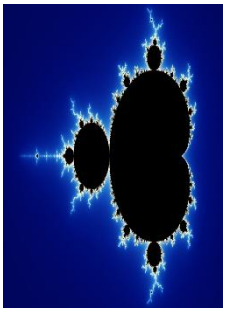
تمتاز الكسوريات بخاصية التشابه الذاتي، حيث إن الجسم المتشابه ذاتيا هو الجسم الذي تشبه الأجزاء المكونة له الكل. يحدث هذا التكرار للتفاصيل أو الأنماط على مقاييس أصغر تدريجيًا، ويمكن أن يستمر، في حالة الأجسام المجردة البحتة، إلى ما لا نهاية. في الواقع، يبقى الجسم المتشابه ذاتيًا ثابتًا تحت تغيرات المقياس، أي أن له تناظرًا متدرجًا. نكتفي بإعطاء مثال على بنية طبيعية تتسم بهذه الخاصية وهو القرنبيط. إذ لا يُعتبر كسيرًا رياضياتيًا كلاسيكيًا،

فهنا يظهر معنى التشابه الذاتي بسهولة دون الحاجة إلى أي رياضيات. يحتوي رأس القرنبيط على أفرع أو أجزاء، والتي عند إزالتها ومقارنتها مع الكل تكون متشابهة إلى حد كبير، ولكنها أصغر فقط [15].

وفقًا لهذه الخاصية يمكن تصنيف الكسوريات إلى ثلاثة أنواع:

أ. **التشابه الذاتي التام:** وهو أقوى أنواع التشابه الذاتي، حيث يظهر الكسير متطابقًا على مقاييس مختلفة. غالبًا ما تُظهر الكسوريات المعرفة بأنظمة الدوال التكرارية تشابهًا ذاتيًا دقيقًا. على سبيل المثال، نبات السرخس، حيث تكون كل سعفة من السرخس (ورقة كبيرة مقسمة) نسخة مصغرة من السرخس بأكمله، وكل فرع من السعفة مشابه للسعفة بأكملها، وهكذا.

ب. **التشابه الشبه الذاتي:** وهو مظهر غير دقيق للتشابه الذاتي، حيث يبدو الكسير مماثلًا بشكل تقريبي عند مقاييس مختلفة. تحتوي الكسوريات شبه المتشابهة ذاتيًا على نسخ صغيرة من الكسير بأكمله في أشكال مشوهة أو متدهورة. ومن الأمثلة على ذلك مجموعة ماندلبروت التي تُظهر نسخًا غير دقيقة للمجموعة الأصلية.



ج. **التشابه الذاتي الإحصائي:** هو النوع الأضعف من التشابه الذاتي، حيث يحتوي الكسير على مقاييس عددية أو إحصائية يتم الحفاظ عليها عبر المقاييس. كمثال عن ذلك، نشير إلى ساحل بريطانيا.

(للبحث صلة)

المراجع

[1] J. Bonner, Islamic Geometric Patterns : Their Historical Development and Traditional Methods of Construction, Springer, 2017.
[2] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Mathematische Annalen, 21 (4), 545-591, 1883.
[3] E. Conversano, L. Tedeschini-Lalli, Sierpinski triangles in stone on medieval floors in Rome, Journal of Applied Mathematics, 4, 114-122, 2011.
[4] A. J. Crilly, R. A. Earnshow, H. Jones, Fractals and Chaos, Springer Science & Business< Media, New York, 2012.
[5] R. A. Dunlap, The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Science, 1997.
[6] A. Dürer, The Painter's Manual, translated by W. L. Strauss, Abaris Books, New York, 1977.
[7] K. Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, New York, 1990.
[8] J. Feder, Fractals, Springer Science & Business Media, New York, 2013.
[9] T. L. Heath, A History of Greek Mathematics, Volume 1: From Thales to Euclid, Oxford University Press, 1921.
[10] R. Herz-Fischler, A Mathematical History of the Golden Number, Dover Publications, Mineola, New York, 1998.
[11] V. J. Katz, The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam, A Sourcebook, Princeton University Press, 2007.
[12] M. Livio, The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's most Astonishing Number, Browdway Books, New York, 2002.
[13] B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature W. H. Freeman & Co., New York, 1983.
[14] B. Mandelbrot, C. Evertsz, and M. Gutzwiller, Fractals and Chaos: The Mandelbrot set and Beyond, Springer-Verlag, New York, 2004.
[15] H.O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer, New York, 2004.
[16] M. Ronan, Symmetry and the Monster: The Story of One of the Greatest Quests of Mathematics, Oxford University Press, 2006.
[17] K. Weierstras, Uber continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die fur keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differential-quotienten besitzen, Mathematische Werke,71-74, 1872.