# بعض العلاقات بين الرياضيات والموسيقى عبر التاريخ

فتحي صالح
أستاذ بقسم العلوم الموسيقية، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
fethi.salah@g.ens-kouba.dz

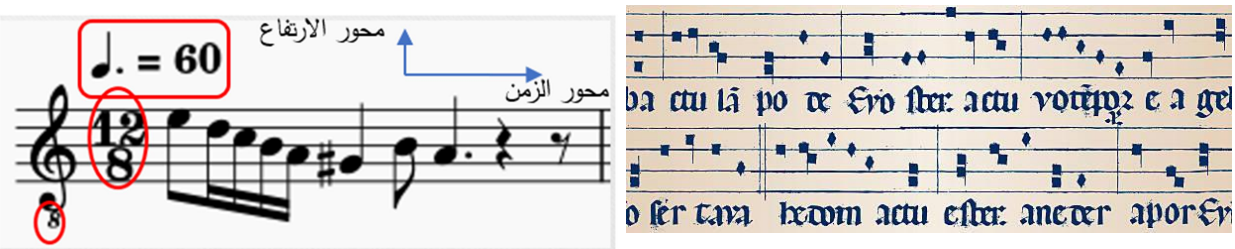
## مقدمة

العلاقات بين الرياضيات والموسيقى غنية ومتعددة الأوجه، تمتد إلى آلاف السنين وتشمل تقاليد ثقافية وفكرية مختلفة. قد تبدو الرياضيات والموسيقى، للوهلة الأولى، وكأنهما مجالان منفصلان تمامًا. ومع ذلك، فإن هذين الميدانين مترابطان بعمق في الواقع إلى الحد الذي يمكن أن تساهم فيه الموسيقى بدورها وبشكل فعّال في تطوير تعلّم الرياضيات [2]. بداية من التدوين الموسيقي ومن بنية المؤلفات الموسيقية إلى نظرية الأعداد والترددات (في الفيزياء وعلم الصوت الموسيقي)، تلعب الرياضيات دورًا أساسيًا في الموسيقى. تسلّط هذه المقالة الضوء بطريقة موجزة عن كيفية اجتماع هذين المجالين وكيف يكمل كل منهما الآخر من خلال تطورهما التاريخي.

قبل التطرق إلى الجوانب التاريخية للعلاقات بين الرياضيات والموسيقى، من المفيد أن نقدّم باختصار، فيما يلي -خاصة للقرّاء غير المتخصصين في الموسيقى- أمثلة تبيّن بوضوح وجود بعض الرموز والعناصر الرياضية الأولية والبسيطة في التدوين الموسيقي، ليكون ذلك بمثابة مدخل لاكتشاف العناصر التي تسلط الضوء على العلاقات المذكورة.

في الواقع، يمكننا من خلال التدوين الموسيقي أن نرى بشكل مباشر استعمال أبسط العناصر الرياضية في المجال الموسيقي. العلاقة بين الرياضيات والموسيقى واضحة بالفعل في التدوين الموسيقي، وخاصة التدوين الحديث. ومع تطور أدوات الاكتشافات العلمية والتكنولوجية، نكتشف تدريجيًا مدى وحجم استخدام معظم الفروع الرياضية في جميع مستويات وجوانب الواقع الموسيقي تقريبًا (انظر: [1] و[8] و[11] و[12]).

## 1. الأعداد وبعض الأشكال الهندسية المستخدمة في التدوين الموسيقي




الشكل 1. مقارنة بين تدوين موسيقي قديم (يمين) وحديث (يسار)

على الرغم من أن أقدم المدونات الموسيقية تستخدم العلامات الأيقونية أو الحروف الأبجدية، يظهر في الشكل1 مدى استعمال الأعداد وبعض الأشكال الهندسية في التدوين الموسيقي، مما يبيّن أنه لا يمكن الاستغناء عن هذه العناصر الرياضية في تمثيل الأصوات وتغيرات خصائصها (مثل المدة الزمنية لكل صوت، سرعة تدفق الأصوات، حدّة أو ارتفاع الأصوات، إلخ) حيث بقيت هذه العناصر متداولة حتى عصرنا الحالي.

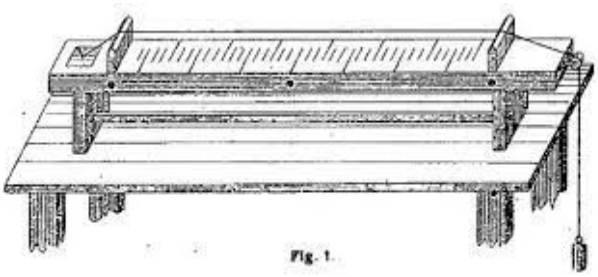
بالنسبة للأشكال الهندسية (في مثال التدوين القديم للشكل 1 الذي يرجع تاريخه إلى حوالي القرن الثالث عشر الميلادي) نلاحظ، بالإضافة إلى الخطوط الأفقية المتوازية (المعروفة بـ"المدرج الموسيقي"، الذي يمثّل محورًا لدرجات الحدّة أو الارتفاع) والخطوط العمودية المتوازية (التي تحدّد مجالات زمنية متساوية أو وحدات زمنية في محور الزمن)، وجود أشكال مثل المربعات والمعيّنات التي تشير إلى المدة الزمنية النسبية لكل صوت مدوّن. ورغم أن هذه المربعات والمعينات تنتُج عن استخدام ريش الطيور والحبر في كتابة الموسيقى (تمامًا كما استُخدم لكتابة اللغة)، فإن المدوّنين كانوا يدركون أهمية وجود أشكال هندسية ثابتة وإمكانية تنويعها (مثل دوران الريشة الذي سمح بتحويل المربع إلى معيّن). مع مرور الزمن، تحولت المربعات والمعيّنات إلى أشكال بيضاوية في التدوين الحديث بفضل تطور وسائل التدوين والطباعة.

## 2. من العصر الإغريقي القديم إلى نهاية العصور الوسطى في أوروبا والعالم العربي الاسلامي

رغم أن حضارات أقدم، مثل الصين والهند وبلاد الرافدين، سبقت الحضارة اليونانية في اكتشاف العديد من الظواهر المثيرة للاهتمام، إلا أنه كثيرًا ما يُقال إن الفضل يعود إلى فيثاغورس (حوالي 570-495 ق.م) في اكتشاف العلاقة بين طول الوتر ودرجة (حدّة) النغمات (أي الأصوات ذات ميزة وسيقية) والمسافات (الفواصل) بينها، وذلك باستخدام أو صنع "أحادي الوتر" أو المونوكورد، الذي كان يسميه الاغريق "القانون" (kanon). وهو جهاز بسيط يحتوي على وتر واحد ومسطرة تتيح قياس طول ذلك الوتر أثناء الاستماع إلى الأصوات الناتجة عن النقر عليه.

يُعدّ "القانون" أداة مهمة في دراسة العلاقة بين حدّة النغمات الناتجة عن اهتزاز الوتر والنسب العددية المستنتجة من النسب بين أطوال الأجزاء المهتزة للوتر ذاته. هذا الجهاز مرتبط ارتباطًا وثيقًا بما اكتشفه فيثاغورس ثم أقليدس، ولكن في سياق مختلف بالنسبة لهذا الأخير. استخدم فيثاغورس القانون لإثبات أن درجة النغمة الموسيقية مرتبطة بطول الوتر المهتز، وأن النسب البسيطة (مثل 1:2، 2:3 و4:3) تُنتج أنغامًا وفواصل (مسافات بين النغمات) متناغمة أي ذات ميزة الانسجام.

يُعرف أقليدس، الذي عاش حوالي 300 قبل الميلاد (أي بعد حوالي قرنين من فيثاغورس)، بكتابه الشهير في تاريخ الرياضيات بعنوان "الأصول" (Elements Euclid's). كما يُنسب إليه، دون توثيق مؤكد، كتابان هما: "تقطيع القانون" (Sectio Canonis) [10] و"مدخل إلى الهارمونيا" (Introductio Harmonica). ومن خلال هذين الكتابين، يتضح جليًا استعماله للقانون، وبالتالي اهتمامه بعالم الموسيقى والنغمات المنسجمة وعلاقتها بالنسب العددية.



الشكل 2. أحادي الوتر أو المونوكورد أو "القانون"

بفضل استخدام "القانون" تم اكتشاف العلاقة بين طول الوتر وطبقة أو درجة أو حدّة الأصوات الموسيقية وإمكانية ترتيبها فيما يُعرف بـ "السلم الموسيقي" (musical scale)، أي مجموعة النغمات المستخدمة لإنتاج المقطوعات الموسيقية. كان هذا قبل اكتشاف مفهوم التردد أو التواتر (frequency) في نهاية القرن السابع عشر وبداية القرن الثامن عشر، مع تطور علم فيزياء الصوت واكتشاف ميكانيك الاهتزازات. بعد ذلك، لجأ الباحثون إلى استخدام وحدة لقياس درجة أو حدة النغمات، وهي "الهرتز" (Hz)، التي تُمثّل عدد الاهتزازات في وحدة الزمن، أي الثانية. وقد سُمّيت هذه الوحدة نسبةً إلى المهندس والفيزيائي الألماني هاينريش هيرتز Heinrich Hertz (1857-1894).

أما أشهر الفلاسفة الإغريق، أفلاطون (حوالي 427-347 ق.م.) وأرسطو (388-322 ق.م.)، فقد استكشفا الروابط بين الرياضيات والموسيقى. اعتبر أفلاطون الموسيقى وسيلة لتثقيف الروح، بينما اهتم أرسطو بالمبادئ الرياضية التي تقوم عليها السلالم الموسيقية و"التناغم" أو "الانسجام" (Harmony) بين الأصوات الموسيقية.

كتب الفيلسوف الروماني بويثيوس Boethius (480-524) كتابًا عنوانه "مؤسسة الموسيقى" (De Institutione Musica)، وكان لهذا الكتاب تأثير كبير في أوروبا خلال العصور الوسطى. صنّف بويثيوس الموسيقى إلى ثلاثة أنواع: "موسيقى الأجرام السماوية" (mundana Musica)، وهو نوع يعبّر عن العلاقة بين علم الفلك والموسيقى؛ و"موسيقى الجسد والروح البشرية" (Humana Musica)؛ و "الموسيقى المادية" (Musica Instrumentalis)، وهو النوع الأقرب إلى المفهوم الحالي للموسيقى. وقد جمع عمله بين المبادئ الرياضية ونظرية الموسيقى.

كان لنظرية الموسيقى في الحضارة العربية الاسلامية تأثير كبير على الموسيقى ونظرية الموسيقى في أوروبا [4]، ولا سيما من خلال ترجمات النصوص العربية إلى اللاتينية، خاصة في المركز الأندلسي للترجمة: طليطلة [5]. لعبت هذه الترجمات دورًا في نقل المعرفة الموسيقية والفلسفية بين الثقافات، مما أدى إلى إثراء نظرية الموسيقى الغربية. ساهم المؤلفون العرب والمسلمون بشكل كبير في تطوير النظرية الموسيقية، حيث دمجوا الجوانب الرياضية والفلسفية والجمالية. ولم يقتصر عملهم على إثراء الموسيقى فحسب، بل كان لهم أيضًا تأثير عميق على الموسيقى ونظرية الموسيقى على مستوى العالم.

حظيت نظرية الموسيقى، خاصة خلال العصر الذهبي للحضارة الإسلامية (تقريبًا من القرن الثامن إلى القرن الثالث عشر الميلاديين)، بتاريخ غني ومؤثر. ونذكر فيما يلي أهم المؤلفين [7]:

أ. يعقوب بن اسحاق الكِنْدِي (801-873 م)، ومن أشهر مؤلفاته في الموسيقى [6]:

- الكتاب الأعظم في التّأليف
- رسالة الكندي في اللّحون والنّغم
- رسالة في أجزاء خبريّة في الموسيقى (الشكل 3)
- رسالة في خبر صناعة التّأليف
- كتاب المصوّتات الوتريّة من ذات الوتر الواحد إلى ذات العشرة أوتار
- مختصر الموسيقى في تأليف النّغم وصنعة العود -> قول على اللّحون (أقليدس)

الشكل 3. رسالة الكندي في أجزاء خبريّة في الموسيقى

من مخطوط المكتبة الوطنيّة - برلين (ألمانيا): 1240/424

ب. كان الفارابي، المعروف بأبي نصر محمد بن محمد الفارابي (872-950م)، أحد أعظم فلاسفة الإسلام وعلماء الموسيقى في العصور الوسطى. له إسهامات بارزة في الموسيقى، حيث كتب العديد من المؤلفات التي أثّرت في تطور هذا العلم، ومن أهم مؤلفاته في الموسيقى [3]:

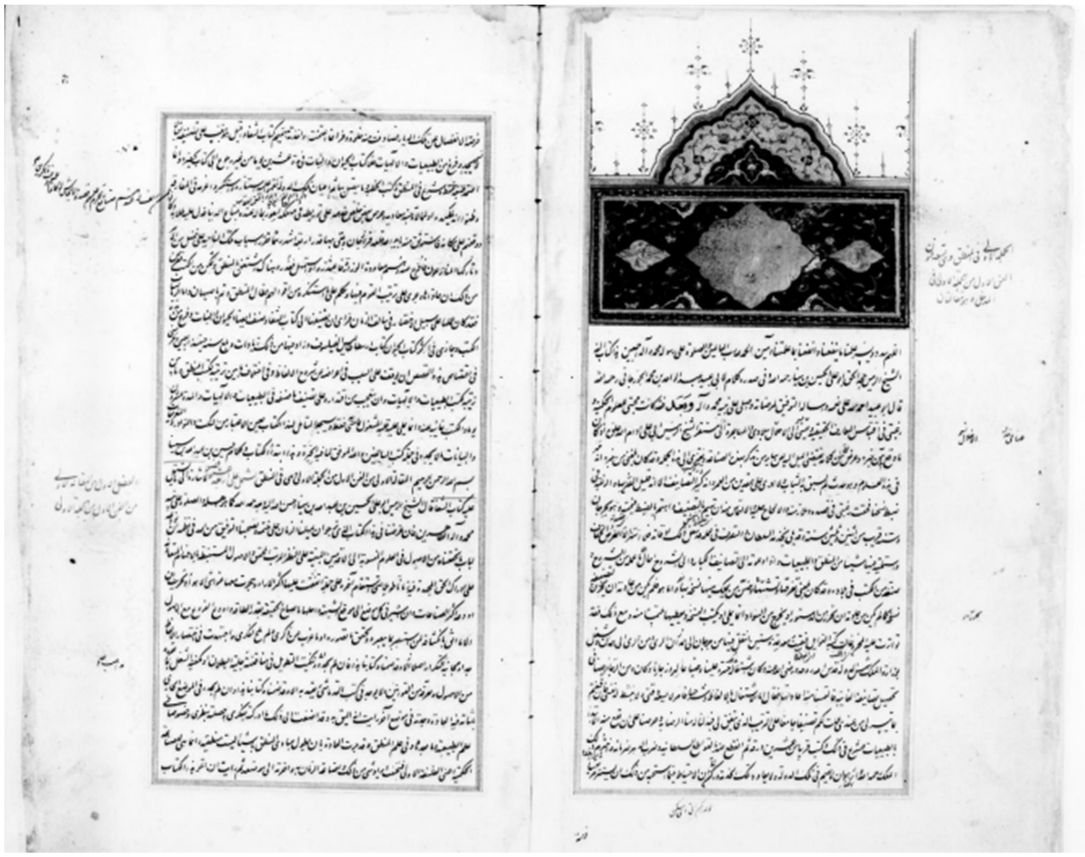
- المدخل إلى صناعة الموسيقى (المقالة الأولى)
- كتاب إحصاء العلوم
- رسالة في علم الموسيقى
- كتاب إحصاء الإيقاعات
- كتاب الموسيقى الكبير (الشكل 4)
- كتاب جليل في علم الموسيقى وعلم التّأليف والخواص من علوم الفلسفة النظرية
- كتاب في الإيقاعات
- من كتاب المدخل في الموسيقى

الشكل 4. من "كتاب الموسيقى الكبير" للفارابي
من مخطوط المكتبة الوطنيّة - مدريد (اسبانيا): 241

كانت إسهامات الفارابي في الموسيقى ذات تأثير كبير، ليس فقط في العالم الإسلامي، بل في الغرب أيضًا، حيث تُرجمت أعماله إلى اللاتينية ودُرست في أوروبا لعدة قرون.

ج. من جهته، كان ابن سينا (980-1037م)، المعروف بأبي علي الحسين بن عبد الله بن سينا، عالمًا موسوعيًا وفيلسوفًا وطبيبًا، وله إسهامات مهمة في علم الموسيقى. وعلى الرغم من أن الموسيقى لم تكن مجال تخصصه الرئيسي، إلا أنه تناولها ضمن كتاباته الفلسفية والطبية. من أهم مؤلفاته التي تناولت الموسيقى:

- القانون في الطّب
- رسالة في الحروف
- رسالة في النّفس
- في بيان أقسام العلوم الحكمية والعقلية
- كتاب الشّفاء / الرياضيات: جوامع علم الموسيقى (الشكل 5)
- كتاب النّجاة



الشكل 5. من "كتاب الشفاء" لابن سينا
من مخطوط المكتبة الوطنية الفرنسية – 6829

لم تكن نظرة ابن سينا للموسيقى على أنها مجرد فن جمالي، بل أيضًا كعلم يرتبط بالرياضيات والفلسفة وله دور في العلاج والصحة. لقد أثّرت إسهاماته في هذا المجال بشكل كبير في الفكر الموسيقي في العالم الإسلامي وخارجه.

لا يمكن أن ننهي هذه اللمحة التاريخية الموجزة عن الحضارة العربية الإسلامية دون ذكر عالمين يرجع لهما الفضل كذلك، ولو بطريقة غير مباشرة، في ربط الرياضيات بالموسيقى، وهما: صفي الدين الأرموي وشمس الدين الصيداوي الدمشقي.

د. صفي الدين عبد المؤمن أبو يوسف بن فخر الأرموي (1230-1294م) هو موسيقي وعالم موسيقى بارز من العصر العباسي، ويُعتبر من أهم المنظرين في علم الموسيقى في التاريخ الإسلامي. كان له تأثير كبير في تطوير النظرية الموسيقية العربية الإسلامية. من أشهر مؤلفاته في الموسيقى:

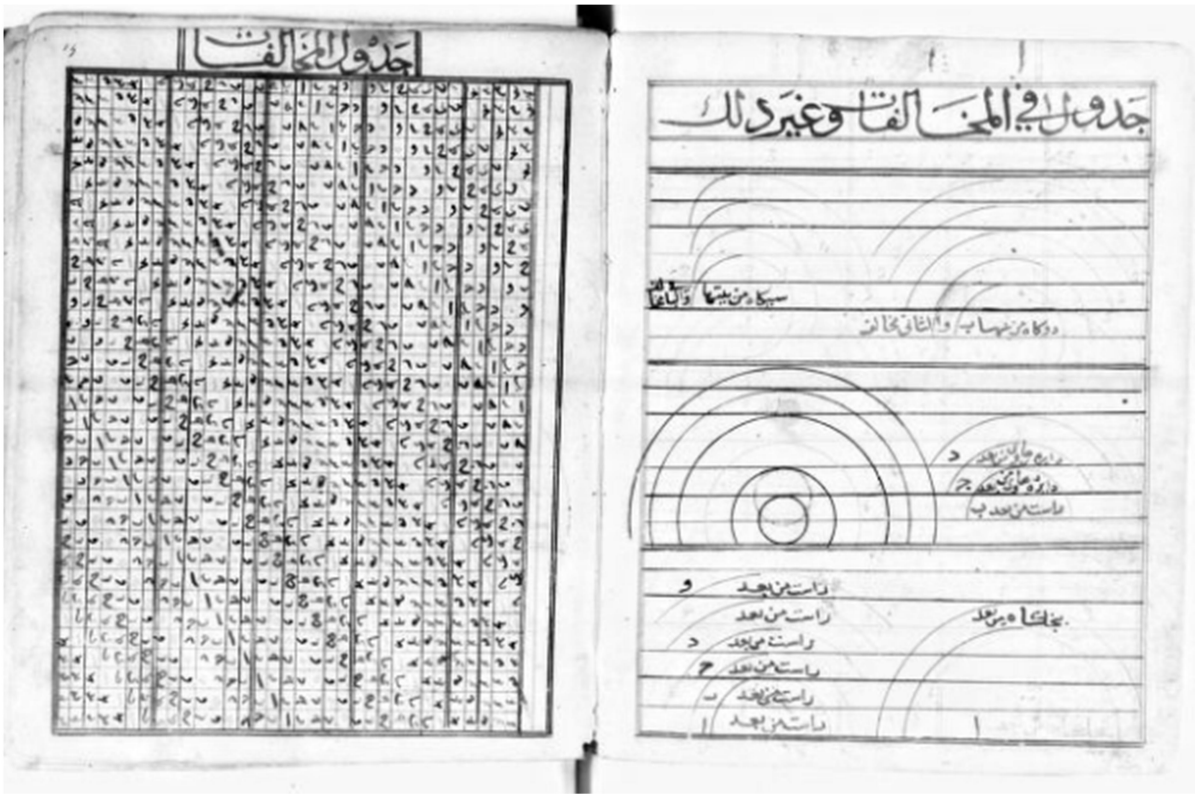
- الرسالة الشرفيّة في النسب التأليفية (الشكل 6)
- فائدة في علم الموسيقى
- كتاب الأدوار

الشكل 6. من "الرسالة الشرفية في النسب التأليفية" للأرموي
من مخطوط المكتبة الوطنيّة - برلين (ألمانيا): Bs. Lbg. 11

أسس صفي الدين الأرموي من خلال هذه المؤلفات قواعد النظريات الموسيقية العربية، وكان له تأثير كبير على تطور الموسيقى في العالم الإسلامي والمناطق المجاورة. تُعتبر أعماله مرجعًا لا غنى عنه لدراسة الموسيقى العربية التقليدية وتاريخها.

هـ. شمس الدين الصيداوي الدمشقي (ت. 1504م)، المعروف أيضًا باسم شمس الدين محمد أبو عبد الله الذهبي الصيداوي الدمشقي، هو موسيقي ومنظر موسيقي من العصر المملوكي. ومع ذلك، لا تتوفر الكثير من المعلومات حول تفاصيل حياته أو مؤلفاته. اشتهر الصيداوي في الأوساط الموسيقية في عصره بإسهاماته في توثيق وترسيخ علم الموسيقى العربية. من أهم وأشهر مؤلفاته:

- اللّفظ الرّائق في مدح خير الخلائق
- كتاب الإنعام في معرفة الأنغام (الشكل 7)
- كنز الطّرب وغاية الأرب في مدح سيّد العجم والعرب




الشكل 7. من "كتاب الإنعام في معرفة الأنغام" للصيداوي
من مخطوط المكتبة الوطنيّة - باريس (فرنسا): 2480

على الرغم من أن مؤلفاته ليست مشهورة بقدر مؤلفات علماء موسيقى مثل الفارابي أو صفي الدين الأرموي، إلا أن شمس الدين الصيداوي الدمشقي ساهم في تطور النظرية الموسيقية العربية وإثراء التراث الموسيقي الإسلامي.

## 3. من عصر النهضة إلى القرن التاسع عشر

كانت العلاقات بين الرياضيات والموسيقى وثيقة ومتداخلة بشكل كبير من عصر النهضة إلى القرن التاسع عشر. يمكن تتبع هذه العلاقات من خلال عدة مفاهيم وأفكار، نعرض أبرزها فيما يلي:

- **النظرية الفيثاغورية**

قبل عصر النهضة، كان هناك اهتمام كبير بنظرية فيثاغورس التي تربط بين الرياضيات والموسيقى. اكتشف فيثاغورس العلاقة بين الطول النسبي للأوتار المهتزة والأنغام الموسيقية الناتجة عنها. ومن خلال هذه النظرية، تم التأكيد على أن النسب الرياضية تتحكم في تناغم الأصوات، وهذا المفهوم بقي مؤثرًا خلال عصر النهضة وما بعده.

- **التناغم والنسب**

في عصر النهضة (من القرن الرابع عشر إلى السابع عشر)، كان هناك تركيز على الجمال والتناسب، ليس فقط في الفن والهندسة المعمارية، ولكن أيضًا في الموسيقى. واستخدمت النسب الرياضية لإنشاء ألحان متناغمة. كما استخدم الموسيقيون والملحنون النسب البسيطة مثل 2:1 (الأوكتاف)، 3:2 (الخامسة المثالية أو التامة)، و4:3 (الرابعة المثالية أو التامة) لبناء ألحانهم.

- **الاهتمام العلمي والرياضي بالموسيقى**

في القرنين السابع عشر والثامن عشر، ازدادت الأبحاث العلمية التي تهتم بالموسيقى بشكل رياضي. على سبيل المثال، استخدم الملحن الألماني يوهان سيباستيان باخ Johann Sebastian Bach (1685-1750) الرياضيات في تأليف موسيقاه، حيث كان يهتم بالتناظر والتناغم الرياضي في أعماله، وبالخصوص في فن "الفوقا" (Fuga). في الوقت ذاته، بدأ علماء الرياضيات مثل رينيه ديكارت René Descartes (1596-1650) وكارل فريدريش غاوس Carl Friedrich Gauss (1777-1855) بالاهتمام بالموسيقى من منظور رياضي.

- **نظرية الأعداد، الاحتمالات في الموسيقى**

خلال القرنين الثامن عشر والتاسع عشر، تطورت نظرية الأعداد وتطبيقاتها في الموسيقى. استخدم ملحنون مثل وولفغانغ أماديوس موزارت Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) الأعداد والنسب الرياضية، بل وحتى الاحتمالات (Musikslisches Würfelspiel/Musical dice game) في تنظيم مؤلفاتهم الموسيقية، حيث كانت الأنماط والهياكل الموسيقية تعتمد على قواعد رياضية.

- **علم فيزياء الصوت**

مع تطور علم فيزياء الصوت في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر، بدأ العلماء في فهم كيفية إنتاج الأصوات ونقلها. أدى ذلك إلى تحسين الآلات الموسيقية وتطوير نظرية الموسيقى بشكل أكبر. هؤلاء العلماء، ومن بينهم هيرمان فون هيلمهولتز Hermann von Helmholz (1821-1894)، درسوا مكونات الأصوات وكيفية إنتاجها وتنظيمها، مما ساهم في فهم أعمق للعلاقة بين الرياضيات والموسيقى.

## 4. في القرن العشرين

في القرن العشرين، تطورت العلاقة بين الرياضيات والموسيقى بشكل كبير، حيث شهدت هذه الفترة تغييرات جذرية في كل من النظرية الموسيقية والتقنيات الموسيقية، مع زيادة استخدام المفاهيم الرياضية في الموسيقى. يمكن تقسيم هذه العلاقة إلى عدة جوانب رئيسية:

- **التأليف الموسيقي القائم على النظم الرياضية**

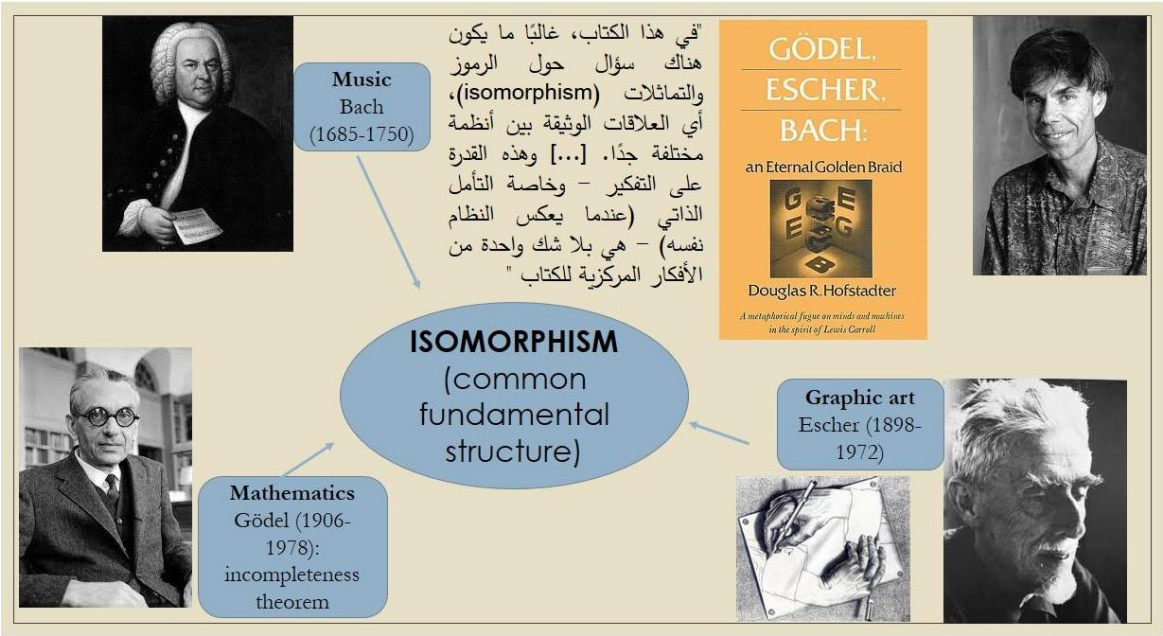
– **الموسيقى التسلسلية** (Serialism): في أوائل القرن العشرين، ابتكر الملحن النمساوي أرنولد شونبيرج Arnold Schönberg (1874-1951) نظامًا موسيقيًا جديدًا يسمى "الدوديكافونية" (dodecaphony) أو "الموسيقى الاثني عشرية النغمات" (twelve-tone serialism)، وهو نظام يستخدم سلسلة من 12 نغمة موسيقية دون تكرار لأي نغمة حتى تُستخدم جميع النغمات. هذا النظام يتطلب تنظيمًا صارمًا للنغمات، ويُعد مثالًا على استخدام النظم الرياضية في التأليف الموسيقي.

– **الموسيقى العشوائية** (cAleatoric musi): تم استخدام الرياضيات أيضًا في الموسيقى العشوائية، حيث يتم استخدام طرق حسابية أو عشوائية لتحديد عناصر معينة من العمل الموسيقي، مثل الألحان أو الإيقاع. يُعد جون كيج John Cage (1912-1992) من أشهر الملحنين في هذا السياق، حيث استخدم العمليات العشوائية والحسابية لإنشاء موسيقاه.

- **تحليل الموسيقى باستخدام الرياضيات**

في القرن العشرين، تم استخدام الرياضيات لتحليل الموسيقى بطريقة أكثر دقة. على سبيل المثال، استخدم علماء الموسيقى مثل ألين فورتي Allen Forte (1926-2014) نظرية المجموعات (Set theory) لتطوير طرق

جديدة لتحليل الموسيقى الكلاسيكية والحديثة، مما أتاح فهمًا أعمق للبنية والتناغم الموسيقي. ومع تطور التحليل، تم اكتشاف علاقات وثيقة بين مجالات متنوعة مثل الرياضيات والموسيقى والفنون التصويرية (الشكل 8)، كما أظهر ذلك بوضوح دوجلاس هوفستادتر (Douglas Hofstadter) في كتابه المعنون بـ Gödel, Escher, Bach : an Eternal Golden Braid [9]. ويسلط هوفستادتر الضوء على العلاقات التماثلية (isomorphism) بين أعمال باخ وعالم الرياضيات كورت جودل Kurt Gödel (1906-1978) من خلال نظريته في عدم الاكتمال (incompleteness theorem) وأعمال الفنان التشكيلي الهولندي موريتس كورنيليس إيشر Maurits Cornelis Escher (1898-1972).




الشكل 8. علاقة التماثل (isomorphism) بين الرياضيات، الموسيقى والفن التشكيلي

- **المعالجة الرقمية للأصوات**

مع ظهور الحاسوب في منتصف القرن العشرين، تم استخدام الرياضيات على نطاق واسع في معالجة الأصوات. تطورت خوارزميات لتحليل الصوت وتركيبه، مما أتاح إنشاء أصوات جديدة وتطوير الموسيقى الإلكترونية. كانت رياضيات التحليل التوافقي (Fourier analysis) أساسًا لفهم كيفية تحليل الصوت وتركيبه.

- **التأليف الموسيقي بواسطة الحاسوب**

في منتصف القرن العشرين، بدأت الحواسيب تُستخدم لإنشاء الموسيقى باستخدام الخوارزميات الرياضية لتوليد الألحان والإيقاعات. الملحن اليوناني إيانس كزيناكيس Iannis Xenakis (1922-2001) كان من أبرز من استخدم تقنيات رياضية مثل الحساب الإحصائي (statistical calculation) والنظرية الاحتمالية (process Stochastic) لتوليد موسيقى بواسطة الحاسوب.

- **الموسيقى الكسورية (Fractal music)**

في أواخر القرن العشرين، بدأ بعض الملحنين في استكشاف استخدام الرياضيات الكسورية في الموسيقى. الكسوريات، تلك الهياكل الرياضية المعقدة التي تتكرر بنمط ذاتي، أضافت بُعدًا جديدًا للإبداع الموسيقي، حيث تم تطبيقها لإنشاء تراكيب صوتية ذات طابع متكرر ومعقد.

- **الذكاء الاصطناعي والموسيقى**

في أواخر القرن العشرين، بدأت الأبحاث في استخدام الذكاء الاصطناعي لتوليد وتحليل الموسيقى. تعتمد هذه التقنيات على خوارزميات رياضية معقدة للتعلم الآلي والتعرف على الأنماط، مما سمح للآلات بإنتاج موسيقى تلقائيًا تشبه إلى حد كبير الأساليب البشرية.

## خاتمة

العلاقات بين الموسيقى والرياضيات عديدة وعميقة. تكمن المبادئ الرياضية في بنية الموسيقى، بدءًا من إنشاء النوتات والإيقاعات وصولًا إلى تأليف وتحليل الأعمال الموسيقية. من خلال استكشاف هذه الروابط، نستطيع تقدير ليس فقط جمال الموسيقى، ولكن أيضًا الدور الحيوي الذي تقوم به الرياضيات في خلقها. وعلى الرغم من أن الموسيقى تُعتبر فنًّا يعبر عن المشاعر والعواطف، إلا أن الرياضيات كانت دائمًا جزءًا لا يتجزأ من تطورها. من خلال فهم العلاقة بين النغمات والهياكل الموسيقية، استطاع الملحنون استخدام الرياضيات لإنتاج أعمال موسيقية تتسم بالتعقيد والجمال.

وتشير هذه العلاقات بين الرياضيات والموسيقى إلى تقارب عميق بينهما، حيث تمثل الأرقام والنماذج الهندسية أساسًا لتنظيم الأصوات والأنماط الموسيقية. من العصر الإغريقي القديم، مرورًا بالعصور الوسطى وعصر النهضة وصولًا إلى القرن العشرين، تطورت هذه العلاقات لتشمل أشكالًا وأساليب مختلفة، مما يعكس التداخل بين الرياضيات والموسيقى كفنون تعبيرية تجمع بين العقلانية والجمال. سواء من خلال تنظيم التوافقيات (Harmonics) في العصر الكلاسيكي أو باستخدام العمليات الرياضية في الموسيقى التجريبية الحديثة، تبقى الرياضيات رفيقًا دائمًا للموسيقى، تؤثر فيها وتتأثر بها.

## المصادر والمراجع

[1] بدر، محمود إبراهيم، الرياضيات والموسيقى، مجلة كلية التربية ببنها، العدد 111، 2017، 455-465. article_62702_3736c3a311f1a1671c3bfdf5cda8145d.pdf (ekb.eg)

[2] زهران، العزب محمد، حول استخدام الموسيقى في تعليم الرياضيات، مجلة تربويات الرياضيات، كلية التربية ببنها، العدد 16، 2013، 6-12. article_82412_526d38ffee41b01c389eb83680245cf1.pdf (ekb.eg)

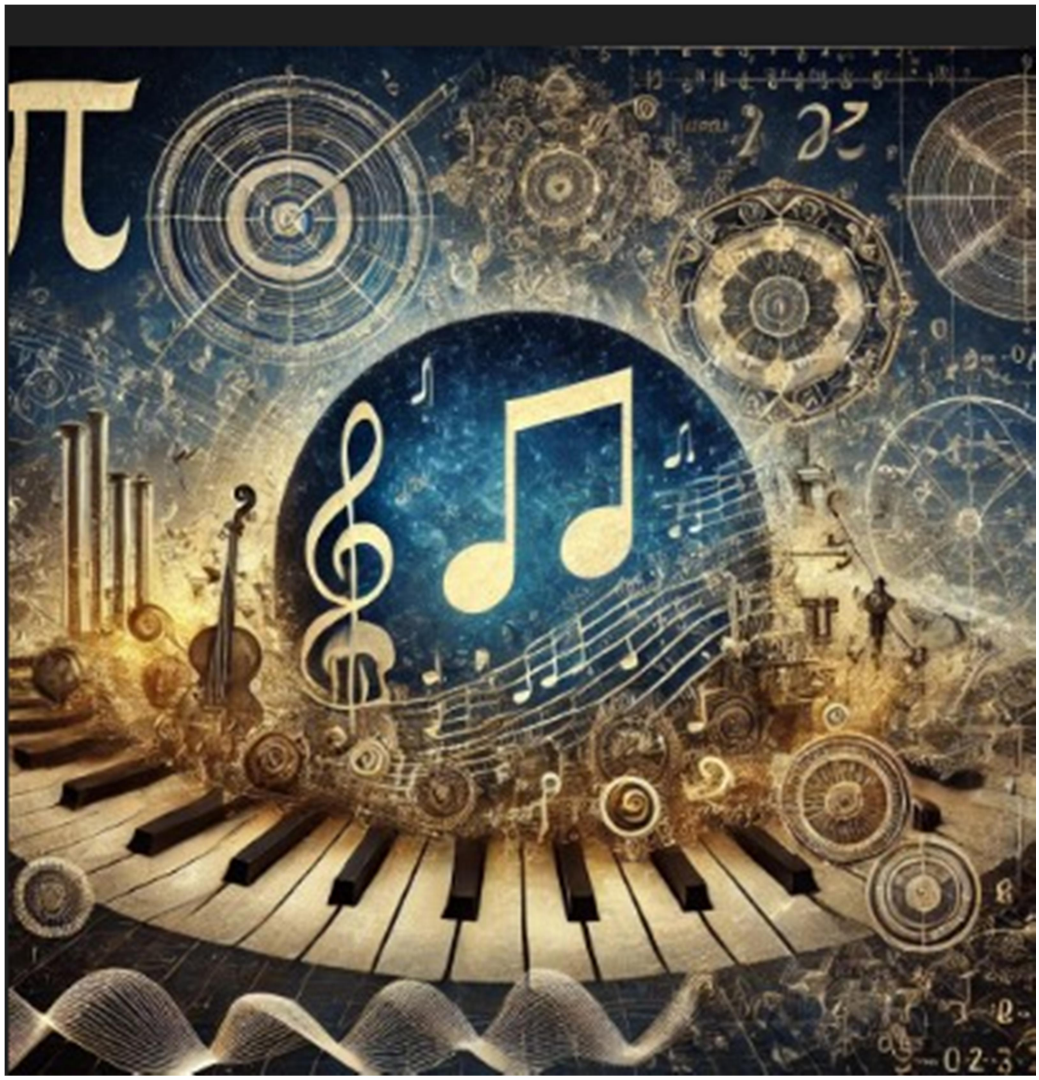
[3] عيدون، أحمد، الفكر الموسيقي عند الفارابي، منشورات المتوسط، ميلانو، ايطاليا، 2024.

[4] فارمر، هنري جورج، حقائق تاريخية عن التأثير الموسيقي العربي، ترجمة (من الإنكليزية) عبد الله مختار السباعي، المؤسسة العربية للدراسات والنشر/المجمع العربي للموسيقى، 2015.

[5] فارمر، هنري جورج، "الترجمات الأولى من اللغة العربية إلى اللاتينية"، حقائق تاريخية عن التأثير الموسيقي العربي، ترجمة (من الإنكليزية) عبد الله مختار السباعي، المؤسسة العربية للدراسات والنشر/المجمع العربي للموسيقى، 2015، 246-248.

[6] الكندي، أبو يوسف يعقوب بن إسحاق، مؤلفات الكندي الموسيقية، تحقيق زكريا يوسف، منشورات الجمل، بغداد-بيروت، 2009.

[7] http://saramusik.org (هذا الموقع عبارة عن فهرس موحّد للمخطوطات الموسيقية والمصادر العربية للموسيقى).

[8] Cohen, G. (sous la dir. de), Maths et Musique, Des destinées parallèles, Tangente HS n°11, 2005. F023007.pdf (livre21.com)

[9] Hofstadter, D., Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, 1979, NY: Basic Books. Traduction française: Gödel, Escher, Bach: les Brins d'un Guirlande Eternelle, 1985, InterEditions, Paris.
[10] Mathiesen, T. J., An annotated translation of Euclid's division of monochord, Journal of Music Theory, n13, 1975, 236-259. Mathiesen, An Annotated Translation of Euclid's Division of The Monochord | PDF (scribd.com)
[11] The mathematics of music, 20190911-lala-booklet-v0.4-web-text.pdf (imaginary.org)
[12] Wright, D., Mathematics and Music, 2009, 00Book.dvi (wustl.edu)