الأعداد العقدانية

زهية مصطفاوي[1]، يسرى سعيدي[2]، لمية سليماني [2]، روميسة زعرة[2]
[1]أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
[2]طالبة متخرجة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
zahia.mostefaoui@g.ens-kouba.dz

يعود أصل اكتشاف الأعداد العقدية إلى القرن السادس عشر، لكن تطويرها وتأسيس نظريتها كان في القرن الثامن عشر. قام كارل فريدريش غاوس Carl Fredrich Gauss (1777-1855) بإسهامات مهمة في مجال الأعداد العقدية إلا أن عمله في هذا المجال لم ينتشر بشكل واسع في حياته. ويُعتبر أوغستين لويس كوشي Louis Augustin Cauchy (1789-1857) من الرواد في تأسيس التحليل العقدي.

يعود أصل مفهوم الأعداد العقدية إلى حقيقة أن حلول المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ ليست ذات معنى، من أجل $b^2 - 4ac < 0$، في مجموعة الأعداد الحقيقية. في هذا السياق، كان ليونارد أويلر Leonhard Euler (1707-1783) أول من استخدم الرمز i، للدلالة على $\sqrt{-1}$ حيث $i^2 = -1$. أطلق أويلر على الرمز i مصطلح "العدد التخيلي". من جهة أخرى، الأعداد التي كانت مستخدمة قبل ظهور الرمز i سُميت بالأعداد الحقيقية. وهكذا يُكتب العدد العقدي بالشكل $a + bi$ حيث a وb عددان حقيقيان.

يمكن تمثيل الأعداد العقدية هندسيًا. وفكرة تمثيل الأعداد العقدية بنقاط في المستوي كانت قد طرأت على العديد من علماء الرياضيات، لكن غاوس كان أول من تصور الفكرة واستخدمها بشكل منهجي في تطوير النظرية. بالإضافة إلى تمثيل الأعداد العقدية بنقاط في المستوي، يمكن تقديم تمثيل مفيد لهذه الأعداد على سطح الكرة، وهذه كانت فكرة برنارد ريمان Bernhard Riemann (1826-1866).

في البداية، لم يكن هناك إدراك واضح بأن الأعداد التخيلية يمكن تعريفها بطريقة مرضية ومنطقية تجعلها مقبولة لدى علماء الرياضيات، مما أدى إلى استبعاد أي مخاوف بشأن نشأة تناقضات. الأساس المنطقي للأعداد العقدية تم تقديمه لاحقًا من قِبل ويليام روان هاميلتون William Rowan Hamilton (1805-1865)، الذي كان نهجه حسابيًا، ومن قِبل غاوس الذي اعتمد على النهج الهندسي. بمجرد أن قدّم غاوس تفسيرًا هندسيًا لنظام الأعداد العقدية، تم قبول هذا النظام وتركيباته الثنائية وهيكله الحقلي دون أي تحفظ.

1. الأعداد العقدانية

أفضل امتداد معروف لفضاء الأعداد العقدية في إطار رباعي الأبعاد هو مجموعة الرباعيات العقدية (Quaternions) التي قدّمها هاملتون في عام 1843. تنشأ الرباعيات من خلال ثلاث وحدات تخيلية i وj وk حيث $i^2 = j^2 = -1$ و$ij = k$. ومن المميز في مجموعة الرباعيات أنها لا تشكل حقلًا؛ فعملية الضرب في مجموعة الرباعيات ليست تبديلية، مثلًا $ij = k$ بينما $ji = -k$.

من وجهة نظر جبرية بحتة، فإن الافتقار إلى التبديلية ليس مشكلة كبيرة، ومع ذلك، فإنه يخلق العديد من الصعوبات عندما يحاول المرء توسيع نظرية التوابع التحليلية (الهولومورفية) لمتغير عقدي واحد لتشمل الرباعيات. في هذا السياق، يجب الإشارة إلى وجود العديد من النظريات الناجحة في نظام الرباعيات العقدية من بينها، ما يتعلق بمفهوم التوابع المنتظمة (regular functions) الذي قدّمه رودولف فوتير Rudolf Fueter (1880-1950).

لهذا السبب، من المعقول التفكير فيما إذا كان الجبر رباعي الأبعاد، الذي يحتوي على المجموعة $\mathbb{C}$ كجبر فرعي، يمكن إدخاله بطريقة تحافظ على التبادلية وذلك بمجرد التفكير في وحدتين تخيليتين i و j وإدخال $k = ij$ (كما في الحالة الرباعية) لكن مع فرض $ij = ji$. هذا يحوّل k إلى وحدة تخيلية زائدية بحيث $k^2 = 1$.

قُدّمت هذه المفاهيم لأول مرة تقريبًا في الفترة ذاتها التي وضع فيها هاملتون بناءه. في عام 1848، كتب جيمس كوكل James Cockle (1819-1895) سلسلة من المقالات قدّم فيها جبرًا جديدًا عُرف باسم جبر التيسارين (tessarines). أدرك كوكل على الفور أن هناك ثمنًا يجب دفعه مقابل الحفاظ على التبادلية في أربعة أبعاد، وكان الثمن هو وجود قواسم صفرية. أطلق كوكل على هذه القواسم الصفرية اسم الأعداد المستحيلة. لم يشهد هذا المجال أي تطور مهم آخر لفترة من الزمن.

في عام 1892، استلهم كورادو سجري Corrado Segre (1863-1924) من أعمال هاملتون ووليام كليفورد William Clifford (1845-1879)، وقدّم مفهومًا جديدًا أُطلق عليه اسم الأعداد العقدانية. لاحظ سجري أن العاملين $\frac{1+ij}{2}$ و $\frac{1-ij}{2}$ هما عددان حافظان (idempotent) ويلعبان دورًا مهمًا في نظريات الأعداد العقدانية. وفق بعض الرياضياتيين، يُعدّ الرياضياتيان سبامبيناتو Spampinato وسكورزا دراقوني Scorza Dragoni (1908-1996) أول من وضع أساسيات نظريات الأعداد العقدانية.

جاءت الدفعة التالية في دراسة التحليل العقداني، وكانت أكثر كثافة من سابقاتها، من قِبل جيمس ريلي James Riley الذي نشر أطروحة الدكتوراه الخاصة به في سنة 1953، حيث قام بتطوير أساسيات نظريات المتغيرات العقدانية. لكن المساهمة الأكبر كانت بلا شك من إنجاز جريفيث برايس Griffith Price (1905-2006) الذي طوّر نظرية التوابع التحليلية ذات المتغيرات العقدانية، والتي تُعدّ أهم إنجاز في هذه النظرية.

1.1. تعريف الأعداد العقدانية

نُعرّف مجموعة الأعداد العقدانية (bicomplex numbers)، المرموز لها بالرمز $\mathbb{BC}$، كما يلي:

$$\mathbb{BC} = \{z_1 + jz_2 |\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

حيث $\mathbb{C}$ هي مجموعة الأعداد العقدية بالوحدة التخيلية i (imaginary unit)، مع:

$$ij = ji$$

و

$$i^2 = j^2 = -1.$$

الأعداد العقدانية هي أعداد عقدية بمعاملات عقدية. سنعرض فيما يلي الخصائص المشتركة بين الأعداد العقدانية والأعداد العقدية والعديد من الاختلافات الهامة بينهما.

2.1. الجمع والضرب في $\mathbb{BC}$

إذا كان $z = z_1 + jz_2$ و $w = w_1 + jw_2$ عددين عقدانيين، فإننا نُعرّف الجمع (+) والضرب (.) كما يلي:

$$z + w = (z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2),$$
$$z\,.\,w = (z_1 + j\,z_2)(w_1 + jw_2) = (z_1w_1 - z_2w_2) + j\,(z_1w_2 + z_2w_1).$$

تبادلية ضرب الوحدتين التخيليتين مع التعريفين السابقين تعني أن كلا العمليتين تمتلكان الخصائص المعتادة:

$$z + w = w + z, \qquad z + (w + y) = (z + w) + y,$$

أي أن الجمع تبديلي وتجميعي؛

$$z.w = w.z, \quad z.(w.y) = (z.w).y,$$

أي أن الضرب تبديلي وتجميعي؛

$$z\,.\,(w + y) = z.w + z\,.\,y,$$

أي أن الضرب توزيعي على الجمع.

العددان العقدانيان

$$0 = 0 + j.0$$

و

$$1 = 1 + j.0$$

يلعبان دوري الصفر والواحد المعتادين:

$$0 + \mathrm{z} = \mathrm{z} + 0 = \mathrm{z},$$
$$1.\mathrm{z} = \mathrm{z}.1 = \mathrm{z}.$$

المجموعة $(\mathbb{BC}, +, .)$ تشكل حلقة تبديلية.

إلى الآن، استخدمنا الرمز $\mathbb{C}$ للإشارة إلى مجموعة الأعداد العقدية، لكن مع الأعداد العقدانية يجب أن ندقق نظرًا لوجود مجموعتين جزئيتين داخل $\mathbb{BC}$. الأولى هي مجموعة الأعداد العقدية مع

$$\mathrm{z}_2 = 0.$$

أي أن $\mathrm{z} = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}.0 = \mathrm{z}_1$ ، ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $\mathbb{C}(\mathrm{i})$.

نظرًا لأن j لها نفس الخاصية المميزة

$$\mathrm{j}^2 = -1,$$

فالمجموعة الثانية من الأعداد العقدية داخل $\mathbb{BC}$ هي:

$$\mathbb{C}(\mathrm{j}) = \{\mathrm{z}_1 + \mathrm{j}\mathrm{z}_2 |\ \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2\ \in \mathbb{R}\}.$$

المجموعتان $\mathbb{C}(\mathrm{i})$ و $\mathbb{C}(\mathrm{j})$ هما حقلان متشابهان داخل $\mathbb{BC}$ ولكنهما مختلفان.

2. مجموعة الأعداد الزائدية

بشكل مستقل عن $\mathbb{BC}$، تُعرّف مجموعة الأعداد الزائدية (hyperbolic numbers)، المرموز لها بـ D كما يلي:

$$D = \{x + ky|\ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

حيث k هي وحدة تخيلية زائدية مع $k^2 = 1$.

- في بعض الأدبيات، تُسمّى الأعداد الزائدية أيضًا بالأعداد الثنائية الحقيقية.
- لعمليات الضرب (.) والجمع (+) للأعداد الزائدية تعريفات واضحة، يكفي أن نعوّض $k^2 = 1$. على سبيل المثال:

إذا كان $z_1 = x_1 + ky_1$ و $z_2 = x_2 + ky_2$ عددين زائديين، فإن:

$$z_1.z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + k(x_1y_2 + x_2y_1).$$

في المجموعة $\mathbb{BC}$، الوحدة الزائدية k تنتج من ضرب الوحدتين التخيليتين i و j ، أي أن:

$$k = ij.$$

وبالتالي، توجد مجموعة جزئية في $\mathbb{BC}$ تكون مشابهة لها كحلقة، وهي مجموعة الأعداد الزائدية:

$$D = \{x + ij.y|x, y \in \mathbb{R}\}$$

ولها نفس التعريفات والعمليات والخصائص الجبرية لـ $\mathbb{BC}$.

1.2. الطرق المختلفة لكتابة المجموعة *D*

تعاريف

- المجموعة D^+ المعرفة بـ:

$$D^+ \ = \{x + ky|\ x^2 - \ y^2 \geq 0, x \geq 0\}$$

تسمى مجموعة الأعداد الزائدية الموجبة.

- المجموعة $D^+ \setminus \{0\}$ المعرفة بـ:

$$D^+ \setminus \{0\} = \{x + ky|\ x^2 - y^2 \geq 0, x > 0\}$$

تسمى مجموعة الأعداد الزائدية الموجبة تماما.

- المجموعة D^- المعرفة بـ:

$$D^+ = \{x+ky \mid x^2 - y^2 \geq 0, x \leq 0\}$$

تسمى بالأعداد الزائدية السالبة.

- المجموعة $D^- \setminus \{0\}$ المعرفة بـ:

$$D^- \setminus \{0\} = \{x+ky \mid x^2 - y^2 \geq 0, x < 0$$

هي مجموعة الأعداد الزائدية السالبة تماما.

ملاحظات

– الأعداد الزائدية الموجبة تلعب، بالنسبة للأعداد الزائدية، دورًا مشابهًا إلى حد كبير لدور الأعداد الحقيقية الموجبة

– بالنسبة لجميع الأعداد الحقيقية، توجد أعداد زائدية لا هي موجبة ولا هي سالبة.

3. الطرق المختلفة لكتابة الأعداد العقدانية

العدد العقداني $z = z_1 + jz_2$ مع $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$، له عدة أشكال أخرى من الكتابة التي تساعدنا على فهم بنية المجموعة $\mathbb{BC}$ بشكل أفضل.

ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ مع $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. يمكن كتابة أي عدد عقداني بالطرق المختلفة التالية:

$$\begin{aligned}
z &= (x_1 + iy_1) + j(x_2 + iy_2) =: z_1 + jz_2 && (1)\\
z &= (x_1 + jx_2) + i(y_1 + jy_2) =: \alpha_1 + i\alpha_2 && (2)\\
z &= (x_1 + ky_2) + i(y_1 - kx_2) =: \beta_1 + i\beta_2 && (3)\\
z &= (x_1 + ky_2) + j(x_2 - ky_1) =: \gamma_1 + j\gamma_2 && (4)\\
z &= (x_1 + iy_1) + k(y_2 - ix_2) =: w_1 + kw_2 && (5)\\
z &= (x_1 + jx_2) + k(y_2 - jy_1) =: \delta_1 + k\delta_2 && (6)\\
z &= x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2 && (7)
\end{aligned}$$

مع

$$z_1, z_2 \ , w_1, w_2 \in \mathbb{C}(i)$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \ , \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}(j)$$

و

$$\beta_1, \beta_2 \ , \gamma_1, \gamma_2 \in D.$$

الصيغة الأخيرة تبين أن كل عدد عقداني يمكن اعتباره عنصرًا من $\mathbb{R}^4$.

الصيغتان (1) و (5) تسمحان لنا بمطابقة z بالعناصر الموجودة في $\mathbb{C}^2(i)$. والصيغتان (2) و (6) مع العناصر الموجودة في $\mathbb{C}^2(j)$ والصيغتان (3) و (4) تسمحان لنا بمطابقة z بالعناصر الموجودة في $D^2 = D \times D$.

4. مرافقات الأعداد العقدانية

باعتبار أن مجموعة الأعداد العقدانية تتكون من وحدتين تخيليتين (واحدة عقدية والأخرى زائدية)، تم اقتراح ثلاث مرافقات للعدد العقداني كما يلي:

تعريف

1) البار-مرافق: $\bar{z} := \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$،
2) ~-مرافق: $\tilde{z} := z_1 - jz_2$،
3) *-مرافق: $z^* := \bar{\tilde{z}} = \tilde{\bar{z}} = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$

حيث $\bar{z}_1$ و $\bar{z}_2$ هما المرافقان العقديان لـ z_1 و z_2 على الترتيب.

لنرى كيف نحصل على هذه المرافقات في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}(i)$ و $\mathbb{C}(j)$، وكذلك في مجموعة الأعداد الزائدية D.

- إذا كان $z = z_1 \in \mathbb{C}(i)$ أي $z_2 = 0$، فإن $z = z_1 = x_1 + iy_1$. ومنه يكون لدينا:
$$\bar{z} = \bar{z}_1 = x_1 - iy_1 = {z_1}^* = z^*, \quad \tilde{z} = \tilde{z}_1 = z_1 = z.$$
أي أن كل من البار-مرافق وال *-مرافق ينطبقان مع المرافق المعتاد في $\mathbb{C}(i)$. كما أن الـ ~ -مرافق ثابت لكل عناصر $\mathbb{C}(i)$.

- إذا كان $z = \alpha_1 \in \mathbb{C}(j)$ فإن $z = \alpha_1 = x_1 + jx_2$. ومنه يكون لدينا:
$$\bar{z} = \bar{\alpha}_1 = \alpha_1, \quad \tilde{z} = \tilde{\alpha}_1 = x_1 - jx_2 = z^*.$$
أي أن كل من ~ -مرافق وال *-مرافق ينطبقان مع المرافق المعتاد في $\mathbb{C}(i)$.

لتجنب أي التباس مع الترميز، من الآن فصاعدا سنعرّف الترافق على $\mathbb{C}(j)$ مع الـ ~ -مرافق. لاحظ أن أي عنصر في $\mathbb{C}(j)$ ثابت بواسطة البار-مرافق.

- أخيرًا، إذا كان $z = x_1 + ijy_2 \in D$ فإن $x_2 = y_1 = 0$. إذن:
$$\bar{z} = x_1 - ijy_2 = \tilde{z}, \quad z^* = z.$$
وهكذا، البار-مرافق وال ~ -مرافق ينطبقان مع المرافق المعتاد في D . سنستعمل البار-مرافق للدلالة على هذه الأخيرة. لاحظ أن أي عدد زائدي ثابت بواسطة الـ *مرافق.

خواص

- كل مرافق يحقق الخاصية الجمعية (بمعنى أن مرافق المجموع يساوي مجموع المرافقات).
- مرافق مرافق عدد هو العدد ذاته.
- مرافق حاصل الضرب يساوي ضرب المرافقين في المجموعة $\mathbb{BC}$.

5. القيمة المطلقة (طويلة) للأعداد العقدانية

في الحالة العقدية، للطويلة علاقة وثيق بمرافق عدد عقدي: بضرب العدد العقدي في مرافقه، نحصل على مربع طويلته.

تعاريف وخواص

بتطبيق الفكرة أعلاه على كل من المرافقات الثلاث المعرفة سابقًا، نحصل على ثلاثة تعاريف ممكنة للطويلة بصيغ تربيعها:

$$|\, z|_i^2 = z.\tilde{z},$$
$$|\, z|_j^2 = z.\bar{z},$$
$$|\, z|_k^2 = z.z^*.$$

خلافًا لما يحدث في الحالة العقدية، ليست كل الطويلات السابقة قيمًا في $\mathbb{R}_+$. الطويلتان $|\, z|_i^2$ و $|\, z|_j^2$ هما قيمتان عقديان في $\mathbb{C}(i)$ و $\mathbb{C}(j)$ على التوالي، في حين أن الأخيرة هي قيمة زائدية.

خاتمة

الأعداد العقدانية هي "أعداد عقدية ذات معاملات عقدية". وفيما سبق، حاولنا التأكيد على أوجه التشابه بين خصائص الأعداد العقدية والأعداد العقدانية. رغم أن الأعداد العقدانية تشترك في بعض البنى والخصائص مع الأعداد العقدية، إلا أن هناك العديد من الاختلافات العميقة وحتى اللافتة بين هذين النوعين من الأعداد. ويُعد التحليل العقداني مجالًا واسعًا ومثيرًا للاهتمام والفضول.

مراجع

[1] Price, G.B., An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions, M. Dekker, New York, 1991.

[2] Riley, J.D., Contributions to the theory of functions of bicomplex variable, Tohoku Mathematical Journal, Second Series, *5*(2), (1953), 132–165.

[3] Rochon, D. and Shapiro, M., On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers, Anal. Univ. Oradea, fasc. math, *11*(71), (2004) p.110.

[4] Wagh, M.A., Introduction to Bicomplex Numbers, Dept. of Mathematics Deen Dayal Upadhyaya College, University of Delhi, 2018.