مبرهنة فيثاغورس في العالم القديم

وسيلة غرابة
مخبر الإبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
أستاذة بقسم الرياضيات والإعلام الآلي، كلية العلوم، جامعة الدكتور يحي فارس، المدية
gheraba.ouassila@univ-medea.dz

نحاول من خلال هذه السلسلة من المقالات تقديم نظرة شاملة حول مبرهنة فيثاغورس (Pythagoras) والطرق المختلفة لإثباتها عبر التاريخ. لقد تنوعت البراهين بين إثباتات هندسية وأخرى عددية، باستخدام الاستنباط والاستنتاج، والتقطيع واللصق، والتركيب والتحليل، والمتطابقات.

هذه السلسلة مستنبطة من مذكرة ماجستير بعنوان "مبرهنة فيثاغورس عند نصير الدين الطوسي (ت. 672هـ/1274م) (تحليل وتحقيق)". المذكرة من إعداد وسيلة غرابة، وتحت إشراف الأستاذ القدير المرحوم يوسف قرقور. أهدي هذا العمل إلى روحه الطاهرة.

مقدمة

تُعدّ مبرهنة فيثاغورس من أكثر المبرهنات التي حظيت بإثباتات متعددة على مر التاريخ، ونصّها:

"في كل مثلث قائم الزاوية، يكون مربع طول الوتر مساويًا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين."

عُرفت هذه المبرهنة الشهيرة بأسماء مختلفة عبر الثقافات. أطلق عليها الإغريق اسم "مبرهنة العروس"، وعند الهنود كانت تسمى "كرسي العروس"، بينما عُرفت عند الفرس باسم "شكل العروس"، وأطلقوا على مبرهنتها العكسية اسم "أخت العروس". في العصور الوسطى، سُميت بـ "سيدة الرياضيات" وَ "الاكتشاف الشريف لقربان مائة ثور". أما في أوروبا خلال أوائل القرن العشرين، فقد عُرفت باسم "جسر الحمار". تسمّى أيضًا "مبرهنة مربع وتر المثلث القائم"، وأخيرًا "مبرهنة فيثاغورس". وتجدر الإشارة إلى أن هذه المبرهنة هي المبرهنة 47 في المقالة الأولى من كتاب "الأصول" لأُقليدس (Euclid).

وُجدت هذه المبرهنة في حالاتها الخاصة منذ القِدم، حيث ظهرت في الخوارزميات البابلية، والحساب المصري، وهندسة اليونان، وفي الكتاب الصيني "علم الحساب في تسعة أجزاء"، كما ظهرت أيضًا في إنشاءات الحبال عند الهنود. استخدمت الحضارات القديمة مسائل الإنشاء الهندسي؛ فقد وظّف الفراعنة الثلاثية الفيثاغورية (3، 4، 5)، التي تحقق المساواة $3^2 + 4^2 = 5^2$، لإنشاء الزاوية القائمة، واهتدوا إلى أنّها تُمثّل أطوال مثلث قائم الزاوية. وعرفت الحضارات القديمة الأخرى، مثل الهندية والبابلية والصينية، ثلاثيات فيثاغورية أخرى تحقق الخاصية ذاتها، ممّا دفع المؤرخين إلى الاعتقاد بوجود تواصل أو تبادل بين هذه الحضارات. لكن لا يوجد دليل على أنّهم توصّلوا إلى تعميم لهذه الخاصية والمعروفة اليوم بمبرهنة فيثاغورس.

ظهر أول إثبات هندسي لهذه المبرهنة –وَفقًا للمعلومات المتوفرة–في المقالة الأولى من كتاب "الأصول" لأُقليدس، والتي تمثل المبرهنة 47 في كل من ترجمتي توماس هيث (Thomas Heath) وفيتراك (Bernard Vitrac) (1). لاحقًا، ظهرت العديد من الإثباتات الأخرى، كما تم تطوير تعميمات لهذه المبرهنة إلى مثلث كيفي.

1. عند المصريين

ذهب هيرودوت (Herodotus)، المؤرخ اليوناني الشهير في القرن الخامس قبل الميلاد، إلى اعتبار مصر مهدَ الهندسة؛ فقد قال: "ويبدو لي أن هذا هو السبب في أن مصر سبقت غيرها إلى معرفة الهندسة، وعنها أخذ اليونان" [1].

استخدم المصريون القدماء الهندسة عمليًا لتقسيم الأراضي وتحديد مساحاتها بعد فيضان نهر النيل.

وظّف مساحو الأراضي المصريون القدماء الثلاثية (3، 4، 5) من الوحدة لإنشاء الزاوية القائمة، واكتشفوا أنّها تُمثل أطوال أضلاع مثلث قائم وتحقق الخاصية $3^2 + 4^2 = 5^2$. كانوا على دراية بخواص هذه الثلاثية منذ حوالي 4000 سنة، ووصلت عندهم إلى مرتبة القداسة. فقد أشار الفيلسوف اليوناني بلوتارخس (Plutarch) في القرن الأول الميلادي في كتابه "إيزيس وأوزيريس" (Isis and Osiris) إلى أن المصريين شبّهوا هذا المثلث بطبيعة العالم [4].

اكتشف المؤرخ موريتز كانتور (Moritz Cantor) خواص هذه الثلاثية في جزء من ورقة بردي تعود إلى فترة العائلة المالكة الثانية عشرة (حوالي 1850 قبل الميلاد). وُجدت هذه البردية في كاهون (Kahun) وأشارت إلى أربع علاقات هي [9]:

$$1^2 + (3/4)^2 = (1\,¼)^2$$
$$8^2 + 6^2 = 10^2$$
$$2^2 + (1\,½)^2 = (2\,½)^2$$
$$16^2 + 12^2 = 20^2.$$

يمكن اشتقاق الثلاثية (3، 4، 5) من العلاقات السابقة، إما عن طريق القسمة أو الضرب في عدد طبيعي. مع ذلك، لا يوجد ما يدل على أن المصريين القدماء توصلوا إلى تعميم لمبرهنة فيثاغورس [6].

في بردية ريند (Rhind Papyrus) التي كتبها الكاتب الفرعوني أحمس (Ahmes) في حوالي 1650 قبل الميلاد ، والمحفوظة في المتحف البريطاني، توجد طريقة لإنشاء الزاوية القائمة. تتناول هذه البردية مسائل حسابية وهندسية، منها ما كان مستخدمًا قبله بقرون. من بين هذه الطرق، استخدمت طريقة حرفية ضمت تشكيل مثلث أطوال أضلاعه هي الثلاثية الفيثاغورية (3، 4، 5) باستعمال الحبال [8].

2. عند البابليين

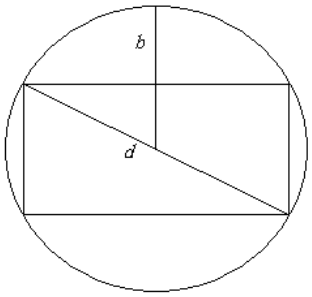
إذا كان المصريون قد ابتكروا الهندسة لحاجتهم إلى تسوية الأراضي، فإن الرياضيات نمت وتطورت في بلاد الرافدين، وحققت اكتشافات كانت حتى عهد قريب تُنسب إلى اليونان، وتَكّشف ذلك من خلال اللوحات المسمارية. في الرياضيات البابلية، تطغى الخوارزميات الحسابية على الفكرة الهندسية.

من بين مسائلهم: "أوقفنا قضيبًا طوله 30 وحدة ملاصقًا لجدار قائم. إذا انزلق طرف القضيب العلوي بمقدار 6 وحدات، فكم يبعد طرفه السفلي عن قاعدة الجدار؟" يقتضي حل هذا السؤال معرفة مبرهنة فيثاغورس. وعلى مدى القرون الثلاثة عشر الأخيرة قبل الميلاد، تفنن البابليون في صياغة مسائل من هذه الشاكلة، وكلّها حالات خاصة من الثلاثيات الفيثاغورية مثل (3، 4، 5)، (5، 12، 13)، (8، 15، 17)، (20، 21، 29) [1].

عُرفت ثلاثيات فيثاغورية في زمن حمورابي حوالي 1800 قبل الميلاد. ففي اللوحة المسمارية المعروفة باسم بليمبتون 322 (Plimpton 322)، التي تعود إلى الفترة ما بين 1900 و1600 قبل الميلاد والمحفوظة في جامعة كولومبيا، وُجدت قائمة تحتوي على خمس عشرة ثلاثيةً فيثاغورية مكتوبة بنظام العد البابلي الستيني، من الشكل (a, b, c)، حيث $c^2 = u^2 + v^2, b = u^2 - v^2, a = 2uv$ [3].

ظهرت مبرهنة فيثاغورس في عمل أوتو نويجباور (Otto Neugebauer) وَويلهلم ستروف (Wilhelm Struve)، وترجمتهما للوحة مسمارية تعود إلى حوالي 2600 ق.م. تناولت هذه اللوحة مسألة إيجاد طول وتر دائرة عُلم نصف قطرها وعمق قوس الوتر. كان الحل موضحًا على النحو التالي:

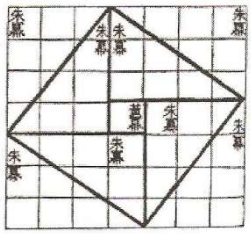
ليكن b عمق القوس وd القطر الذي بدايته أحد طرفي الوتر. نرسم المستطيل الذي قطره d، ثم نقسم المستطيل إلى مثلثين قائمين متقايسين وترهما قطر الدائرة d. طولا ضلعي المثلث القائم هما على التوالي d و $d-2b$. إذن طول وتر القوس يُعطى بالعلاقة التالية: $c=\sqrt{d^2-(d-2b)^2}$ [2].



الشكل 1

3. عند الصينيين

من بين أقدم الوثائق الصينية الكتاب المقدس للحساب Tcheou-pei، والذي يعني "عظم الفخذ" [2]. ينقسم الكتاب إلى جزءين: الأول يعود تاريخه إلى حوالي 1100 قبل الميلاد، والثاني إلى 213 قبل الميلاد. بينما يُرجع البعض تأليفه إلى عهد مملكة هان (206 ق.م- 220 م).



الشكل 2

يحتوي الجزء الأول من الكتاب على النتيجة التالية: المثلث الذي أطوال أضلاعه 3، 4، 5 هو مثلث قائم ويحقق العلاقة $3^2+4^2=5^2$ [4]. قدّم الصينيون في هذا الكتاب ما يشبه إثباتًا مرئيًا هندسيًا لهذه النتيجة، كما هو موضح في الشكل 2 [7]. لكن هذا لا يعني أن الصينيين توصلوا إلى تعميم لهذه الحالة الخاصة. وهناك من ينسب انتقالها إليهم من اليونانيين خلال حملة الإسكندر المقدوني (Alexander of Macedon) [2]. كما ظهرت هذه الحالة أيضًا في عمل آخر بالصين يُنسب إلى تشو كانغ (Chou Kung) الذي توفي حوالي 1105 ق.م. [6].

أهم عمل صيني بعد هذا الكتاب هو كتاب Chui-chang-suan-chu، الذي يعني "علم الحساب في تسعة أجزاء"، من المرجح أنّه أُلّف في عهد مملكة هان (206 ق.م- 220م) [3]. لم يقتصر تأثير هذا الكتاب على الصين فحسب، بل امتد ليشمل اليابان أيضًا.

يحتوي كتاب "علم الحساب في تسعة أجزاء" على حوالي 246 مسألة موزعة على تسعة أجزاء. في الجزء الأخير المخصص للمثلثات القائمة، وردت عدة حالات، مثل المثلث القائم الذي أطوال أضلاعه 3، 4، 5 [2]. يتطرق هذا الكتاب أيضًا إلى مسألة شجرة الخيزران المكسورة، التي ظهرت كذلك في كتاب يانغ هي (Yang-Hui)، في القرن الثالث عشر

الميلادي، الذي يُعتبر امتدادًا لكتاب "علم الحساب في تسعة أجزاء" [3]. نص المسألة هو: "شجرة خيزران طول ساقها 10 أقدام، انكسرت فسقط أعلى جزء منها على الأرض على بعد 3 أقدام من الساق. ما هو طول الساق المنكسرة؟"

يحتوي الكتاب على مسألة أخرى استخدمت لحلّها مبرهنة فيثاغورس، ونصّها: "يزيد ارتفاع باب عن عرضه بـ 6 أقدام، وقطره 16 قدمًا. ما هو ارتفاع وعرض الباب؟" يعتمد حل المسألة على العبارة التالية:

$$b^2 + (b + a)^2 = c^2$$

حيث b عرض الباب، وa الزيادة، وc قطر الباب [2].

يتضمن الكتاب أيضًا مسألة البحيرة والقصبة، التي وُجدت لاحقًا في الهند عند بهاسكارا (Bhāskara) في القرن الثاني عشر الميلادي، لكنها ظهرت قبله عند الصينيين بحوالي 1300 سنة [3].

ما يمكن ملاحظته في الثلاثيات المذكورة، سواء عند البابليين أو الصينيين، أنّها جميعًا مكونة من أعداد ناطقة. كما أنه، بالإضافة إلى وجود ثلاثيات بسيطة مثل (3، 4، 5) و (5، 12، 13)، توجد أيضًا ثلاثيات أخرى أقل وضوحًا مثل (48، 55، 73) و (60، 91، 109) [7].

4. عند الهنود

قدّم الهنود مبرهناتهم في أبيات شعرية قصيرة، ربما كان الهدف من ذلك تسهيل الحفظ. تتميز الرياضيات الهندية بكونها غنية وتطبيقية، لكنها خالية من أي برهان. حتى اليوم، لا تزال مجموعة من الآلات الهندسية والحبال تُستخدم لإجراء القياسات وأعمال البناء في المعابد الهندية [4].

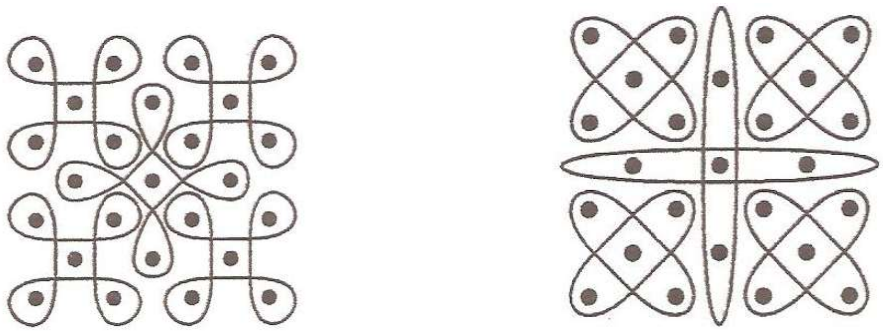
دُوّن الإنتاج الهندي في السولباسوتراس (Śulbasūtras)، وهي مجموعة من الكتب التي تضم قواعد للإنشاءات باستخدام الحبال. وُجدت طريقة استخدام الحبال أيضًا عند المصريين القدماء. اهتم الكهنة الهنود بالثلاثية (3، 4، 5) لإنشاء الزاوية القائمة. ففي إحدى دروسه، استخدم بودهايانا (Bāudhāyana) الحبال، وأشار بشكل ضمني إلى الثلاثية (5، 12، 13)، خلال مراحل هذا الإنشاء [4].

يُعزى تأليف السولباسوتراس إلى سبعة من المؤلفين، من أهمهم بودهايانا، أباستامبا (Āpastamba)، كاتيايانا (Kātyāyana). تخصّص الباحث ألبرت بورك (Albert Bürk) في دراسة سولباسوتراس أباستومبا (حوالي 500 ق.م). استخدم أباستومبا طرقًا يُحتمل أن تعود إلى القرن السادس قبل الميلاد. ووَفقًا لبورك، لم تقتصر المخطوطات على تقديم تعميم لمبرهنة فيثاغورس، بل تضمنت أيضًا إشارات مبكرة إلى الأعداد الجذرية [2]. هناك من انتقد هذا الزعم من بينهم هيث، الذي قدّم حججًا لإثبات صحة رأيه [6].

كان إنشاء الزاوية القائمة والمربع من أهم القواعد التي تناولتها السولباسوتراس. أُنشأت الزاوية القائمة بحبل طوله 90 وحدة، ويمثل أطوال مثلث قائم الزاوية أضلاعه 15، 36، 39. كانت النظرية العامة "يُمدّ الحبل على طول قطر مستطيل ويشكل ما تبقى منه ضلعي القائمة". تجدر الإشارة إلى أن هذه القواعد لا تتضمن إثباتات، بل اعتمدت على الملاحظة والتجربة [2].

5. عند الأفارقة

وُجدت في رسومات رملية قديمة بعض الزخارف التي تحتوي على ما يشبه الثلاثية الفيثاغورية 3، 4، 5. قد تكون هذه الرسومات تجسيدًا عشوائيًا أو مقصودًا لهذه الثلاثية، لكن لا يوجد دليل يثبت أن الأفارقة عرفوا خاصيتها الهندسية. تتكون هذه الرسومات من تصميم أولي يعتمد على أنماط مكررة تضم خمس نقاط مرتبة بطريقة تشبه شبكة زخرفية. يُعرف هذا التقليد باسم Tshingelyengely، وهو نمط قديم وُجد في قرية بمنطقة أعالي نهر زمبيزي (Zambezi). كما تظهر أنماط مشابهة في رسومات أخرى مرتبطة بتقليد Chokwe، كما توضحها الرسومات أدناه.



الشكل 3

يتألف الرسم من زخرفتين مبنيتين على صيغة زخرفة أولية، حيث تتكون كل زخرفة من خمس نقاط مكررة خمس مرات، مما يجعل العدد الإجمالي للنقاط 5^2. من جهة أخرى، يحتوي الرسم على أسطر أو أعمدة، كل منها يحتوي على أربع نقاط، أي 4^2. كما يوجد ثلاثة أسطر أو أعمدة، كل منها يحتوي على ثلاث نقاط، أي 3^2. في الأخير، نجد أن $5^2=4^2+3^2$ [5].

التعليقات

(1) مبرهنة فيثاغورس تقابل المبرهنة 46 في "النقل المأموني" كما ينقلها الحجاج، وتقابل المبرهنة 35 من مبرهنات علي بن أحمد النسوي في المقالة الأولى من كتابه "كتاب تجريد أُقليدس" [1].

المراجع

[1] سعيدان، أ. س.، هندسة أُقليدس في أيد عربية، دار البشير، عمان، 1991.
[2] Coolidge, J. L., A History of Geometrical Methods, Dover, New York, 1940.
[3] Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, Saunders College Pub, Philadelphia, 1983.
[4] Fourrey, E., Curiosités géométriques, Vuibert, Paris, 2001.
[5] Gerdes, P., Une tradition géométrique en Afrique, les dessins sur le sable, Tome 2, Editions L'Harmattan, Paris,1995.
[6] Heath, T. L., Euclid, the Thirteen Books of the Elements. Vol 1, Dover Publications, New York, 1956.
[7] Katz, V. J., A History of Mathematics: An Introduction, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.
[8] Rouse Ball, W. W., A Short Account of the History of Mathematics, Dover Publications, New York, 1960.
[9] Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. 2, Dover Publications, New York, 1958.