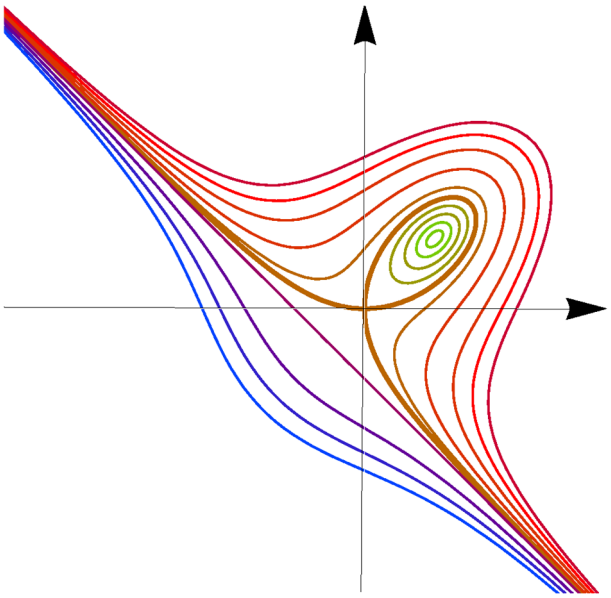
وريقات ديكارت وأشياء أخرى *

حمزة خليف
أستاذ الرياضيات، متقاعد
hkhelif@gmail.com



منحنيات مستوى للدالة

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy .$$

يستعمل النصّ الحروف العربية الإضافية الآتية في كتابة بعض أسماء العَلَم الأعجمية:

پ(p)، ڤ (g)، ڤ (v)، ب (é، è، e، ...)، ۆ (eu ،e)، و(o)، وُ(ou).

نحاول في هذه المقال إلقاء بعض الضوء على المنحني الذي أسال تطوّرُه الكثيرَ من الحبر بعد الجدل حول المماسات بين ديكارت و فيرما والذي شارك فيه رياضياتيون آخرون معاصر و ن للأخير. يمكن القول إنّ "الوريقة" لعبت دورًا بطريقةما في التطوير المبكر لحساب التفاضل والتكامل. كما أ نّها لا تزال حتى يومنا هذا تثير فضول بعض الرياضياتيين الذين عرّفوا عليها من بين أمور أخرى، بنىً جبرية و بنىً طوپولوجية و بنىً تفاضلية.

سنقوم أيضًا بفحص منحنيات المستوي المعروفة المختلفة والتي تحمل اسم وريقة وتعميمًا إلى "الوريقات المتعددة".

1. وريقة ديكارت

1.1. ظروف ظهور هذا المنحني

كان القرن السابع عشر غنيًا بالاكتشافات الرياضياتية، ولكنّه كان أيضًا غنيًا بالمناقشات والخلافات بين الرياضياتيين. إحدى هذه المواجهات الشهيرة جرت بين ديكارت و فيرما حول مسألة رسم مُماسات المنحني. لم يفهم ديكارت تمامًا طريقة فيرما لرسم المُماسات، وكان يعتقد أنّ الحلّ الذي قدّمه (في La Géométrie) كان أفضل بكثير (1).

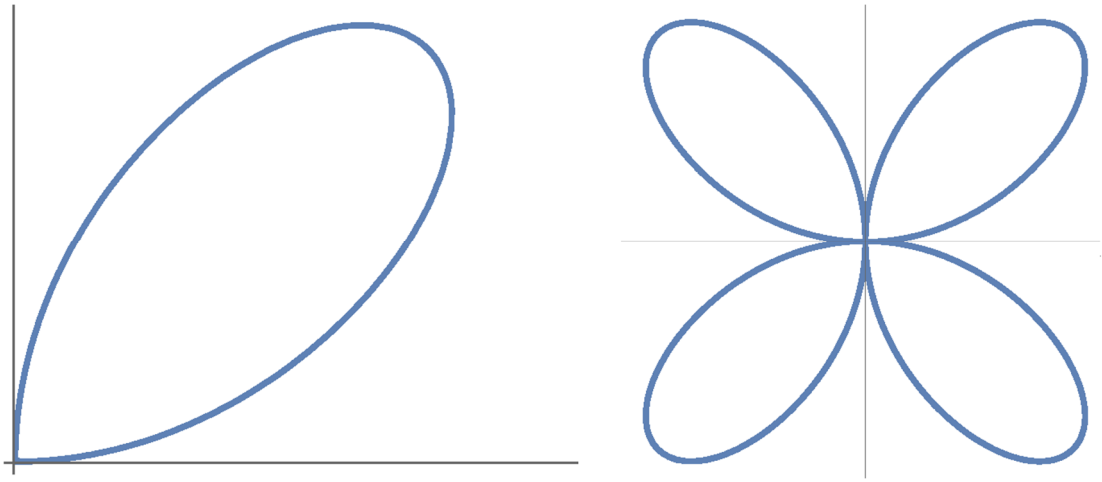
---

* يمكن الاطّلاع على هذا المقال بالفرنسية هنا

اتّخذت العديد من الخلافات في ذلك العصر شكل التحديات : حيث يتحدّى رياضياتيّ، والذي عادة ما يكون لديه مشكلة (وحلّ للمشكلة)، زميلَه أو حتى المجتمع العلميّ بأكمله لحلّ المشكلة. باتباع هذه العادة، تحدّى ديكارت فيرما للعثور على مُماسات لمنحنٍ معقّد بشكل خاصّ كان قد اخترعه (ديكارت). هذا المنحني موصوف بالمعادلة

$$x^3 + y^3 - 3mxy = 0 \quad (1.1)$$

حيث m ثابت حقيقيّ غير منعدم (2)، وقد أطلق عليه منذ ذلك الحين اسم "وريقة ديكارت". يأتي اسم الوريقة من شكل ورقة لحلقة المنحني في الربع الأوّل. عند دراسة هذا المنحني، اقتصر ديكارت في عام 1638 وروبرفال في عام 1672 على حلقة، مع الأخذ في الاعتبار فقط الإحداثيات الموجبة $x \geq 0$ و $y \geq 0$ (الشكل 1 عن اليسار) لأنّهما اعتقدا أنّ الحلقة تتكرّر في كلّ ربع من المعلم، مثل البتلات الأربع للزهرة (الشكل 1 عن اليمين)، ومن هنا كان اسمها " folium : فوليوم" الذي يعني وريقة أو ورقة باللاتينية. ثمّ تمّ اقتراح طريقة تحديد مُماسات المنحني من طرف روبرفال. تمّ إنشاء الطبيعة المقاربة للفروع اللامنتهية فقط في عام 1692 من قبل هيغنز.



الشكل 1

كما ذكرنا سابقًا، طوّر فيرما طريقةً للحصول على مماس المنحني في أيّ نقطة من نقطه، لكنّ ديكارت اعتقد أنّها ليست طريقة حقيقية؛ ثم قرّر تحدّيَ فيرما (وهو أمر شائع بين المثقفين في ذلك الوقت، مثلما تمت الإشارة إليه) لإيجاد المماس في أيّ نقطة من المنحني المعرّف بالمعادلة أعلاه. حلّ فيرما المشكلة، وقدّم الأدلّة لديكارت، وأظهر نجاح طريقته، وهي الطريقة التي أرست الأساس لحساب التفاضل والتكامل اللامنتهي في الصغر الذي طوّره نيوتن ولايبنتز.

تمّ اقتراح مشكلة تحديد المماس للمنحني على روبرفال الذي اعتقد خطأً أيضًا أنّ للمنحني شكلَ زهرة الياسمين وأعطاه هذا الاسم. كما أطلق عليه اسم " galand " (اسم لربطة شريط كانت رائجَة بين النساء في ذلك الوقت).

من الواضح أنّ الرياضياتيين في ذلك الزّمن لم يكونوا على دراية بالإحداثيات السالبة، حيث تمّ رسم المنحني على شكل ورقة واحدة أو "وريقة" في الربع الأوّل - أو في بعض الأحيان على شكل أربع وريقات "نفل"، مع وريقة واحدة في كل ربع.

2.1. دراسة موجزة للمنحني باستخدام المعادلة (1.1)

لاحظوا أنّه، دون المساس بالعمومية، كان بإمكاننا الاكتفاء بالنظر في الحالة الخاصة $m = 1$ (ولندْعها الوريقة الوَحدة) حيث يتمّ استنتاج الحالة العامة من ذلك من خلال تحاك مركزه O ونسبته m. لاحظوا أيضًا أنّ وريقتين

مقابلتين لقيمتين متناظرتين لـ m تتقابلان في تناظر مركزه O. وبناء على ذلك يمكن أن تُقتصر الدراسة على الحالة $m > 0$ وهي الحالة المعتمدة تاريخيًا.

ليكن $\mathcal{F}$ هذا المنحني ولتكن f الدالة من $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}$ المعرفة بـ

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3mxy. \quad (1.2.1)$$

إذن

$$\mathcal{F} = \{(x,y), (x,y) \in \mathbf{R}^3, f(x,y) = 0\}. \quad (2.2.1)$$

لنعرّف، في معادلة $\mathcal{F}$، y كدالة بالنسبة إلى x عندما يكون ذلك ممكنًا. بما أنّ الدالة f من الصنف C^∞، يمكن أن تُطبّق عليها مبرهنة الدوال الضمنية في النقطة (a,b) إذا كان

$$f(a,b) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0, \quad (3.2.1)$$

أيْ إذا كان

$$a^3 + b^3 - 3mab = 0, 3(b^2 - ma) \neq 0. \quad (4.2.1)$$

في هذه الحالة يوجد جوار I لـ a، جوار J لـ b ودالة φ من I في J من الصنف C^∞، بحيث يكون

$$(x \in I, y \in J, (x,y) \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow (x \in I, y = \varphi(x)). \quad (5.2.1)$$

المماس للمنحني في النقطة (a,b) معرّف بالمعادلة

$$y - b = \varphi'(a)(x - a). \quad (6.2.1)$$

من أجل $x \in I$، لدينا $f(x, \varphi(x)) = 0$. إذن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (7.2.1)$$

ومنه

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}, \quad (8.2.1)$$

أو

$$\varphi'(x) = -\frac{x^2 - my}{y^2 - mx}. \quad (9.2.1)$$

ومنه فإنّ مماس الوريقة $\mathcal{F}$ في النقطة (a,b) يُعطى بالمعادلة

$$(a^2 - mb)(x - a) + (b^2 - ma)(y - b) = 0. \quad (10.2.1)$$

لدينا $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ إذا وفقط إذا كان $(a,b)=(0,0)$ أو $(a,b)=\left(\sqrt[3]{2}m,\sqrt[3]{2^2}m\right)$. في النقطة $A\left(\sqrt[3]{2}m,\sqrt[3]{2^2}m\right)$ لدينا $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$.

يمكننا إذن التعبير عن x كدالة ضمنية لـ y بالقرب من هذه النقطة، ونظرا إلى أنّ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ ، يكون لدينا مماس موازٍ لمحور التراتيب في A.

في النقطة $O(0,0)$ لا تُطبَّق مبرهنة الدالة الضمنية، نظرًا إلى أنّ المشتقَّين الجزئيين $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ ينعدمان في هذه النقطة.

لقد رأينا للتوّ أنّ هناك نقطةً A من $\mathcal{F}$ ، بحيث أنّه بالنسبة إلى أيّ $(x_0,y_0)\in\mathcal{F}\setminus\{(0,0),A\}$ ، يوجد مجالان مفتوحان I و J من $\mathbf{R}$ ودالة φ من I في J من الصنف C^∞ ، بحيث يكون $(x_0,y_0)\in I\times J$ و

$$\forall (x,y)\in I\times J,(x,y)\in\mathcal{F}\Leftrightarrow y=\varphi(x). \quad (11.2.1)$$

بطريقة مماثلة، نبيّن أنّ هناك B من $\mathcal{F}$ بحيث أنّه بالنسبة إلى أيّ $(x_0,y_0)\in\mathcal{F}\setminus\{(0,0),B\}$ ، يوجد مجالان مفتوحان I و J من $\mathbf{R}$ ودالة ψ من I في J من الصنف C^∞ ، بحيث يكون $(x_0,y_0)\in I\times J$ و

$$\forall (x,y)\in I\times J,(x,y)\in\mathcal{F}\Leftrightarrow x=\psi(y). \quad (12.2.1)$$

3.1. معادلة مختصرة لوريقة ديكارت

لا يمكن للمعادلة (1.1) أن تُظهِر بشكل مباشر طبيعة المنحني أو شكلَه. ولتحويلها إلى أخرى تسهل مناقشتها، نلاحظ أنّها تظلّ كما هي عندما نستبدل x بـ y ، و y بـ x. وبالتالي فإنّ المنحني الذي تمثّله يكون متناظرا بالنسبة إلى المنصف (الأوّل) للزاوية التي يشكّلها محورا الإحداثيات. ولذلك فمن السهل التنبؤ أنّه بأخذ هذا المستقيم وذاك الذي يتعامد معه في نقطة المبدأ كمحورين جديدين، سيتمّ تبسيط المناقشة. علاقتا الانتقال إلى المحورين الجديدين هما

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y') \\ y=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y'). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

علاوة على ذلك، إذا أشرنا بـ m' إلى طول جزء المنصّف الذي يكون طول إسقاطه على المحور $x'Ox$ هو m ، يكون لدينا

$$m=\frac{m'}{\sqrt{2}}.. \quad (2.3.1)$$

لنعوّض هذه القيّم في المعادلة (1.1) ولنستبدل، من أجل التبسيط، m' بـ $\frac{3m'}{2}$ ، ولنُزِل العلامة $(')$. المعادلة المختصرة ستكون حينئذ

$$y^2(m+3x)+x^2(x-m)=0 \quad (3.3.1)$$

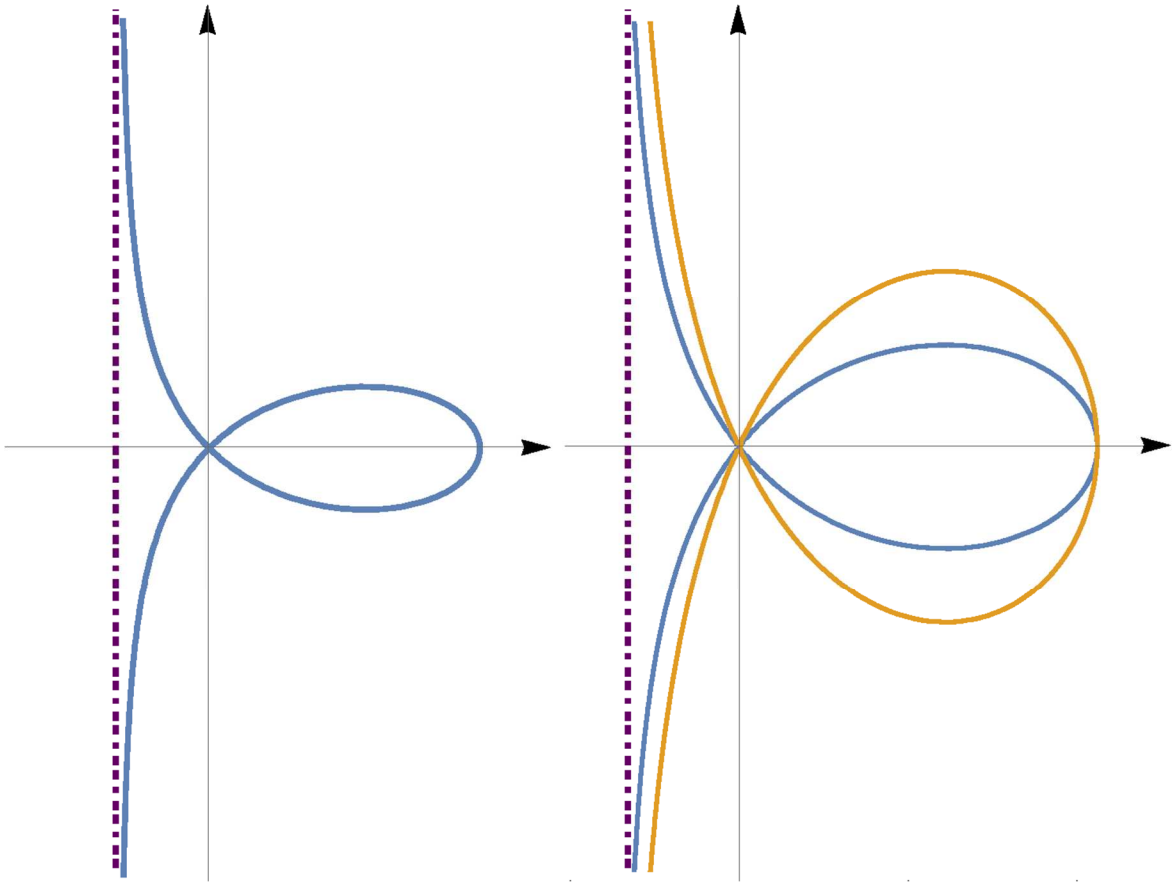
والتي تعطي

$$y=\pm x\sqrt{\frac{m-x}{m+3x}}. \quad (4.3.1)$$

والمعادلة على هذا الشكل، نرى على الفور أنّ المنحني (الشكل 2)، المقتصر عن اليمين على الفاصلة $x = m$، هو مقتصر عن اليسار، على المسافة $\frac{1}{3}m$، بالمستقيم المقارب المعرّف بالمعادلة

$$m + 3x = 0. \quad (5.3.1)$$

(المرجع 11)



الشكل 2

1.3.1 ملحوظة

من خلال تبديل المتغيّرَين

$$x = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}, y = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \quad (6.3.1)$$

في المعادلة (1.1) للوريقة، أيْ بإخضاع المنحني إلى دوران مركزه O وقياسه $\pi / 4$، نحصل على المعادلة

$$2X\left(X^2 + 3Y^2\right) - 3m\sqrt{2}\left(X^2 - Y^2\right) = 0. \quad (7.3.1)$$

إذا مدّدنا المنحني في اتجاه محور الـ Y بعامل $\sqrt{3}$، تصبح المعادلة

$$2X\left(X^2 + Y^2\right) - m\sqrt{2}\left(3X^2 - Y^2\right) = 0 \quad (8.3.1)$$

وهي ليست سوى معادلة مُثْلِثة (منحن يستعمل لتثليث الزاوية) ماكلوران والتي هي بالتالي صورة وريقة ديكارت (الشكل 2 عن اليمين) عن طريق تمديدٍ اتجاهُه المستقيم المقارب للوريقة، أساسه محور التناظر ونسبته $\sqrt{3}$.

4.1. دراسة وريقة ديكارت باستخدام توسيط

1.4.1 توسيط أوّل لوريقة ديكارت

ليكن المستقيم $\mathcal{D}_t$ المعرّف بالمعادلة $y=xt$. المنحني $\mathcal{F}$ هو مسار النقطة M_t أين يلتقي مع المستقيم $\mathcal{D}_t$ عندما يمسح الوسيط t المجموعة $\mathbf{R}$. نحصل على إحداثيّي M_t، $x(t)$ و $y(t)$، عن طريق حلّ الجملة

$$(1.1.4.1)\quad \begin{cases} x^3+y^3-3mxy=0 \\ y=xt. \end{cases}$$

نلاحظ أنّ $(0,0)$ حلّ لهذه الجملة أيّا كانت قيم t (بما فيها $t=-1$). من أجل $t\neq -1$ نجد

$$(2.1.4.1)\quad x(t)=\frac{3mt}{t^3+1}, y(t)=\frac{3mt^2}{t^3+1}.$$

نرى إذن أنّ كلتا الدالتين x و y اللتين تحقّقان المعادلة (1.1) محدّدتان بالعلاقتين (2.1.4.1) أعلاه على $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ وفي المقابل يمكننا بسهولة التأكّد من أنّ الدالتين المعرّفتين بالعلاقتين (2.1.4.1) تحقّقان المعادلة (1.1). ومنه فإنّ الوريقة $\mathcal{F}$ معرّفة بالتوسيط

$$(3.1.4.1)\quad \begin{array}{c} \mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}^2 \\ t\mapsto\left(\frac{3mt}{t^3+1},\frac{3mt^2}{t^3+1}\right). \end{array}$$

لدينا من أجل كلّ $t\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$

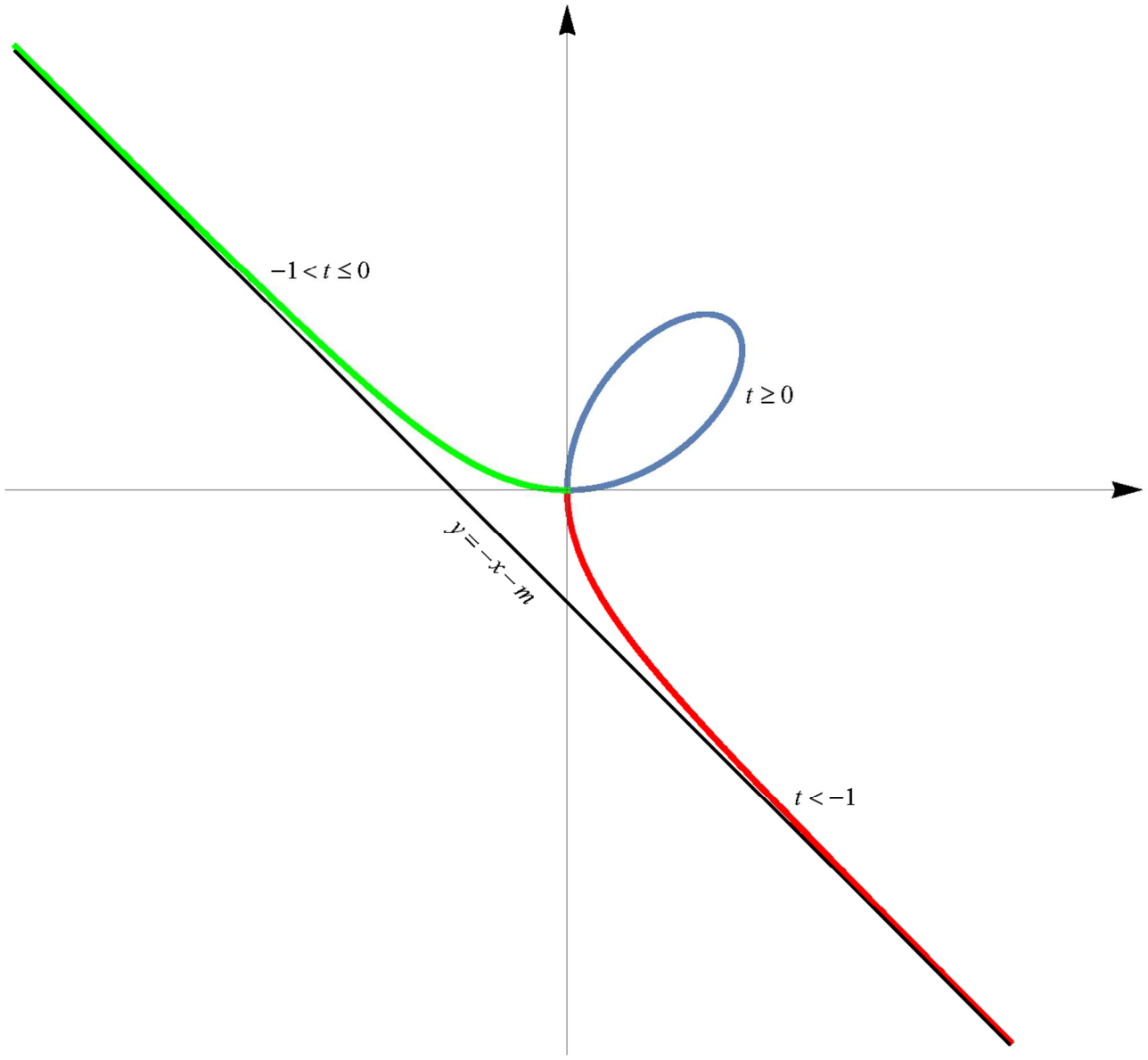
$$(4.1.4.1)\quad x'(t)=3m\frac{1-2t^3}{\left(t^3+1\right)^2}, y'(t)=3mt\frac{2-t^3}{\left(t^3+1\right)^2}.$$

نرى هنا أنّ المشتقّين $x'(t)$ و $y'(t)$ لا ينعدمان في وقت واحد في أيّ نقطة، وبالتالي فإنّ المنحني منتظم!

نلخّص دراسة تغيّرات الدالتين x و y في الجدول الآتي حيث أخذنا القيمة 1 لـ m.

t	$-\infty$		-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'	$+$		‖	$+$	$+$	0	$-$		$-$		
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	$\sqrt[3]{2}$	↘	0
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\sqrt[3]{2}$	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0
y'	$-$		‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

نلاحظ (الشكل 3) أنّ قوس المنحني الموجود في الربع الرابع $(x>0,\ y<0)$ يقابل t الذي ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$ ، القوس الموجود في الربع الثاني $(x<0,\ y>0)$ يقابل t الذي ينتمي إلى المجال $]-1,0]$ ، بينما حلْقة المنحني $(x>0,\ y>0)$ فتقابل t الذي ينتمي إلى المجال $[0,\infty[$. (3)



الشكل 3

الدالتان x و y تؤولان إلى اللامنتهي عندما يؤول t إلى -1. ونظرا إلى أنّ $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{y(t)}{x(t)}=-1$ ، فإنّ المنحني يقبل منحى المستقيم ذي المعادلة $y=-x$ منحىً مقاربا في $t=-1$.

لدينا بعد ذلك $\lim\limits_{t\to -1}\left(y(t)+x(t)\right)=-m$: ومنه فالمستقيم المحدّد بالمعادلة $y=-x-m$ مستقيم مقارب للمنحني.

لدينا من ناحية أخرى الفرق

$$y(t)-(-x(t)-m)=m\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} \quad (5.1.4.1)$$

وهو من إشارة m. ومنه فبالنسبة إلى $m>0$، يكون المنحني فوق المستقيم المقارب وتحته بالنسبة إلى $m<0$.

إنّ تناظر المنحني بالنسبة إلى المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x$ في معلم متعامد متجانس لـ $\mathbf{R}^2$ والذي يتجلّى في عدم تغيّر المعادلة (1.1) بالتحويل

$$(x,y)\mapsto(y,x)$$

يقترح علينا اختصار دراسة تغيّرات التوسيط (3.1.4.1) للمنحني.

للقيام بذلك، نلاحظ أنّ التطبيق $t\mapsto 1/t$ تقابل من $I'=]-1,1]\setminus\{0\}$ في $J'=\mathbf{R}\setminus[-1,1[$ ولدينا

$$x(1/t)=y(t)$$

وبالطبع لدينا أيضا

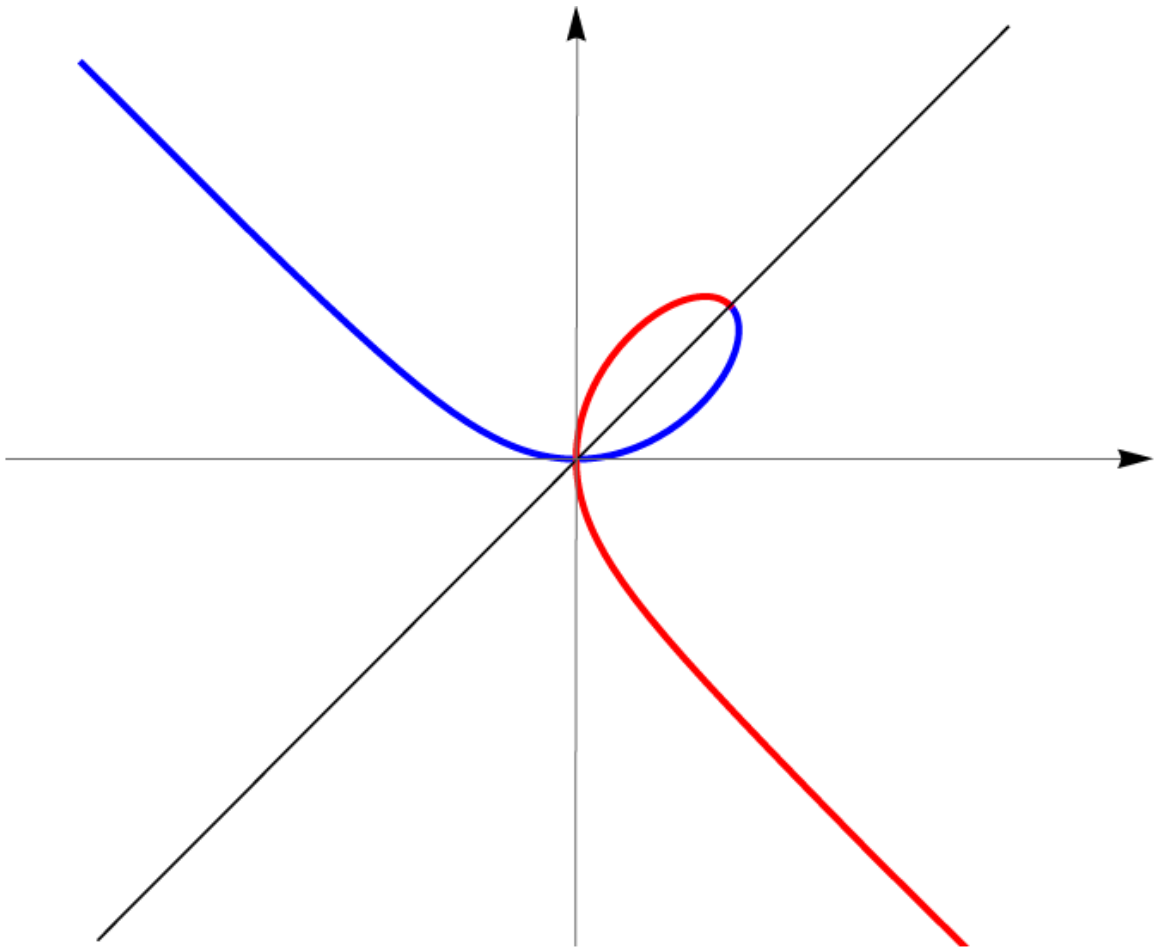
$$y(1/t)=x(t).$$

نستطيع إذن إجراء الدراسة على I' ثمّ نكملها بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم المعرّف بالمعادلة (الشكل 4)

$$y=x\ .$$

نلخص هذه الدراسة في الجدول الآتي

t	-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		1
x'		$+$		$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	$3/2$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\sqrt[3]{2}$	↗	$3/2$
y'		$-$	0	$+$		$+$	



الشكل 4

2.4.1 توسيط ثان لوريقة ديكارت

لنعد إلى التوسيط (1.2.4.1) لوريقة ديكارت وليكن تغيير الوسيط

$$\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}\setminus\{0\}\,,t\mapsto u=\frac{1}{1+t}\quad,\qquad (1.2.4.1)$$

أيْ

$$\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}\setminus\{-1\}\;u\mapsto t=\frac{1-u}{u}.\qquad (2.2.4.1)$$

بعد الاستبدال والتمديد بالاستمرار في $u=0$، نحصل على التوسيط "الجيّد" الآتي لوريقة ديكارت

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2,u\mapsto\left(3m\frac{u^2(1-u)}{1-3u+3u^2},3m\frac{u(1-u)^2}{1-3u+3u^2}\right).\qquad (3.2.4.1)$$

بالنسبة إلى هذا التوسيط، من الواضح أنّ النقطة $O(0,0)$ هي نقطة مزدوجة لأنّها تقابل القيمتين المختلفتين 0 و1 للوسيط u.

5.1. تعديل وتربيع وريقة ديكارت

نذكّر أنّنا نعني بالتعديل حساب طول (قوس من) المنحني وبالتربيع حساب مساحة جزء من المستوي محدود بالمنحني (أو بجزء منه) وربما مع منحن آخر.

بالانتقال من التوسيط (3.1.4.1) إلى الإحداثيات القطبية نجد

$$(1.5.1)\quad \rho^2 = \frac{9m^2t^2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^3\right)^2}, \theta = \arctan t.$$

ومن هنا تأتي معادلة الوريقة في الإحداثيات القطبية

$$(2.5.1)\quad \rho = \frac{3m\sec\theta\tan\theta}{1+\tan^3\theta}$$

أو

$$(3.5.1)\quad \rho = \frac{3m\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}.$$

طول حلْقة وريقة ديكارت هو (الشكل 5)

$$(4.5.1)\quad s = 3m\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1+t^2\left(t^6+4t^4-4t^3-4t+4\right)}}{1+t^3}dt$$

أيْ

$$(5.5.1)\quad s = 4{,}917488...m.$$

مساحة "الورقة" التي تحدّها حلْقة المنحني هي (الشكل 5)

$$(6.5.1)\quad A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2 d\theta$$

أيْ

$$(7.5.1)\quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3m\sec\theta\tan\theta}{1+\tan^3\theta}d\theta$$

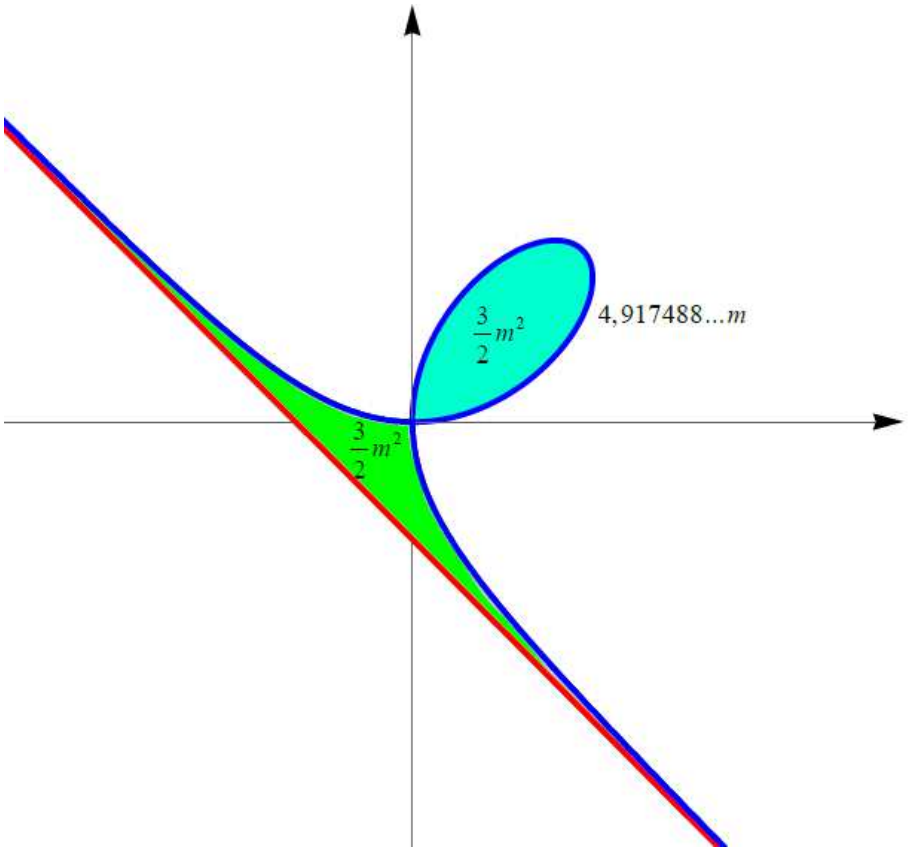
يعني

$$(8.5.1)\quad A = \frac{3}{2}m^2..$$

يمكننا أيضًا استخدام العلاقة الناتجة من مبرهنة قرين - ريمان، لحساب مساحة كتكاملٍ منحنٍ

$$(9.5.1)\quad A = \int_{t=0}^{t=\infty}xdy = -\int_{t=0}^{t=\infty}ydx = \frac{3}{2}m^2.$$

نلاحظ أنّ مساحة الجزء المحدّد بالمنحني ومستقيمه المقارب منتهية وتساوي A.



الشكل 5

6.1 المخروطيّ المماس للوريقة في نقطة منها

1.6.1 الدائرة الملاصقة للوريقة في إحدى نقطها

ليكن المنحني المستوي المعرّف بالتوسيط $t \mapsto r(t)$ حيث

$$(1.1.6.1)\quad r(t)=\left(x(t),y(t)\right).$$

إنّ شعاعي الوَحدة المماس والعمودي للمنحني في النقطة ذات الوسيط t هما، على التتابع،

$$(2.1.6.1)\quad T=\frac{r'(t)}{\sqrt{r'(t).r'(t)}}$$

و

$$(3.1.6.1)\quad N(t)=\frac{1}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\left(-y'(t),x'(t)\right).$$

الانحناء وشعاع (نصف قطر) الانحناء في هذه النقطة معطيان على التتابع بـ

$$(4.1.6.1)\quad \kappa=\left(x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)\right)\Big/\sqrt{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^3}$$

و

$$(5.1.6.1)\quad \rho=1/\kappa$$

عندما يكون ذلك ممكنا.

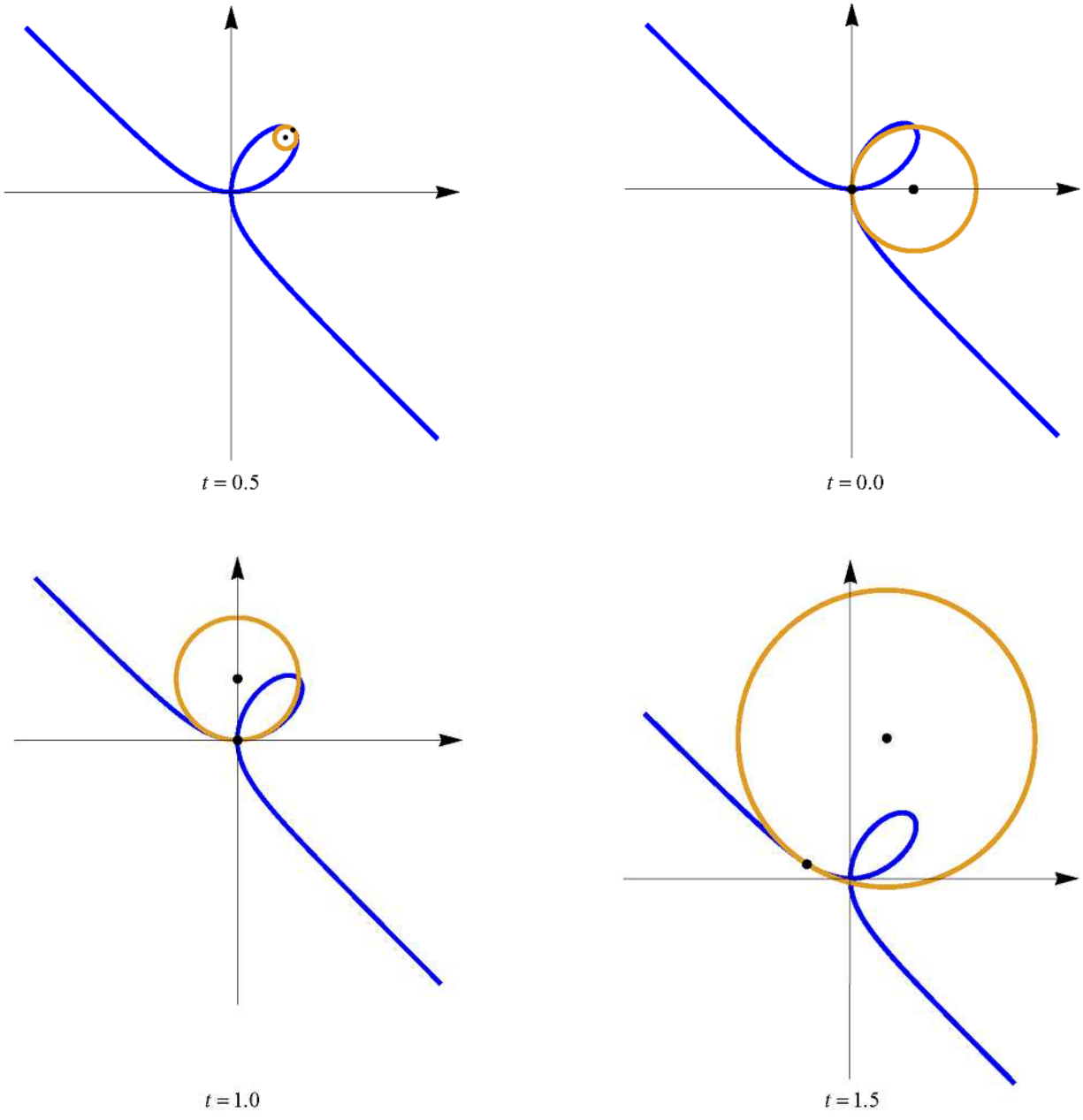
يتمّ بعد ذلك إعطاء الدائرة الملاصقة للمنحني في النقطة ذات الوسيط t بالتوسيط

$$\theta \mapsto \varphi(\theta) \quad (6.1.6.1)$$

حيث

$$\varphi(\theta) = r(t) + \rho(N + T\cos\theta + N\sin\theta). \quad (7.1.6.1)$$

تمثّل الأشكال أدناه الدوائر الملاصقة لوريقة ديكارت في بعض نقطها.



الشكل 6

2.6.1 المخروطيّ الملاصق للوريقة في إحدى نقطها

لتكن وريقة ديكارت المعطاة بالمعادلة (1.1) حيث $m=1$. إنّ النشر إلى سلسلة تايلور من الترتيب 2 للدالة f المعطاة بالعلاقة (1.2.1)، مع $m=1$، في جوار النقطة (x_0,y_0) من المنحني يعطي كثير الحدود لتايلور من الدرجة الثانية لـ f في جوار هذه النقطة وهو

$$T_f^{(2)}(x,y)=3x_0x^2+3y_0y^2-3xy-3x_0^2x-3y_0^2y+3x_0y_0. \quad (1.2.6.1)$$

المخروطيّ الذي تعرّفه المعادلة

$$3x_0x^2+3y_0y^2-3xy-3x_0^2x-3y_0^2y+3x_0y_0=0 \quad (2.2.6.1)$$

مماس لوريقة ديكارت في هذه النقطة.

ها هي بعض الأمثلة (الشكل 7).

في النقطة $(x_0,y_0)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ التي يتمّ الحصول عليها من أجل $t=1$، لدينا (القطع) الناقصيّ المعطى بالمعادلة

$$\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-xy-\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}y+\frac{9}{4}=0. \quad (3.2.6.1)$$

في النقطة $(x_0,y_0)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ التي يتمّ الحصول عليها من أجل $t=\frac{1}{2}$، لدينا (القطع) الناقصيّ المعطى بالمعادلة

$$\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2-xy-\frac{16}{9}x-\frac{4}{9}y+\frac{8}{9}=0. \quad (4.2.6.1)$$

في النقطة $(x_0,y_0)=\left(\frac{6}{7},-\frac{12}{7}\right)$ التي يتمّ الحصول عليها من أجل $t=-2$، لدينا (القطع) الزائديّ المعطى بالمعادلة

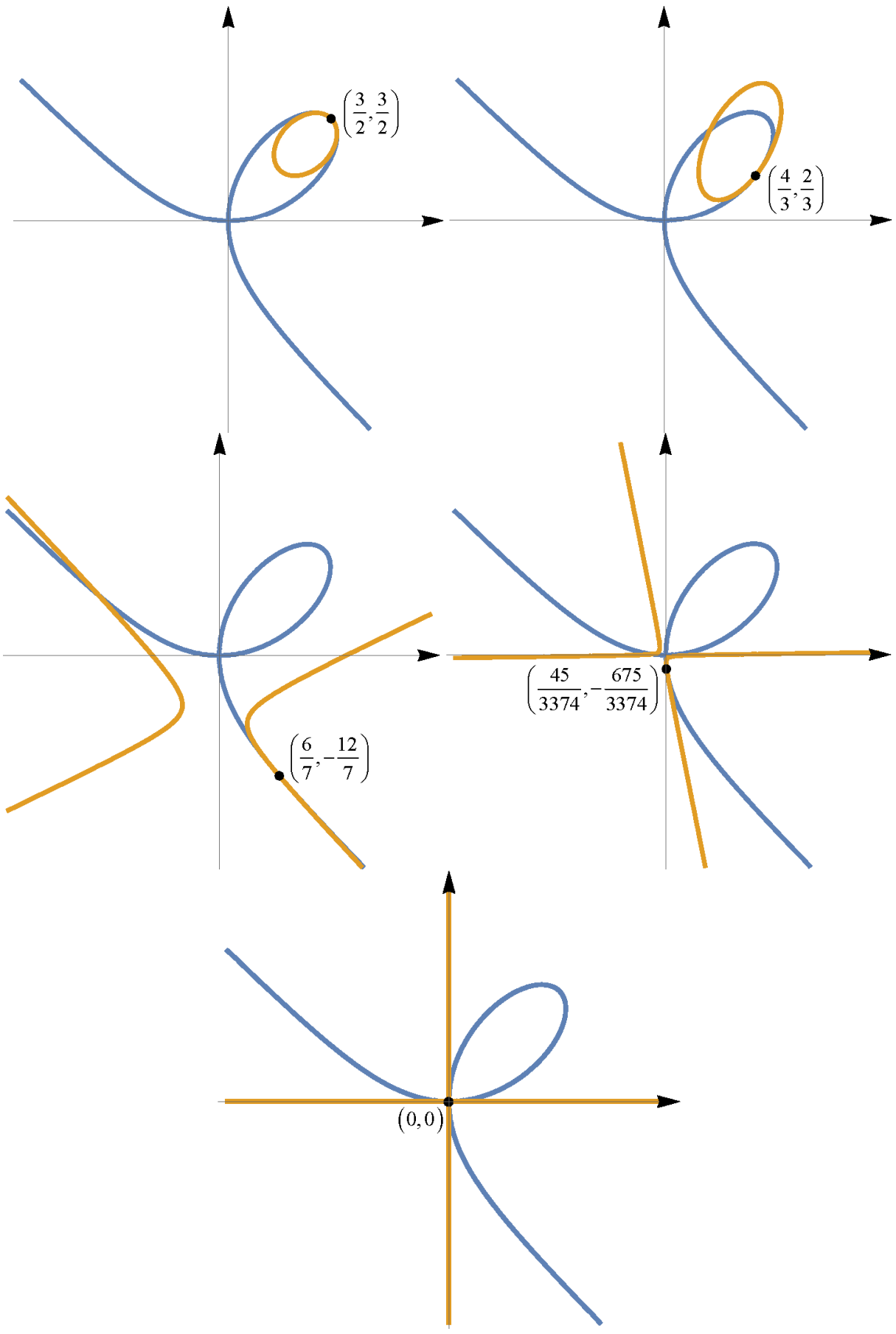
$$\frac{6}{7}x^2-\frac{12}{7}y^2-xy-\frac{36}{49}x-\frac{144}{49}y-\frac{72}{49}=0. \quad (5.2.6.1)$$

في النقطة $(x_0,y_0)=\left(\frac{45}{3374},-\frac{675}{3374}\right)$ التي يتمّ الحصول عليها من أجل $t=-15$، لدينا (القطع) الزائديّ المعطى بالمعادلة

$$\frac{45}{3374}x^2-\frac{675}{3374}y^2-xy-\frac{2025}{11383876}x-\frac{455625}{11383876}y-\frac{30375}{11383876}=0. \quad (6.2.6.1)$$

أخيرًا، في $(x_0,y_0)=(0,0)$، التي يتمّ الحصول عليها من أجل $t=0$ أو $t=\pm\infty$، لدينا المخروطيّ المنحلّ المعطى بالمعادلة

$$xy=0. \quad (7.2.6.1)$$


$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$
$\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$
$\left(\frac{6}{7},-\frac{12}{7}\right)$
$\left(\frac{45}{3374},-\frac{675}{3374}\right)$
$(0,0)$

الشكل7

7.1 بنية زمرة على وريقة ديكارت

لم تقدّم وريقة ديكارت دليلاً على خصائص معيّنة مرتبطة بمبرهنة فيرما الأخيرة، أو كمنحني هبس المرتبط بمنحن ناقصيّ فحسب، ولكنها تحتوي أيضًا على خاصة مثيرة جدًا للاهتمام وهي أنّه يمكننا تعريف قانون تركيب داخليّ يهب لها بنية زمرة. وما هذه إلا حالة خاصّة من قانون الزمرة على المنحنيات الناقصية.

تمت مناقشة بنيتي الزمرة الواردتين أدناه بشكل جيّد جدّا في المرجعين 4 و5 على التوالي.

1.7.1 قانون زمرة أوّل على وريقة ديكارت

1.1.7.1. نقط في اللامنتهي

ليكن $\mathbf{K}$ حقلاً وليكن $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^2=\{(x,y)\in\mathbf{K}^2\}$ المستوي التآلفي على $\mathbf{K}$. يتشكّل المستوي الإسقاطيّ $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^2$ على $\mathbf{K}$ من أصناف التكافؤ على $\mathbf{K}^3\setminus\{(0,0,0)\}$، حيث نعلن أنّ العنصرين (x,y,z) و (x',y',z') متكافئان إذا وفقط إذا وُجد λ في $\mathbf{K}^*$ بحيث يكون $(x,y,z)=(\lambda x',\lambda y',\lambda z')$. وسنشير بـ $(x:y:z)$ إلى النقطة (الإسقاطية)، أيْ صنف التكافؤ الذي يمثّله (x,y,z).

نقط $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^2$ مع $z\neq 0$ هي النقط "المنتهية". يمكن مطابقة هذه النقط مع نقط المستوي التآلفي. تُسمّى النقط $(x:y:0)$ بـ"نقط اللامنتهي" لـ $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^2$.

لنعد الآن إلى الوريقة المعرّفة بالمعادلة (1.1). معادلة مكمّلتها الإسقاطية، والتي تُسمّى أيضًا وريقة ديكارت، هي

$$x^3+y^3-3mxyz=0. \quad (1.1.1.7.1)$$

تتقابل النقط (x,y) في المستوي التآلفي مع النقط $(x:y:1)$ في المستوي الإسقاطي.

لمعرفة ما هي النقط التي تقع في اللامنتهي، نضع $z=0$ فنحصل على

$$x^3+y^3=0 \quad (2.1.1.7.1)$$

أو

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=0. \quad (3.1.1.7.1)$$

لدينا الآن احتمالان.

1. $x+y=0$. في هذه الحالة نحصل على النقطة في اللامنتهي $\infty_1=(-1:1:0)$.

2. $x^2-xy+y^2=0$. لنأخذ في هذه المعادلة x مجهولا و y وسيطا. مميز المعادلة يساوي $-3y^2$. إذا كان هناك عنصر α في $\mathbf{K}$ بحيث يكون $\alpha^2=-3$، فبعد التبسيط بواسطة y نحصل على النقطتين في اللامنتهي $\infty_2=\left(\frac{1+\alpha}{2}:1:0\right)$ و $\infty_3=\left(\frac{1-\alpha}{2}:1:0\right)$.

من أجل فهمٍ أفضلَ لكيفية عمل قانون الزمرة على وريقة ديكارت، نصفه بالنسبة إلى $\mathbf{K}=\mathbf{R}$، لأنّ في هذه الحالة لدينا تفسير هندسيّ واضح.

2.1.7.1 قانون الزمرة على وريقة ديكلرت

الملاحظة الأولى هي أنّه عندما يكون $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ، هناك نقطة واحدة فقط في اللامنتهي في $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{2}$ ، نشير إليها إذن ببساطة بـ ∞ ، مع الأخذ في الاعتبار أنّها في الواقع ∞_1.

لنبدأ بالنقطتين $P_1=(x_1,y_1)$ و $P_2=(x_2,y_2)$ على $\mathcal{F}$. لنعرّف نقطة جديدة S كما يأتي.

نرسم المستقيم $\ell=(P_1P_2)$. يلتقي هذا المستقيم بـ $\mathcal{F}$ في ثلاث نقط، وهي P_1 و P_2 ونقطة أخرى P_3. نأخذ هذه النقطة P_3 ونختار نظيرتها S بالنسبة إلى المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x$. نعرّف القانون الداخليّ * بالعلاقة $P_1*P_2=S$ (نذكّر أنّ الوريقة متناظرة بالنسبة إلى هذا المستقيم). بطبيعة الحال، هناك في هذا القانون بعض التعقيدات تحتاج إلى معالجة. أوّلاً، ماذا يحدث عندما يكون $P_1=P_2$ ، أيْ كيف يعمل P_1*P_1 ؟ في هذه الحالة، يُصبح المستقيم ℓ مماسًا لـ $\mathcal{F}$ في P_1. ثم يلتقي ℓ بـ $\mathcal{F}$ في نقطة أخرى P_3. (بمعنىً ما، ℓ يلتقي دائمًا بـ $\mathcal{F}$ في ثلاث نقط، لكنّ P_1 تُحسَب اثنتين منها)، ونعتبر أنّ P_1*P_2 ، يعني S ، هي نظيرة P_3 بالنسبة إلى المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x$. نضع $\infty*\infty=\infty$.

لنفترض الآن $P_1\neq\infty$. المعامل الزاويّ أو معامل التوجيه للمماس ℓ هو

$$p=\frac{-x_1^2+my_1}{y_1^2-mx_1}. \tag{1.2.1.7.1}$$

إذا كان $y_1^2-mx_1=0$ ، فإنّ ℓ الموازي لمحور التراتيب y ، يقبل المعادلة $x=x_1$ ويلتقي $\mathcal{F}$ في P_1 و P_3 ذات الإحداثيين $(x_3,y_3)=(x_1,-2y_1)$. إذن

$$P_1*P_1=(-2y_1,x_1).$$

إذا كان $y_1^2-mx_1\neq 0$ ، فسيتمّ إعطاء ℓ بالمعادلة $y=p(x-x_1)+y_1$. بالتعويض في معادلة $\mathcal{F}$ نحصل على

$$x^3+\left(p(x-x_1)+y_1\right)^3-3mx\left(p(x-x_1)+y_1\right)=0. \tag{3.2.1.7.1}$$

تكتب هذه المعادلة كالآتي

$$\begin{aligned}&\left(1+p^3\right)x^3+\left(-3p^3x_1+3p^2y_1-3mp\right)x^2\\ &+\left(3p^3x_1^3-6p^2x_1y_1+3py_1^2+3mpx_1-3my_1\right)x\\ &+y_1^3-p^3x_1^3+3p^2x_1^2y_1-3px_1y_1^2=0.\end{aligned} \tag{4.2.1.7.1}$$

إذا كان $p=-1$ (أي إذا كان $x_1=y_1$)، فإنّ $P_1*P_1=\infty$.

في خلاف ذلك، ليكن

$$s=\frac{3p^3x_1-3p^2y_1+3pm}{p^3+1} \tag{5.2.1.7.1}$$

مجموع جذور المعادلة أعلاه. لدينا إذن $x_3=s-2x_1$ وبالتعويض في معادلة ℓ ، يأتي $y_3=p(s-3x_1)+y_1$. ومنه

$$P_1*P_1=\left(p(s-3x_1)+y_1,s-2x_1\right). \tag{6.2.1.7.1}$$

لنفترض الآن $P_1\neq P_2$. إذا كان $x_1=x_2$ ، فإنّ ℓ الموازي لمحور الـ y ، يقبل المعادلة $x=x_1$ ويلتقي $\mathcal{F}$ في P_3 ذات الإحداثيين $(x_3,y_3)=(x_1,-y_1-y_2)$. إذن $P_1*P_1=(-y_1-y_2,x_1)$.

إذا كان $x_1\neq x_2$ ، فإنّ المستقيم ℓ يقبل معامل التوجيه

$$p=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{7.2.1.7.1}$$

والمعادلة

$$y=p(x-x_1)+y_1. \tag{8.2.1.7.1}$$

المعادلة التي تعطي فواصل نقط التقاء ℓ و $\mathcal{F}$ هي، بعد الاستبدال والتبسيط،

$$\begin{aligned}&\left(1+p^3\right)x^3+\left(-3p^3x_1+3p^2y_1-3mp\right)x^2\\&+\left(3p^3x_1^2-6p^2x_1y_1+3py_1^2+3mpx_1-3my_1\right)x\\&+y_1^3-p^3x_1^3+3p^2x_1^2y_1-3px_1y_1^2=0.\end{aligned}\tag{9.2.1.7.1}$$

إذا كان $p=-1$ (أي إذا كان $x_1=y_2$ و $x_2=y_1$)، فإنّ $P_1*P_2=\infty$.

إذا كان $p\neq -1$ ، نعتبر مجموع الجذور x_1 ، x_2 ، x_3 أيْ :

$$s=\frac{3p^3x_1-3p^2y_1+3pm}{p^3+1}.\tag{10.2.1.7.1}$$

ينتج عن هذا $x_3=s-x_1-x_2$ ، ثمّ $y_3=p\left(s-2x_1-x_2\right)+y_1$. لدينا إذن

$$P_1*P_2=\left(p\left(s-2x_1-x_2\right)+y_1,s-x_1-x_2\right).\tag{11.2.1.7.1}$$

إنّ تبديلية هذا القانون واضحة، والعنصر الحياديّ هو ∞ ومقلوب نقطة هو نظيرتها بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$. في الواقع، من السهل التحقّق من جميع خصائص بنية الزمرة باستثناء التجميعية. يمكن التحقّق من هذه الأخيرة من خلال عملية حسابية طويلة باستخدام صيغ واضحة أو من خلال طرق جبرية أو تحليلية أكثر تقدمًا تتجاوز طموح هذا المقال.

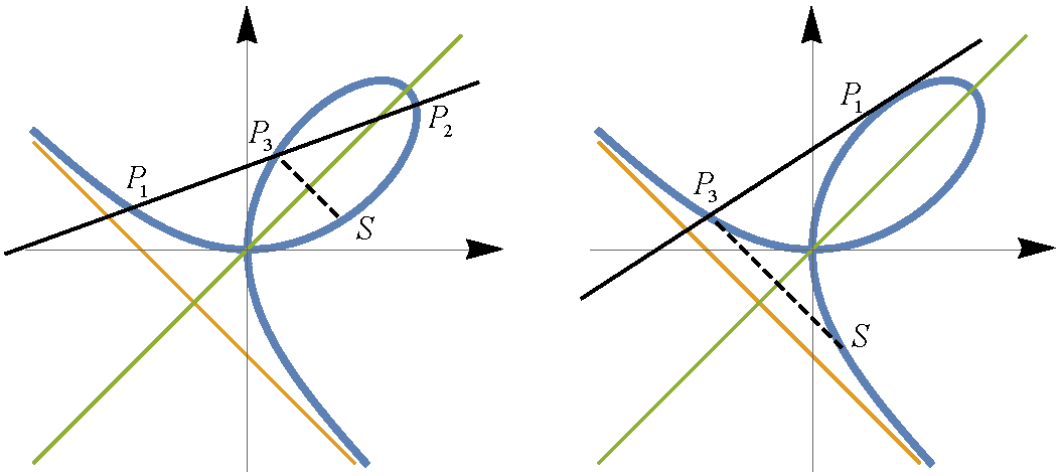
وبناء على ما سبق يمكننا أن نستنتج أنّ المجموعة

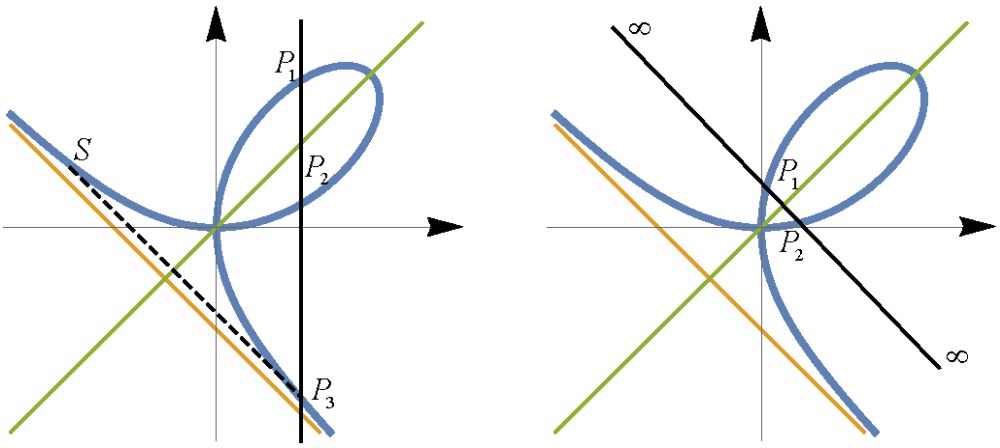
$$\mathcal{F}_m\left(\mathbf{R}\right)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*:x^3+y^3-3mxy=0\right\}\cup\{\infty\}\tag{12.2.1.7.1}$$

المجهّزة بقانون التركيب الداخليّ * المعرّف أعلاه هي زمرة تبديلية.

نلاحظ أنّ من الممكن النظرَ في وريقة ديكارت على حقل الأعداد الناطقة $\mathbf{Q}$ ، أو حقل الأعداد المركّبة $\mathbf{C}$ أو على حقل منته $\mathbf{K}=\mathbf{F}_r$ ذي r عنصرا، والبحث فيه عن النقط في اللامنتهي وتعريف قانون زمرة والتي ستكون منتهية بالنسبة إلى هذه الحالة الأخيرة. ربما يمكننا أيضًا توسيع هذه الوريقة إلى المرباعيات (Quaternions).

أخيرًا، نلاحظ أنّه لا يزال هناك العديد من التطبيقات التي يمكن العثور عليها لوريقة ديكارت، والمرتبطة بحقيقة وجود قانون زمرة على المنحني. على سبيل المثال، الشفرة على وريقة ديكارت ومسألة اللوغاريتم المنفصل على هذا المنحني.





الشكل 8

قانون تركيب داخليّ على وريقة ديكارت

2.7.1 قانون زمرة ثان على وريقة ديكلرت

لنطبّق تغيير الوسيط

$$\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}\setminus\{0\}\ ،\ t\mapsto u=1+t \qquad (1.2.7.1)$$

أيْ

$$\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}\setminus\{-1\}\ ،\ u\mapsto t=u-1. \qquad (2.2.7.1)$$

على التوسيط (2.1.4.1). نحصل على التوسيط الجديد للوريقة

$$\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}^2\ ،\ u\mapsto\left(x\left(u\right),y\left(u\right)\right) \qquad (3.2.7.1)$$

حيث

$$x\left(u\right)=\frac{3m\left(u-1\right)}{1+\left(u-1\right)^3},y\left(u\right)=\frac{3m\left(u-1\right)^2}{1+\left(u-1\right)^3}. \qquad (4.2.7.1)$$

من الواضح أنّ التقابل الجبريّ $\left(M\left(u\right),M\left(v\right)\right)\mapsto M\left(uv\right)$ ، حيث $M\left(s\right)$ هي النقطة ذات الوسيط s في التوسيط (3.2.7.1)، تعرّف قانون تركيب داخليّ

$$\left(\frac{3m\left(u-1\right)}{1+\left(u-1\right)^3},\frac{3m\left(u-1\right)^2}{1+\left(u-1\right)^3}\right)\circ\left(\frac{3m\left(v-1\right)}{1+\left(v-1\right)^3},\frac{3m\left(v-1\right)^2}{1+\left(v-1\right)^3}\right)=\left(\frac{3m\left(uv-1\right)}{1+\left(uv-1\right)^3},\frac{3m\left(uv-1\right)^2}{1+\left(uv-1\right)^3}\right) \qquad (5.2.7.1)$$

على وريقة ديكارت التي يعرّفها هذا التوسيط.

من الواضح أنّ النقطة $O\left(0,0\right)$ ذات الوسيط $u=1$ هي العنصر الحياديّ لهذا القانون. يتمّ استنتاج خصائص التجميعية والتبديلية من خصائص ضرب الأعداد الحقيقية (غير المنعدمة!). النظير (أو المقلوب) للنقطة ذات الوسيط u هو النقطة ذات الوسيط $1/u$. $\left(\mathcal{F},\circ\right)$ هي إذن زمرة تبديلية متشاكلة (تقابليا) مع الزمرة الضربية $\left(\mathbf{R}^*,\times\right)$. (4)

8.1 سطوح مرتبطة بوريقة ديكارت

1.8.1 سطح ريمان لوريقة ديكارت

لتكن الآن الوريقة

$$\bar{\mathcal{F}}=\left\{(x,y)\in\mathbf{C}^2 : f(x,y)=0\right\} \quad (1.1.8.1)$$

حيث

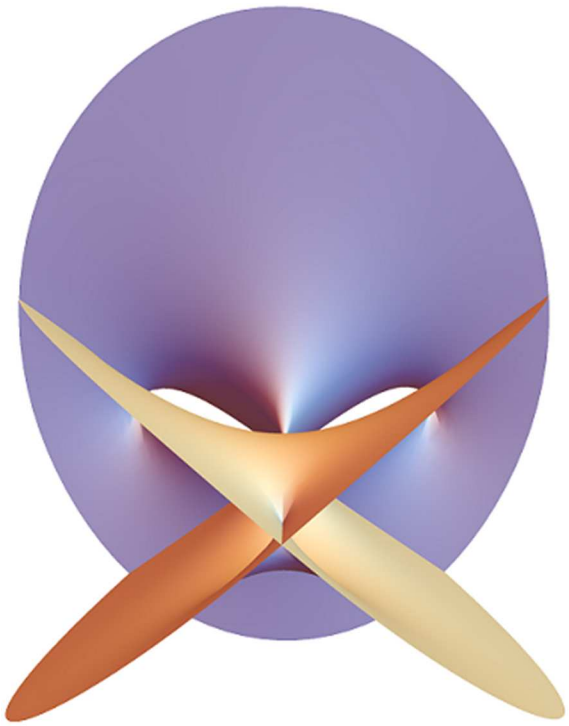
$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy. \quad (2.1.8.1)$$

إذا كان $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ (على التوالي $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$) في نقطة (x_0,y_0) من $\bar{\mathcal{F}}$ ، تختلف عن $(0,0)$ ، فإنّه، وفقا لمبرهنة الدوال الضمنية، يوجد تطبيق $h:V\to\mathbf{C}$ (على التوالي $g:W\to\mathbf{C}$) هولومورفي في جوار V (على التوالي في جوار W) لـ x_0 (على التوالي لـ y_0) بحيث تكون $\bar{\mathcal{F}}$ معرّفة بـ $y=h(x)$ (على التوالي $x=g(y)$) في جوار (x_0,y_0). وبالتالي فإنّ المنحني $\bar{\mathcal{F}}$ هو سطحٌ لريمان خريطته المحلّية في هذه النقطة الإسقاطُ الأوّل (على التوالي الثاني)

$$p_1:(x,y)\mapsto x \quad (\text{على التوالي } p_2:(x,y)\mapsto y) \quad (3.1.8.1)$$

يتكوّن سطح ريمان هذا من ثلاث ورقات، حيث أنّ قيمةً ما لأحد المتغيّرَين تقابلها ثلاث قيم للآخر.

إنّ سطح ريمان لوريقة ديكارت يكافئ الكرة بشكل محافظ (Conforme).

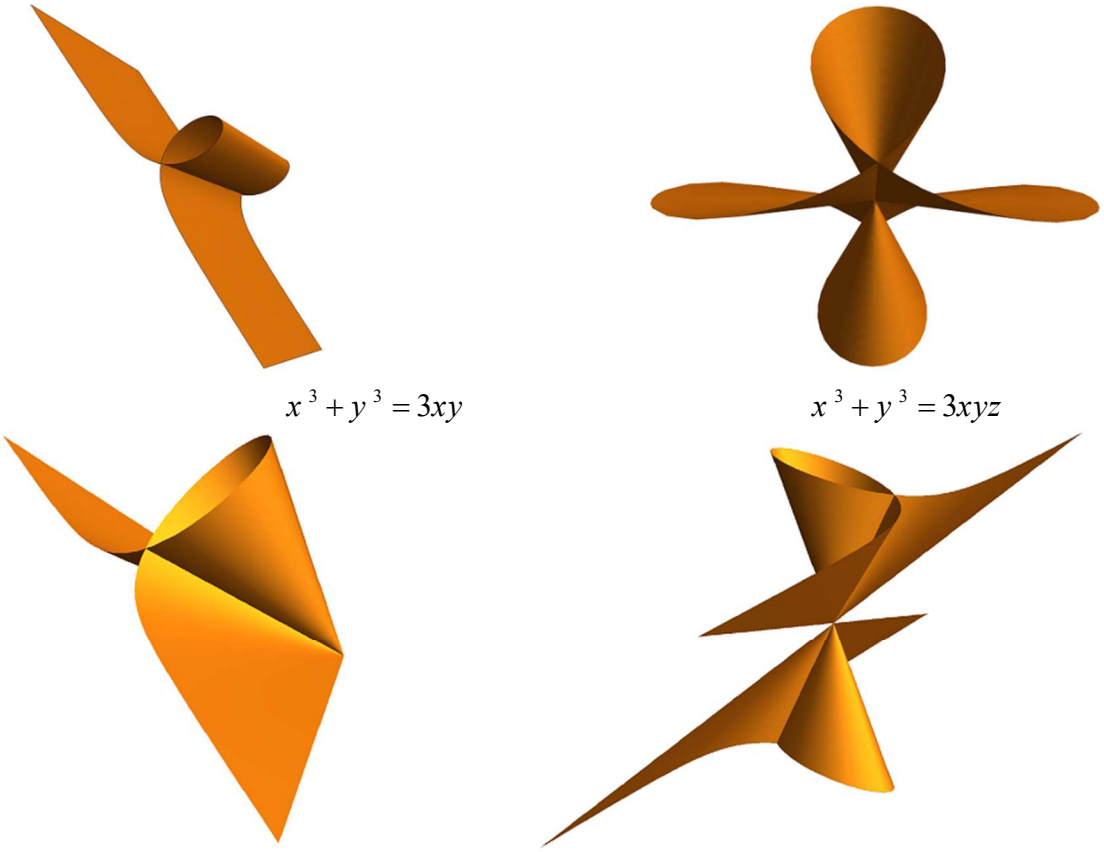


الشكل 9

سطح ريمان لوريقة ديكارت

2.8.1 سطوح أخرى مرتبطة بوريقة ديكارت

بالإضافة إلى سطح ريمان المرتبط بوريقة ديكارت، نورد أدناه بعض السطوح من بين العديد من السطوح الأخرى التي يمكن أن ترتبط بهذا المنحني (الشكل 10) .



$x^3+y^3=3xyz$ $x^3+y^3=3xy$

الشكل 10

$$(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=\left(v\frac{u^2-u^3}{1-3u+3u^2},v\frac{u-2u^2+u^3}{1-3u+3u^2},v\right)$$

$-5\le u\le 5, -2\le v\le 2$ $\qquad$ $-5\le u\le 5, 0\le v\le 2$

ملحوظة

إذا قمنا بتفجير الدائرة المركزية، قلبِ شريط موبيوس، بجعل شعاعها يؤول إلى الصفر، فسنحصل على مخروط (الشكل 10 في أعلى اليمين) يكون تقاطعه مع الكرة منحنيا مغلقا ذا نقطتين مزدوجتين وتقاطعه مع مستوٍ هو وريقة ديكارت المعرّفة بالمعادلة $x^3+y^3=3xy$. (5)

2. تعميم لوريقة ديكارت

1.2 وريقة ديكارت العامّة

يعود الفضل في تعميم وريقة ديكارت إلى وريقة ربما تكون الأجمل، إلى ج. ا. بولّارد :

J. A. Bullard, Problem 410, this MONTHLY23 (1916) 210,

J. A. Bullard, Solution of problem 410, this MONTHLY24 (1917) 86

تُعطى هذه الوريقة العامّة بالمعادلة (الشكل 11)

$$x^{2q+1}+y^{2q+1}-(2q+1)mx^q y^q=0 \quad (1.1.2)$$

حيث q عدد صحيح موجب. يُعرّف المستقيم المقارب لهذا المنحني بالمعادلة

$$x+y-(-1)^q m=0. \quad (2.1.2)$$

يمكن أيضًا تعريف المنحني بالتوسيط

$$\mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}^2$$
$$(3.1.2)\quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{(2q+1)mt^q}{1+t^{2q+1}} \\ \dfrac{(2q+1)mt^{q+1}}{1+t^{2q+1}} \end{cases}.$$

في الإحداثيات القطبية تمثّله المعادلة

$$(4.1.2)\quad \rho = \frac{(2q+1)m\sec\theta\tan^q\theta}{1+\tan^{2q+1}\theta}.$$

مساحة جزء المستوي المحدّد بالمنحني والمستقيم المقارب والتي هي بالضبط مساحة الجزء الذي تحدّه الحلقة، تساوي

$$(5.1.2)\quad A(q) = \frac{(2q+1)^2}{2}m^2\int_0^\infty \frac{t^{2q}}{\left(1+t^{2q+1}\right)^2}dt$$

أي

$$(6.1.2)\quad A(q) = \frac{2q+1}{2}m^2.$$

المعادلة السابقة هي مثال للمعادلة الأكثر عمومية الآتية

$$(7.1.2)\quad P_{2q+1}(x,y) = P_{2q}(x,y)$$

حيث P_n كثير حدود متجانس من الدرجة n.

إنّ تعميم بولّارد لوريقة ديكارت تعميم طبيعيّ جدّا لسببين. أوّلاً، شكل الوريقة المعمّمة هذه يشبه إلى حدّ كبير الوريقة الأصلية. ثانيًا، والأكثر أهمية، هو حقيقة أنّ معادلة هذا التعميم تتبع النمط

$$(8.1.2)\quad P_{2q+1}(x,y) = P_{2q}(x,y)$$

حيث P_n كثير حدود متجانس من الدرجة n.

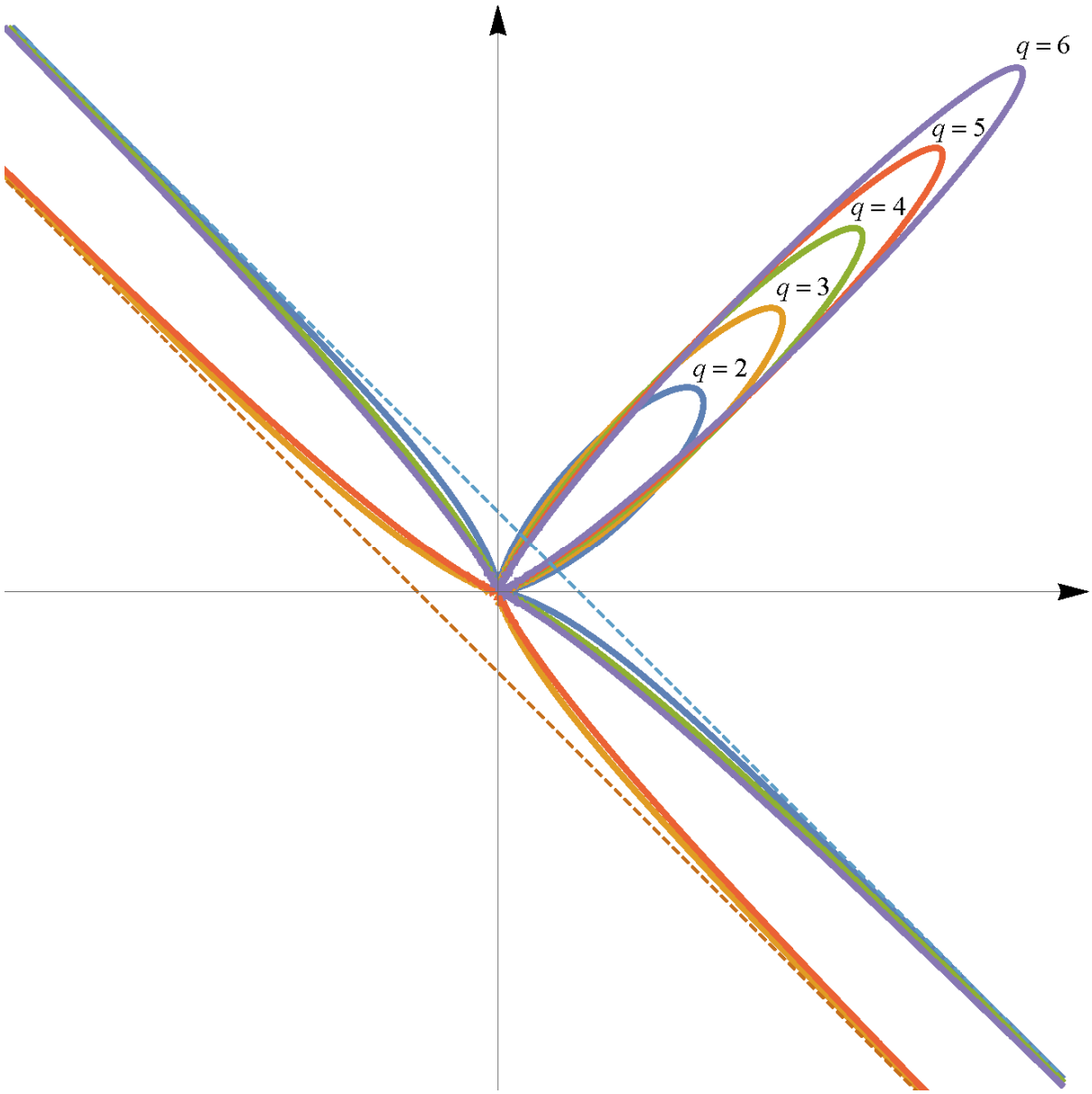
يسمح هذا النمط بمعالجة المنحني من خلال المعامل $t = y/x$. ونتيجة لذلك، يكون الانتقال إلى الإحداثيات القطبية قابلا للتطبيق.

ومع ذلك، هناك عائلة طبيعية أخرى من المنحنيات التي تعمّم وريقات ديكارت - وهي المنحنيات التي تحدّدها معادلات من النوع

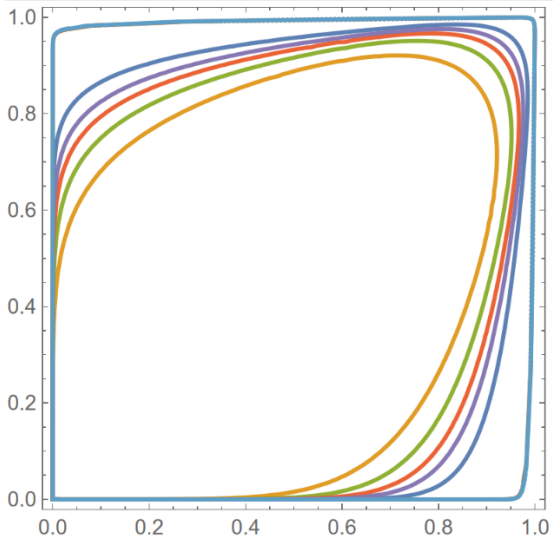
$$(9.1.2)\quad x^{2q+1} + y^{2q+1} - mxy = 0,$$

حيث m عدد حقيقيّ موجب و q عدد صحيح موجب.

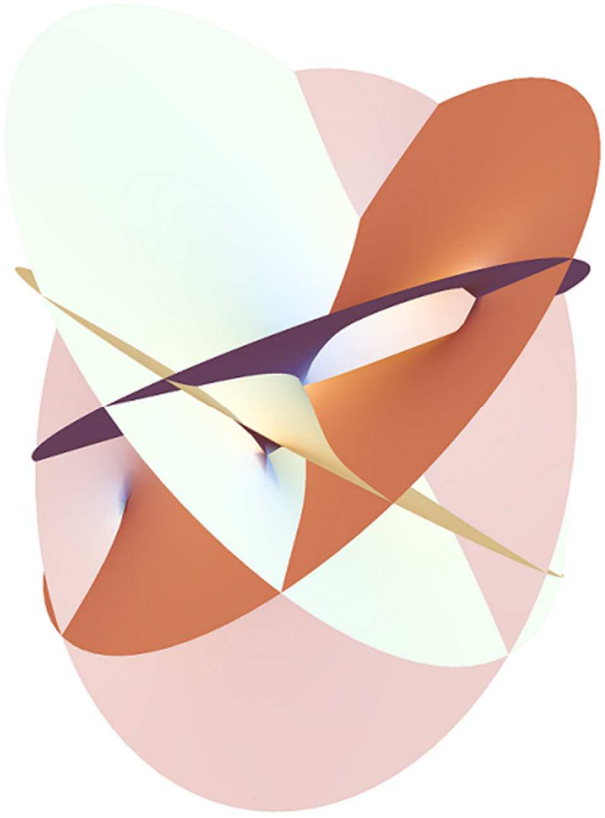
بالنسبة إلى $q > 1$ ، يكون المستقيم المقارب للمنحني معرّفا بالمعادلة $x + y = 0$، ومع تزايد q، يبدو أنّ الحلقة تقترب من حدود مربّع الوَحدة في الربع الأوّل، كما يشير الشكل 12.



الشكل 11 وريقات معمّمة من أجل $m=1$ و $q\in\{2,3,4,5,6\}$.

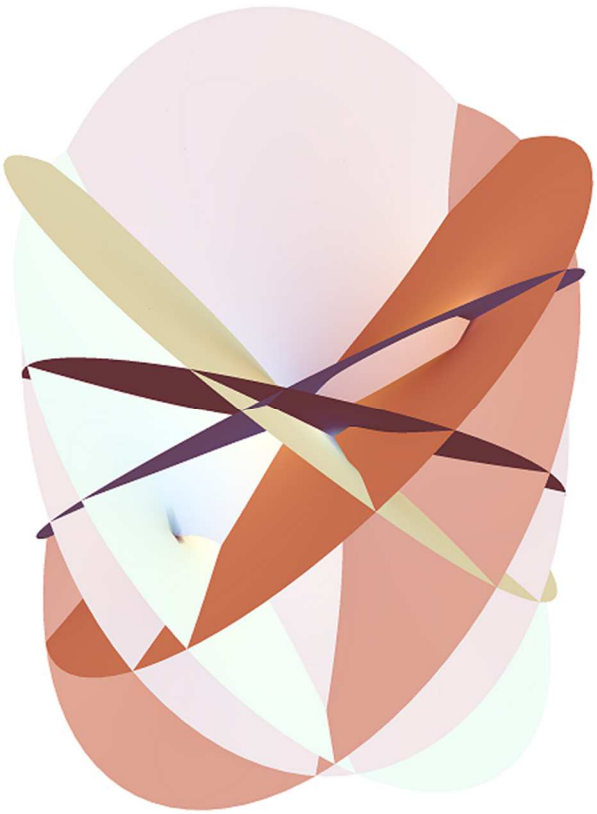


الشكل 12، $x^{2q+1}+y^{2q+1}-xy=0$



الشكل 13

سطح ريمان للوريقة الموافقة لـ $m = 1$ و $q = 2$.



الشكل 14

سطح ريمان للوريقة الموافقة لـ $m = 1$ و $q = 3$.

3. تشاكل بين حقل الأساس ومجموعة وريقات ديكارت

ليكن $\mathbf{K}$ حقلاً وليكن $\mathbf{A}^2_{\mathbf{K}} = \{(x,y) \in \mathbf{K}^2\}$ المستوي التآلفي على $\mathbf{K}$. نرمز إلى مجموعة وريقات ديكارت

$$\mathcal{F}_m = \{(x,y),(x,y) \in \mathbf{K}^2, x^{2q+1} + y^{2q+1} - (2q+1)mx^q y^q = 0\} \quad (1.3)$$

من الترتيب $2q+1$ بـ

$$\Phi = \{\mathcal{F}_m, m \in \mathbf{K}\}. \quad (2.3)$$

نزوّد هذه المجموعة بقانوني التركيب الداخليين $\oplus$ و $\otimes$ المعرّفين بالآتي

$$\mathcal{F}_m \oplus \mathcal{F}_{m'} = \mathcal{F}_{m+m'} \quad (3.3)$$

و

$$\mathcal{F}_m \otimes \mathcal{F}_{m'} = \mathcal{F}_{m \times m'} \quad (4.3)$$

واللذين عنصراهما الحياديان هما، على الترتيب، الوريقة المنحلّة $\mathcal{F}_0$ المعرّفة بالمعادلة

$$x + y = 0 \quad (5.3)$$

ووريقة الوَحدة $\mathcal{F}_1$ المعرّفة بالمعادلة

$$x^{2q+1} + y^{2q+1} - (2q+1)x^q y^q = 0. \quad (6.3)$$

من السهل التحقّق من أنّ التطبيق

$$\Psi : \mathbf{K} \to \Phi, m \mapsto \mathcal{F}_m \quad (7.3)$$

تشاكل (تقابليّ) بالنسبة إلى قانوني التركيب المذكورين أعلاه، يجعل من $\Phi = \{\mathcal{F}m, m \in \mathbf{K}\}$ حقلا متشاكلا مع $\mathbf{K}$.

يمكننا أيضًا اعتبار قانون التركيب الخارجيّ

$$\mathbf{K} \times \Phi \to \Phi, (\lambda, \mathcal{F}_m) \mapsto \lambda \mathcal{F}_m \quad (8.3)$$

حيث

$$\lambda \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{\lambda m}. \quad (9.3)$$

والذي يؤدّي إلى بنية فضاء شعاعيّ على المجموعة Φ لوريقات ديكارت.

يمكننا الاستمرار في إضافة المزيد من الطوابق إلى برج البنى المختلفة التي نستطيع أن نزوّد بها هذه المجموعة.

نلاحظ أخيرًا، بشكل عابر، أنّ أيّ نقطة $M(a,b)$ من $\mathbf{A}^2_{\mathbf{K}}$، حيث لا a منعدم ولا b منعدم (أيْ أنّ $ab \neq 0$)، تنتمي إلى عنصر من Φ وهو العنصر $\mathcal{F}_{m_{(a,b)}}$ حيث

$$m_{(a,b)} = \frac{a^{2q+1} + b^{2q+1}}{(2q+1)a^q b^q}. \quad (10.3)$$

بالطبع، نفترض هنا أنّ المقام ليس منعدما في $\mathbf{K}$.

4. الوريقات على العموم

نقدّم في هذه الفقرة، من بين أشياء أخرى، بعض المنحنيات التي تحمل في أدبيات الرياضيات اسم "وريقة".

1.4 الوريقة

تعرّف الوريقة أنّها قدميّة الدلتاوية. عندما يكون O هو قطب القدميّة ويكون مركز الدلتاوية $A(a,b)$ ونقطة القُرنة $B(a-2r,b)$ ، ويكون r شعاعَ الدائرة المرسومة في الدلتاوية، فإنّ الوريقة تعرّف بالمعادلة الديكارتية (الشكل 15)

$$(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)(ax+by)-rx(x^2-3y^2)=0. \quad (1.1.4)$$

في الإحداثيات القطبية لدينا المعادلة

$$\rho = r\cos 3\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \quad (2.1.4)$$

عندما يكون $b=0$ ، يُقال إن الوريقة قائمة وإذا كان $a=3r$ ، يُقال إنها بسيطة.

2. 4 وريقة دورَر

وريقة دورَر هي السداسية أو الستية الناطقة الـ 3-دائرية المعرّفة بالمعادلة الديكارتية (الشكل 15)

$$(x^2+y^2)\left[2(x^2+y^2)-a^2\right]^2-a^4x^2=0. \quad (1.2.4)$$

توسيط للمنحني هو

$$t\mapsto\left(\frac{a}{2}(\cos t+\cos 3t),\frac{a}{2}(\sin t+\sin 3t)\right). \quad (2.2.4)$$

3.4 الوريقة المكافئية

لتكن النقطة O والمستقيمان المتعامدان D_1 و D_2 . مستقيم متغيّر D يشمل O يلتقي D_1 في P ، والعموديّ في P يلتقي D_2 في Q ، والعموديّ في Q ، يلتقي D_1 في R ، والعموديّ في R يلتقي D في M ، الوريقة المكافئية هي مجموعة النقط التي تمسحها M عندما يتغيّر D . إذا كان، على سبيل المثال، D_1 و D_2 معرّفين بالمعادلتين $x=a$ و $y=b$ ، تكون الوريقة المكافئية المقابلة معرّفةً بالمعادلة الديكارتية (الشكل 15)

$$x^3-a(x^2-y^2)-bxy=0. \quad (1.3.4)$$

في الإحداثيات القطبية تكون هذه الوريقة معرّفة بالمعادلة

$$\rho=\frac{a}{\cos\theta}-\tan\theta\frac{a\tan\theta-b}{\cos\theta}. \quad (2.3.4)$$

في الحالة التي يشمل فيها المستقيم D_2 النقطة O ، أيْ لمّا يكون $b=0$ ، يُقال إنّ الوريقة المكافئية قائمة.

4. 4 الوريقة البسيطة

إنّها المنحني المستوي من الدرجة الرابعة المحدّد بالمعادلة الديكارتية (الشكل 15)

$$(x^2+y^2)^2-ax^3=0 \quad (1.4.4)$$

حيث a عدد حقيقيّ موجب تمامًا.

توسيط لهذا المنحني هو

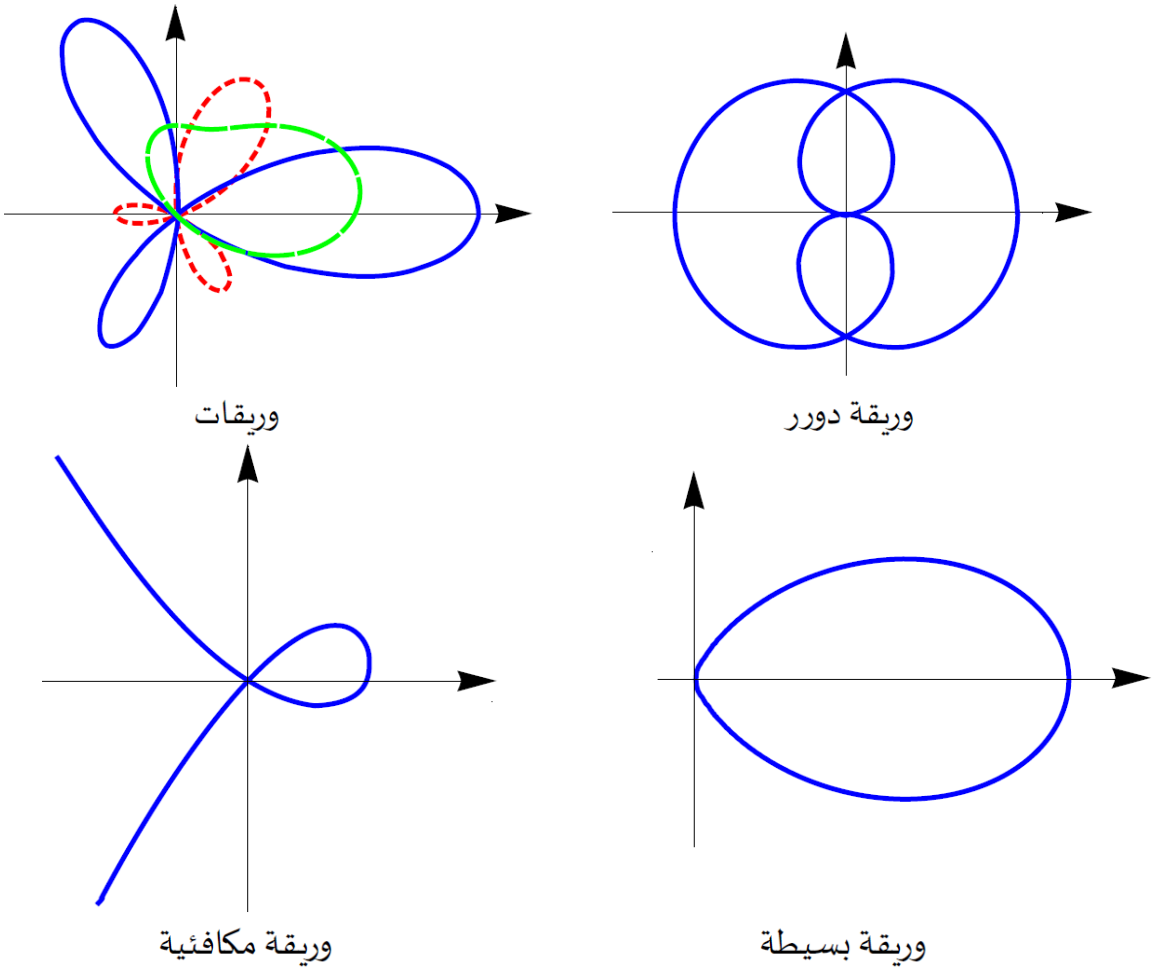
$$t\mapsto\left(\frac{a}{(1+t^2)^2},\frac{at}{(1+t^2)^2}\right). \quad (2.4.4)$$

في الإحداثيات القطبية تعرّف الوريقة البسيطة بالمعادلة

$$\rho=a\cos^3\theta. \quad (3.4.4)$$

مساحة جزء المستوي الذي تحدّه تساوي $\frac{5\pi a^2}{32}$.

لتكن النقطتان O و A والمستقيم المتغيّر D الذي يشمل O، الوريقة البسيطة هي المنحني الذي يرسمه المسقط على D للمسقط على (OA) للمسقط على D لـ A. الوريقة البسيطة هي قدميّة الدلتاوية بالنسبة إلى إحدى نقطها القُرنية.



الشكل 15

5. الوريقات المتعدّدة

1.5 الوريقة الثنائية

لتكن C دائرةً تشمل النقطة O ، $A(a,0)$ و $B(0,b)$ نقطتين معلومتين و D مستقيما يشمل O ويلتقي C مرة أخرى في P التي مسقطها H على Ox. الوريقة الثنائية المرتبطة بهذه المعطيات هي المنحني الذي يرسمه مسقط H على المستقيم (OP).

يعرّف هذا المنحني في الإحداثيات الديكارتية بالمعادلة

$$(x^2+y^2)^2-(ax+by)x^2=0 \quad (1.1.5)$$

وبالتوسيط

$$(2.1.5)\quad t \mapsto \left(\frac{a+bt}{\left(1+t^2\right)^2}, \frac{at+bt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right).$$

في الإحداثيات القطبية يعرّف المنحني بالمعادلة

$$(3.1.5)\quad \rho = (a\cos\theta + b\sin\theta)\cos^2\theta.$$

2.5 الوريقة الثنائية القائمة، المنتظمة أو الوريقة الثنائية لبروكار

تُعرّف هذه الوريقة بالمعادلة

$$(1.2.5)\quad \left(x^2+y^2\right)^2 - 4ax^2y = 0$$

وبالتوسيط

$$(2.2.5)\quad t \mapsto (a\sin t(1+\cos t), a\sin^2 t).$$

3.5 الوريقة الرباعية

الوريقة الرباعية أو البرسيم ذو الأوراق الأربع هو المنحني المستوي المعرّف بالتوسيط

$$(1.3.5)\quad t \mapsto (\cos t\cos 2t, \sin t\cos 2t).$$

في الإحداثيات القطبية يتمّ تعريفها بالمعادلة

$$(2.3.5)\quad \rho = \cos 2\theta.$$

معادلة في الإحداثيات الديكارتية هي

$$(3.3.5)\quad \left(x^2+y^2\right)^3 - \left(x^2-y^2\right)^2 = 0.$$

إنّها القدميّة (Podaire) والشّعاعية (Radiale) للنجميّ (Astroïde) بالنسبة إلى مركزه.

4. 5 الوريقة الثلاثية

تعرّف الوريقة الثلاثية في الإحداثيات الديكارتية، بالمعادلة

$$(1.4.5)\quad \left(x^2+y^2\right)^2 - by\left(x^2+y^2\right) - rx\left(x^2-3y^2\right) = 0.$$

في الإحداثيات القطبية لدينا المعادلة

$$(2.4.5)\quad \rho = r\cos 3\theta + b\sin\theta.$$

نحصل على المعادلتين من معادلة الوريقة (1.4) من أجل $a = 0$.

إنها قدميّة الدلتاوي (Deltoïde) عندما يكون القطب داخل الدلتاوي.

5.5 الوريقة الثلاثية لكرامر

وريقة كرامر هي المنحني من الدرجة الرابعة المحدّد ضمنيًا في الإحداثيات الديكارتية بالمعادلة

$$(1.5.5)\quad x^4 + y^4 - 2ax\left(x^2-y^2\right) = 0$$

حيث a حقيقيّ موجب. في الإحداثيات القطبية، تعرّف بالمعادلة

$$(2.5.5)\quad \rho = a\frac{2\cos\theta\cos 2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}.$$

6.5 الوريقة الثلاثية لدوّ لونشون وبروكار

إنّ ثلاثية دوّ لونشون وبروكار هي قدمية الدلتاوية بالنسبة إلى نقطة داخلية فيها. هذه حالة خاصة من الوريقة. عندما يكون قطب القدمية هو النقطة O ومركز الدلتاوية هو النقطة (a,b) والقرنة هي النقطة $(a-2r,b)$، تكون معادلة الوريقة الثلاثية في الإحداثيات القطبية

$$\rho = r\cos 3\theta + a\cos\theta + b\sin\theta . \quad (1.6.5)$$

في الإحداثيات الديكارتية تعرّف بالمعادلة

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2+y^2\right)(ax+by) - rx\left(x^2-3y^2\right) = 0 . \quad (2.6.5)$$

7.5 الوريقة الثلاثية المنتظمة

إنّها القدمية (والشّعاعية) للدلتاوية بالنسبة إلى مركزها.

وهي أيضًا غلاف دائرةٍ قطرها طرفاه مركز الدلتاوية ونقطة من هذه الدلتاوية. في الإحداثيات القطبية تعرّف بالمعادلة

$$\rho = a\cos 3\theta \quad (1.7.5)$$

وفي الإحداثيات الديكارتية بالمعادلة

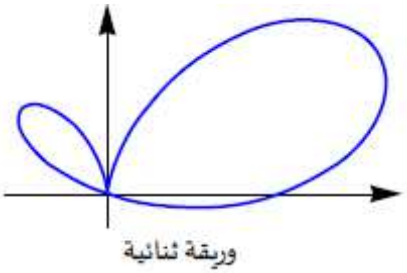
$$\left(x^2+y^2\right)^2 - ax\left(x^2-3y^2\right) = 0. \quad (2.7.5)$$

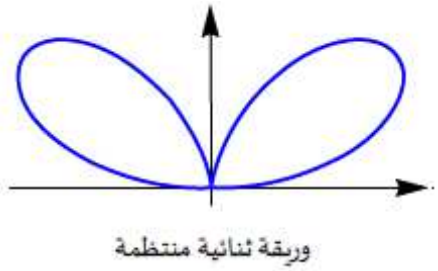
مساحة جزء المستوي الذي تحدّه هي $\frac{\pi}{4a^2}$..

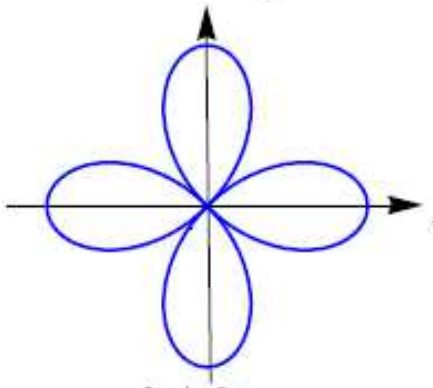
8.5 الـ n- وُرَيْقة

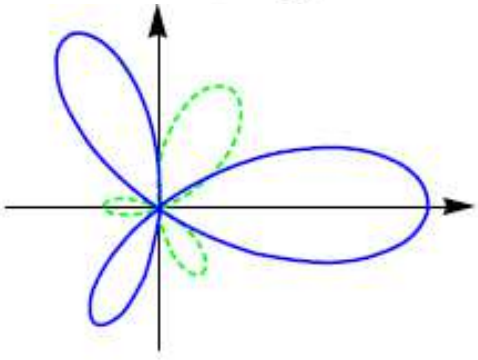
نسمّي n- وُرَيْقةً المنحني المستوي المحدّد في الإحداثيات القطبية بالمعادلة

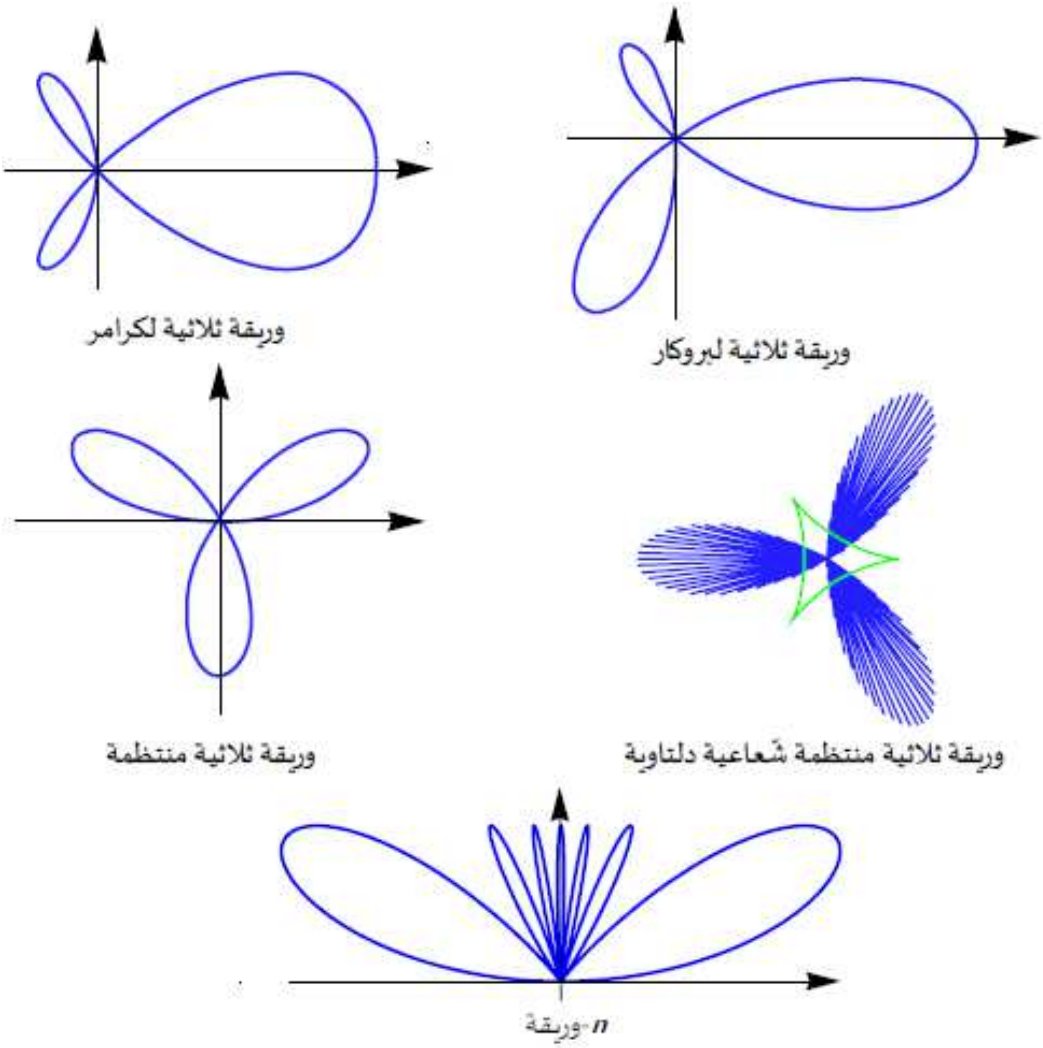
$$\rho = \frac{a\sin^2 n\theta}{\sin\theta}. \quad (1.8.5)$$


وريقة ثنائية


وريقة ثنائية منتظمة


وريقة رباعية


وريقة ثلاثية



الشكل 16

التعليقات

(1) كانت الصعوبة التي اعتقد ديكارت أنّه من المستحيل على فيرما التغلّب عليها هي أنّ المنحني المقترح كان منحنيا تكعيبيا معطًى بمعادلة ضمنية وهي $x^3 + y^3 = 3mxy$. كان ديكارت فخورًا جدّا بطريقته الخاصّة في رسم مُماسات المنحنيات. يقول في هذا السياق : "وأنا أجرؤ على القول إنّها ليست فقط أكثر المسائل الهندسية المفيدة والعامة التي أعرفها، بل حتى تلك التي أردت أن أعرفها على الإطلاق."

ولذلك ليس غريبًا أنّ ديكارت، عندما سمع عن طريقةٍ ابتكرها أحد الهواة المغمورين نسبيًا، ظنّ أنّ الحلّ المزعوم لن يكون أكثر من بناء سيء لن ينجح في اختباره. عندما قدّم فيرما المماسات المطلوبة ليس فقط في قمّة الوريقة (النقطة الوحيدة التي كانت طريقة ديكارت قابلة للتطبيق فيها) ولكن أيضًا في أيّ نقطة أخرى من المنحني، اضطرّ ديكارت إلى الاعتراف بتفوّق طريقة فيرما وعظمتها الفكرية.

(2) بالنسبة إلى $m = 0$ ، تختصر المعادلة إلى $x + y = 0$ والمنحني على المستقيم المعرّف بهذه المعادلة والذي يمكن اعتباره وريقةً منحلّة أو متردّية، وهو نهاية كلّ هذه الوريقات عندما يؤول m إلى 0.

(3) بالنسبة إلى هذا التوسيط، النقطة $O(0,0)$ تنتمي، من ناحية، إلى المنحني من أجل $t=0$، ومن ناحية أخرى، هي نقطة مقاربة له بجوار $t=-1$.

النقطة $O(0,0)$ ليست نقطة مزدوجة للمنحني (إنّها نقطة عادية)، لكنها ستكون كذلك في المستقيم الحقيقيّ المكتمل $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

(4) يمكننا بالطبع الاكتفاء بالتشاكل (3.2.7.1) بين الماڤما $(\mathbf{R}^*,\times)$ والماڤما $(\mathcal{F},\circ)$، والذي ينقل بنية الزمرة الضربية من $(\mathbf{R}^*,\times)$ إلى $(\mathcal{F},\circ)$.

(5) إيتيين جيس، نزهة رياضياتية فريدة، ترجمة حمزة خليف، ص. 118-119. أنظروا أيضا في المرجع 7، ص 1886.

المراجع

[1] Adam, Charles, Vie et œuvres de Descartes, Paris, Léopold Cerf, Imprimeur-Éditeur, 1910, p. 266.

[2] Adam, Charles & Paul, Tannery, Œuvres de Descartes, Paris Léopold Cerf, Imprimeur Éditeur l897.

[3] Bair, Jacques et Henry, Valérie, Les infiniment petits selon Fermat : prémisses de la notion de dérivée. http ://journals.openedition.org/bibnum/610, mis en ligne le 01 novembre 2008, consulté le 19 avril 2019.

[4] Constantinescu, Adrian, Udriste, Constantin, Pricopie, Steluta, *Genome of Descartes Folium via Normalization*, arXiv :1702.03215v1 [math.AG] 9 Feb 2017.

[5] Khelif, Hamza, The Garden of Curves, Reasoned Dictionary of Famous and Remarkable Plane Curves, Volume 1. Independently Published, June 19, 2024. KDP. Amazon.com

[6] Khelif, Hamza, Le jardin des courbes, *Dictionnaire raisonné des courbes planes célèbres et remarquables*, 2e Édition, Tome 1. Independently Published, June 2020. KDP. Amazon.com.

[7] Khelif, Hamza, Le jardin des surfaces, *Dictionnaire raisonné des courbes gauches, des surfaces et d'autres variétés célèbres et remarquables*. Independently Published, July 2020. KDP. Amazon.com.

[8] Mahoney, Michael Sean, The Mathematical Career of Pierre De Fermat. Princeton University Press Princeton, New Jersey. 1994.

[9] Maronne, Sébastien. La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661. [version déposée]. Philosophie. Université Paris-Diderot – Paris VII, 2007. Français. Tel-00204125v1.

[10] Merzbach, Uta C. and Boyer, Carl B., A History of Mathematics, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. 2011.

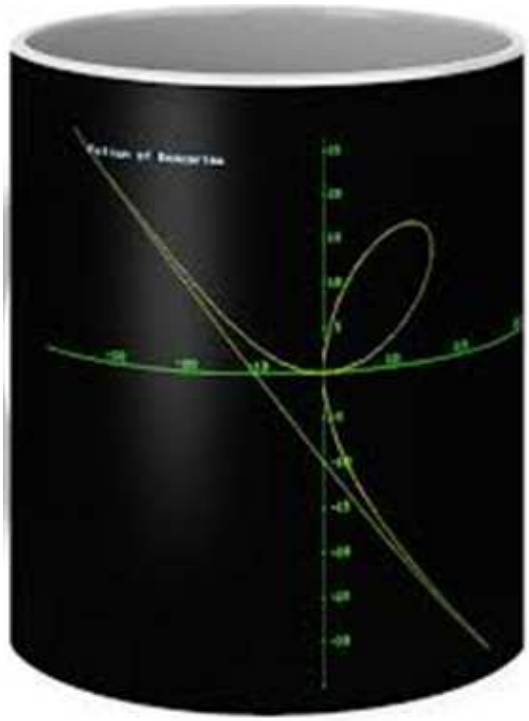
[11] Midy, M., Note sur le folium de Descartes, *Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 3 (1844), p. 293-303.

[12] Paradís, Jaume, Pla Josep and Pelegrí ViaderSource, Fermat and the Quadrature of the Folium of Descartes. The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 3 (Mar., 2004), pp. 216-229.

[13] Pricopie, Steluta and Udriste, Constantin, *Multiplicative group law on the folium of Descartes*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. 18, No. 1, 2013, pp. 54-70.

[14] Simmons, George F., Calculus Gems, Brief Lives and Memorable Mathematics. McGraw-Hill, Inc. 1992.

سرج القرد في السطح المعرّف بالمعادلة $z = x^3 + y^3 - 3xy$



وريقة ديكارت على فنجان. المصدر