عطر الجبر المفقود

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

يُعتبر علم الجبر أبرز منجزات الحضارة الإسلامية في الرياضيات، وقد أسّسه عالم الرياضيات المسلم أبو عَبد الله مُحَمَّد بن مُوسَى الخَوارِزمي رحمه الله، الذي أدرك بقوة فكره التجريدية أهمية خواص العمليات الجبرية، فأطلق اسمين جميلين، هما 'الجبر' و'المقابلة'، على أهم وأبسط خاصيتين جبريتين ينبغي لأية عملية جبرية الاتصاف بهما. وفي العصر الحالي، نجد الجبر والمقابلة متضمنتين في نظام المسلمات لأية نظرية جبرية، كما يمكن وصفهما بواسطة أية لغة رياضية من الرتبة الأولى تحتوي على رمز دَالِّي (Function symbol) "$*$" ذي متغيرين، على النحو الآتي:

الجبر: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow x * z = y * z)$

المقابلة: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x * z = y * z \Rightarrow x = y)$

ويمكن الملاحظة هنا أن عملية الجبر ليست خاصية جبرية فحسب، وإنما هي أيضًا خاصية منطقية من خواص المساواة.

ويثير الحسرة الشديدة في النفس إهمالُ غالبية أقسام الرياضيات بالجامعات الجزائرية، منذ سنوات عديدة، تدريس الجبر لطلاب الرياضيات، وهو الأمر الذي أفقدهم تمامًا أبسط الفهم للعلم الأكثر أهمية في الرياضيات. وعلى هذا الأساس، قمت بإعداد هذا النص القصير الحاوي على معلومات جبرية قاعدية، أراها ينبغي أن تكون جزءًا من الخلفية المعرفية لأي مدرس رياضيات جاد.

تلعب الحلقات (Rings)، بخلاف الحقول (Fields)، دورًا محوريًا في الجبر، وذلك لعدة حقائق نجمت عن دراسة نماذج البنى الجبرية عمليًا. ولعل أهم هذه الحقائق على الإطلاق هي أن مجموعات كثيرات الحدود ذات الأهمية القصوى في الهندسة الجبرية الكلاسيكية والمعادلات الجبرية هي كلها حلقات، ولا تتمتع أية واحدة منها ببنية حقل.

لتكن $\mathbb{A}$ حلقة ما، وليكن $a \in \mathbb{A}$. نقول إن a غير قابل للاختزال (Irreducible) إذا كان يختلف عن 0 وغير قابل للقلب (Not invertible)، وكانت قواسمه هي العناصر القابلة للقلب بالإضافة إلى العناصر من الشكل ax، حيث x عنصر قابل للقلب. فإذا كانت $\mathbb{A}$، على سبيل المثال، حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، فإن العناصر القابلة للقلب هي 1 وَ-1، أما العناصر غير القابلة للاختزال فهي الأعداد الأولية بالإضافة إلى نظائرها بالنسبة للجمع.

وتُعدّ عملية إيجاد العناصر غير القابلة للاختزال في حلقات كثيرات الحدود صعبة، وتكتسي أهمية خاصة في دراسة المنحنيات والسطوح والمنوعات الجبرية وفي المعادلات الجبرية.

في القرن التاسع عشر، درس كل من إرنست كومر (Ernst Kummer) وريتشارد ديديكيند (Richard Dedekind) قابلية القسمة في حلقات جزئية من حقول الأعداد الكسرية والحقيقية والمركبة. وقد واجها صعوبة في تحديد العناصر غير القابلة للاختزال في هذه الحلقات، على عكس سهولة العملية ذاتها في حلقة الأعداد الصحيحة. وللتغلب على هذه المشكلة، أدخلا مفهوم المثالي (Ideal)، الذي أضحى في الوقت الراهن مفهومًا مركزيًا في الجبر برمته.

نقول إن المجموعة الجزئية $\mathfrak{a}$ هي مثالي في الحلقة $\mathbb{A}$ إذا حققت ما يلي:

$$\begin{cases} \mathfrak{a} \neq \emptyset; \\ (\forall x \in \mathfrak{a})(\forall y \in \mathfrak{a})(x - y \in \mathfrak{a}); \\ (\forall x \in \mathbb{A})(\forall y \in \mathfrak{a})(xy \in \mathfrak{a}). \end{cases}$$

على سبيل المثال كل المجموعات الجزئية $x\mathbb{A} = \{xy: y \in \mathbb{A}\}$ حيث $x \in \mathbb{A}$ هي مثاليات في الحلقة $\mathbb{A}$، وتدعى بالمثاليات الرئيسية (Principal ideals).

لنتأكد من أن كل مثاليات $\mathbb{Z}$ رئيسية. بالفعل ليكن $\mathfrak{a}$ مثاليًا في $\mathbb{Z}$، ولنفرض أن $\mathfrak{a} \neq \{0\}$. في هذه الحالة يوجد $x \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}^*$. إما $x \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{N}^*$ وإما $x \notin \mathfrak{a} \cap \mathbb{N}^*$، وبالتالي إما $x \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{N}^*$ وإما $-x \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{N}^*$. وعلى هذا الأساس فإن المجموعة $\mathfrak{a} \cap \mathbb{N}^*$ غير خالية، ومن ثمة فهي تتمتع بعنصر أصغر n. بما أن $\mathfrak{a}$ مثالي، فإن $n\mathbb{Z} \subset \mathfrak{a}$. لنتأكد من أن الاحتواء العكسي أيضًا صحيح. ليكن $x \in \mathfrak{a}$. يوجد $q \in \mathbb{Z}$ وَ $r \in \mathbb{N}$ بحيث $x = nq + r$ وَ $0 \leq r < n$. لدينا $nq \in n\mathbb{Z}$، وبالتالي $nq \in \mathfrak{a}$ وَ $r = x - nq \in \mathfrak{a}$. فإذا كان $r \neq 0$، فإن $r \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{N}^*$، وعليه $n \leq r$. لكن هذا يناقض حقيقة أن $r < n$، لذلك فإنه حتمًا $r = 0$. إذن $x = nq \in n\mathbb{Z}$، ومنه الاحتواء $\mathfrak{a} \subset n\mathbb{Z}$. وهكذا نحصل على المساواة $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$.

نقول إن الحلقة $\mathbb{A}$ كاملة (Integral) إذا حققت

$$(\forall x \in \mathbb{A})(\forall y \in \mathbb{A})(xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0).$$

ونقول إنها رئيسية (Principal) إذا كانت كاملة وكل مثالياتها رئيسية. وحسب ما سبق فإن $\mathbb{Z}$ هي حلقة رئيسية.

نقول إن $\mathbb{A}$ إقليدية (Euclidean) إذا كانت كاملة وإذا وُجد تطبيق $|\cdot|_{\mathbb{A}}: \mathbb{A}^* \to \mathbb{N}$ بحيث

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{A}^*)(\forall y \in \mathbb{A}^*)(|x|_{\mathbb{A}} \leq |xy|_{\mathbb{A}}); \\ (\forall x \in \mathbb{A}^*)(\forall y \in \mathbb{A}^*)(\exists q \in \mathbb{A})(\exists r \in \mathbb{A})\big(y = qx + r \ \wedge (r = 0 \vee |r|_{\mathbb{A}} < |x|_{\mathbb{A}})\big), \end{cases}$$

ونقول إنها عاملية (Factorial) إذا كانت كاملة وحققت الشرطين:

أ) كل عنصر غير معدوم x من $\mathbb{A}$ يفكك إلى جداء من الشكل $x = ux_1 \cdots x_n$، حيث u عنصر قابل للقلب وَ x_i، $1 \leq i \leq n$، عناصر غير قابلة للاختزال.

ب) إذا قبل x تفكيكًا ثانيًا $x = vy_1 \cdots y_m$، فإن $n = m$، وتوجد تبديلة $\sigma \in \mathbb{S}_n$ بحيث $y_i = u_i x_{\sigma(i)}$، $1 \leq i \leq n$، علمًا أن العناصر u_i قابلة للقلب. تشير $\mathbb{S}_n$ هنا إلى زمرة التطبيقات التقابلية من المجموعة $\{1, \dots, n\}$ في نفسها.

على سبيل المثال حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المزودة بالقسمة الإقليدية وبالقيمة المطلقة $|\cdot|$ هي حلقة إقليدية.

وإذا كان $\mathbb{k}$ حقلًا معطى، فإن حلقة كثيرات الحدود $\mathbb{k}[X]$ المزودة بقسمة كثيرات الحدود وبالتطبيق

$$\mathcal{P} \in \mathbb{k}[X]^* \mapsto \deg \mathcal{P} \in \mathbb{N}$$

هي حلقة إقليدية.

لنتأكد من أن كل حلقة إقليدية هي حلقة رئيسية. بالفعل لتكن $\mathbb{A}$ حلقة إقليدية، وليكن $\mathfrak{a}$ مثاليًا غير معدوم فيها. بما أن المجموعة $\{|y|_{\mathbb{A}}: y \in \mathfrak{a}^*\}$ غير خالية، فهي تتمتع بعنصر أصغر، وهذا معناه أنه يوجد $x \in \mathfrak{a}^*$ بحيث

$$(\forall y \in \mathfrak{a}^*)(|x|_{\mathbb{A}} \leq |y|_{\mathbb{A}}).$$

الآن ليكن $z \in \mathfrak{a}^*$. يوجد $q \in \mathfrak{a}$ وَ $r \in \mathfrak{a}$ بحيث $z = qx + r$ وَ ($|r|_{\mathbb{A}} < |x|_{\mathbb{A}}$ أو $r = 0$). فإذا كان $r \neq 0$، فإن هذا يؤدي إلى أن $r = z - qx \in \mathfrak{a}^*$، ومن ثمة إلى الصيغة المتناقضة $|x|_{\mathbb{A}} \leq |r|_{\mathbb{A}} < |x|_{\mathbb{A}}$. لذلك حتمًا $r = 0$. ومنه $z = qx \in x\mathbb{A}$. وهكذا نحصل على الاحتواء $\mathfrak{a} \subset x\mathbb{A}$، ولأن الاحتواء العكسي واضح من تعريف المثالي، فإن لدينا المساواة $\mathfrak{a} = x\mathbb{A}$.

يُبرهن في دروس الجبر أن كل حلقة رئيسية هي حلقة عاملية، وعلى هذا الأساس يمكننا أن نكتب ما يلي:

حلقة إقليدية $\Longleftarrow$ حلقة رئيسية $\Longleftarrow$ حلقة عاملية $\Longleftarrow$ حلقة كاملة

نتيجة مهمة في المعادلات الجبرية والهندسة الجبرية هي أنه إذا كانت الحلقة $\mathbb{A}$ كاملة (على التوالي؛ عاملية)، فإن حلقة كثيرات الحدود $\mathbb{A}[X]$ هي الأخرى كاملة (على التوالي؛ عاملية). توجد كذلك نتيجة أخرى بسيطة وذات استخدام عملي في دروس كثيرات الحدود، وهي المعروفة في كتب الجبر باسم 'معيار آيزنشتاين' (Eisenstein's Criterion).

معيار آيزنشتاين

لتكن $\mathbb{A}$ حلقة عاملية، وليكن $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ كثير حدود من الحلقة $\mathbb{A}[X]$. لنفرض أنه يوجد عنصر غير قابل للاختزال $p \in \mathbb{A}$، له الخاصية التالية:

- p يقسم كل المعاملات a_i، $0 \leq i \leq n-1$،
- مربعه p^2 لا يقسم a_0.

في هذه الحالة، يكون f غير قابل للاختزال في $\mathbb{A}[X]$.

مبرهنة الباقي الصينية (Chinese remainder theorem) هي نتيجة حسابية جميلة، وبسيطة، وقديمة قدم الحضارة الصينية. تقدّم هذه المبرهنة شرطًا كافيًا لحل بعض جمل معادلات الترديدات.

مبرهنة الباقي الصينية

لتكن $\mathbb{A}$ حلقة، ولتكن $(\mathfrak{a}_i)_{1\leq i\leq n}$ متتالية مثاليات من $\mathbb{A}$ بحيث $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = \mathbb{A}$ من أجل $i \neq j$. إذن مهما تكن العناصر $x_i \in \mathbb{A}$، $1 \leq i \leq n$، يوجد على الأقل $x \in \mathbb{A}$ بحيث $x \equiv x_i (\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}_i)$ $(x - x_i \in \mathfrak{a}_i)$، $1 \leq i \leq n$.

تصنَّف المثاليات على أساس خصائصها إلى مجموعات. فمثلا، يقال إن المثالي $\mathfrak{a}$ ابتدائي (Primary) إذا كان مختلفًا عن $\mathbb{A}$ وحقق

$$(\forall x \in \mathbb{A})(\forall y \in \mathbb{A})\big(xy \in \mathfrak{a} \wedge x \notin \mathfrak{a} \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(y^n \in \mathfrak{a})\big).$$

وإنه أولي (Prime) إذا كان مختلفًا عن $\mathbb{A}$ وحقق

$$(\forall x \in \mathbb{A})(\forall y \in \mathbb{A})(xy \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \mathfrak{a} \vee y \in \mathfrak{a}).$$

ويمكن الملاحظة دون صعوبة هنا أن كل مثالي أولي هو مثالي ابتدائي.

نقول إن المثالي $\mathfrak{a}$ أعظمي إذا كان مختلفًا عن $\mathbb{A}$ ولا يوجد أي مثالي آخر مختلف عن $\mathbb{A}$ يحويه. بمعنى أن يكون أعظميًا في مجموعة المثاليات المختلفة عن $\mathbb{A}$ والمزودة بعلاقة الاحتواء. بالاستناد إلى مُسلّمة مكافئة لمسلمة الاختيار ضمن إطار نظرية المجموعات، وهي توطئة زورن (Zorn's lemma)، نستنتج بأن كل مثالي مختلف عن $\mathbb{A}$ يكون محتوى في مثالي أعظمي. وبالتالي، فإن كل عنصر غير معدوم وغير قابل للقلب في $\mathbb{A}$ ينتمي إلى مثالي أعظمي.

يُبرهن في دروس الجبر أنه لكي تكون حلقة حاصل القسمة $\mathbb{A}/\mathfrak{a}$ كاملة (على التوالي؛ حقلًا) يلزم ويكفي أن يكون المثالي $\mathfrak{a}$ أوليًا (على التوالي؛ أعظميًا). وبما أن كل حقل هو حلقة كاملة، فإننا نستنتج مما سبق أن كل مثالي أعظمي هو أيضًا أولي. وتوجد علاقة وثيقة بين المثاليات الأولية والعناصر غير القابلة للاختزال. على سبيل المثال، في إطار الحلقات الكاملة، إذا كان المثالي $x\mathbb{A}$ أوليًا ومختلفًا عن $\{0\}$، فإن x غير قابل للاختزال. والعكس صحيح أيضًا في إطار الحلقات العاملية.

ليكن x عنصرًا غير قابل للاختزال في الحلقة $\mathbb{A}$. لدينا بالطبع $x\mathbb{A} \neq \{0\}$ وَ $x\mathbb{A} \neq \mathbb{A}$. الآن، ليكن $y \in \mathbb{A}$ بحيث $x\mathbb{A} \subset y\mathbb{A}$. يوجد $z \in \mathbb{A}$ بحيث $x = yz$. بما أن x غير قابل للاختزال، فإن لدينا حالتين:

- إما y قابل للقلب، وبالتالي $y\mathbb{A} = \mathbb{A}$،
- وإما $y = ux$ مع u قابل للقلب، وعليه $y \in x\mathbb{A}$، وَمن ثمة $y\mathbb{A} = x\mathbb{A}$.

وهكذا نحصل على الصيغة

$$(\forall y \in \mathbb{A})(x\mathbb{A} \subset y\mathbb{A} \Rightarrow y\mathbb{A} = x\mathbb{A} \vee y\mathbb{A} = \mathbb{A}).$$

ومنه إذا كانت الحلقة $\mathbb{A}$ رئيسية وكان x غير معدوم، فإن لدينا التكافؤات التالية:

x عنصر غير قابل للاختزال ⇔ المثالي $x\mathbb{A}$ أولي ⇔ المثالي $x\mathbb{A}$ أعظمي.

وكحالة خاصة، إذا كانت $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$، فإنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:

n أولي ⇔ المثالي $n\mathbb{Z}$ أولي ⇔ المثالي $n\mathbb{Z}$ أعظمي.

تتمتع الحلقات الرئيسية بخاصيات جبرية عديدة تقرّبها من الحقول، منها مثلًا أن مثاليات أية حلقة رئيسية، والمرتبة بعلاقة الاحتواء، تحقق 'شرط السلسلة الصاعدة' (The ascending chain condition)، بمعنى أن أية متتالية جزئية متزايدة من هذه المثاليات تصبح مستقرة في مرحلة ما.

بالفعل، لتكن $\mathbb{A}$ حلقة رئيسية، ولتكن $(\mathfrak{a}_n)_{n\geq 1}$ متتالية مثاليات متزايدة بالنسبة للاحتواء من مثاليات $\mathbb{A}$. لنتأكد من أن الاتحاد $\mathfrak{a} = \bigcup_{n\geq 1} \mathfrak{a}_n$ مثالي في $\mathbb{A}$. لذلك ليكن $x \in \mathfrak{a}$ وَ $y \in \mathfrak{a}$. يوجد $i \geq 1$ وَ $j \geq 1$ بحيث $x \in \mathfrak{a}_i$ وَ $y \in \mathfrak{a}_j$. يمكننا مثلا أن نعتبر $i \leq j$، وعليه $x \in \mathfrak{a}_j$ لأن لدينا $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_j$. وبما أن $\mathfrak{a}_j$ مثالي، فإن $x - y \in \mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}$، ومن ثمة $x - y \in \mathfrak{a}$. بالطريقة ذاتها نتأكد من أنه إذا كان $x \in \mathbb{A}$ وَ $y \in \mathfrak{a}$، فإن $xy \in \mathfrak{a}$. من هنا نستنتج بأن $\mathfrak{a}$ مثالي في $\mathbb{A}$. وبما أن $\mathbb{A}$ حلقة رئيسة، فإنه يوجد $x \in \mathbb{A}$ بحيث $\mathfrak{a} = x\mathbb{A}$. وبالتالي $x \in \mathfrak{a}_k$ مع $k \geq 1$. وهذا الأمر يؤدي إلى أن $\mathfrak{a} = x\mathbb{A} \subset \mathfrak{a}_k$، ومن ثمة إلى $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_k$. لكن المتتالية $(\mathfrak{a}_n)_{n\geq 1}$ متزايدة بالنسبة للاحتواء، لذلك $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_n$ مهما يكن $k \leq n$، وهو المراد إثباته.

يُبرهن في دروس الجبر أنه في أية حلقة واحدية وتبديلية $\mathbb{A}$ القضايا الثلاث التالية متكافئة:

1) مثاليات $\mathbb{A}$، والمرتبة بعلاقة الاحتواء، تحقق شرط السلسلة الصاعدة.
2) $\mathbb{A}$ تحقق الشرط الأعظمي بالنسبة للمثاليات، بمعنى أن أية عائلة غير خالية من مثالياتها الذاتية (المختلفة عن $\{0\}$ وَ$\mathbb{A}$) تقبل مثاليًا أعظميًا بالنسبة للاحتواء.
3) كل مثالي $\mathfrak{a}$ في $\mathbb{A}$ هو من الصنف المنتهي؛ أي أنه من الشكل:

$$\mathfrak{a} = x_1\mathbb{A} + x_2\mathbb{A} + \cdots + x_n\mathbb{A}$$

حيث $x_i \in \mathbb{A}$، $1 \leq i \leq n$.

تُدعى الحلقات التي تحقق أحد الشروط الثلاثة السابقة بالحلقات النَّوْثِرية، وذلك تكريمًا للرياضياتية إيمي نويثر (Emmy Noether) التي قامت بدراستها بداية من عام 1921. وقد برهن ديفيد هيلبرت (David Hilbert) بأنه إذا كانت $\mathbb{A}$ نوثرية، فإن $\mathbb{A}[X]$ هي الأخرى نوثرية.

لنتكلم قليلا عن المعادلات الجبرية، وهي المعادلات الأكثر قدمًا في التاريخ.

نقول إن الحقل $\mathbb{k}$ مغلق جبريًا إذا كان كل كثير حدود غير ثابت من $\mathbb{k}[X]$ يقبل على الأقل جذرًا في $\mathbb{k}$. ولقد قام كارل جاوس (Carl Gauss)، وعمره حوالي ثمانية عشر عامًا، بإثبات واحدة من أجمل مبرهنات الجبر، وهي المبرهنة التي تحمل اسم 'المبرهنة الأساسية في الجبر' (Fundamental Theorem of Algebra).

المبرهنة الأساسية في الجبر

كل كثير حدود غير ثابت من الحلقة $\mathbb{C}[X]$ يقبل على الأقل جذرًا في $\mathbb{C}$.

تعني المبرهنة الأساسية في الجبر أن $\mathbb{C}$ مغلق جبريًا. ونستخلص من هذا النتيجة القائلة إن كثيرات الحدود غير القابلة للاختزال في $\mathbb{C}[X]$ هي بالضبط كثيرات الحدود من الدرجة الأولى. بينما يمكن الملاحظة دون صعوبة أن حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير مغلق جبريًا، ويكفي لمعرفة ذلك ملاحظة أن كثير الحدود غير الثابت $X^2 + 1$ لا يقبل جذورًا حقيقية. ونعطي فيما يخص كثيرات الحدود غير القابلة للاختزال في $\mathbb{R}[X]$ النتيجة التالية، والتي يعتبر التحقق منها تمرينًا مناسبًا لطلاب الأقسام النهائية: "كثيرات الحدود غير القابلة للاختزال في $\mathbb{R}[X]$ هي بالضبط كثيرات الحدود من الدرجة الأولى بالإضافة إلى كثيرات الحدود من الدرجة الثانية التي لا تقبل جذورًا حقيقية".

في بداية القرن العشرين، برهن أرنست شتاينتس (Ernst Steinitz) أنه يمكن تضمين أي حقل في حقل مغلق جبريًا، ولعل أبسط دليل على صحة هذه النتيجة هو أننا قمنا بالفعل بتضمين $\mathbb{R}$ في $\mathbb{C}$.

في دروس الجبر، يُبرهن على النتيجة المعتادة التالية والخاصة بتفكيك كثير حدود ذي متغير واحد: "ليكن $\Bbbk$ حقلا معطًى، وليكن $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ كثير حدود من الدرجة $1 \leq n$ وبمعاملات في $\Bbbk$، أي أنه عنصر من الحلقة $\Bbbk[X]$. فإذا كانت $\alpha_i \in \Bbbk$، $1 \leq i \leq k$، هي كل جذور f في $\Bbbk$، وإذا كانت $r_i \in \mathbb{N}^*$، $1 \leq i \leq k$، هي رتب تضاعف هذه الجذور، فإنه يمكن كتابة f على النحو الآتي:

$$f(X) = a_n(X - \alpha_1)^{r_1} \cdots (X - \alpha_k)^{r_k} \mathrm{g}(X)$$

حيث g كثير حدود لا يقبل جذورًا في $\Bbbk$، وَ$r_1 + \cdots + r_k + \deg \mathrm{g} = \deg f = n$ (وبالتالي $0 \leq k \leq n$). وكحالة خاصة، إذا كان $\Bbbk$ مغلقًا جبريًا، فإن لدينا

$$f(X) = a_n(X - \alpha_1)^{r_1} \cdots (X - \alpha_k)^{r_k}$$

وَ$r_1 + \cdots + r_k = n$".

المبرهنة التالية هي واحدة من أشهر النتائج التي قدّمها هيلبرت إلى الرياضيات، وهي تعتبر بحق مقدمة للدراسات الحديثة حول المعادلات الجبرية والهندسة الجبرية.

نولشتلانز اتس هيلبرت (Hilbert's Nullstellensatz)

ليكن $\Bbbk$ حقلًا مغلقًا جبريًا، وليكن $\mathfrak{a}$ مثاليًا في حلقة كثيرات الحدود ذات n متغير $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$. إن القضيتين التاليتين متكافئتان:

1) $\mathfrak{a} \neq \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$؛

2) يوجد عنصر $x \in \Bbbk^n$ بحيث $f(x) = 0$ من أجل كل $f \in \mathfrak{a}$.

الاستلزام 2) $\Leftarrow$ 1) مباشر وبسيط، بينما يحتاج الاستلزام العكسي 1) $\Leftarrow$ 2)، وهو المهم، إلى نقاش عميق. ولنتذكر هنا أن $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ هي حلقة نوثرية وعاملية، ولكنها ليست رئيسية، ومن ثمة ليست إقليدية إذا كان $2 \leq n$.

لتكن f_k، $1 \leq k \leq m$، كثيرات حدود من $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$، ولنحاول معرفة إن كان نظام المعادلات الجبرية

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} f_1(x) = 0; \\ \vdots \\ f_m(x) = 0, \end{cases}$$

يقبل حلولًا في $\Bbbk^n$ من عدمه. لأجل ذلك نضع

$$\mathfrak{a} = \{u_1 f_1 + \cdots + u_m f_m : u_1, \ldots, u_m \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]\}.$$

المجموعة $\mathfrak{a}$ تشكل مثاليًا في $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$، يدعى بالمثالي المُوَلَّد بالعناصر f_k، $1 \leq k \leq m$، ويمكن الملاحظة الآن بأن جملة المعادلات $(\mathcal{S})$ تكافئ الصيغة التالية الواردة في الدعوة الثانية في مبرهنة هيلبرت

$$(\forall f \in \mathfrak{a})(f(x) = 0).$$

وعلى هذا الأساس، لكي تقبل $(\mathcal{S})$ حلًا في $\Bbbk^n$ يلزم ويكفي أن يكون $\mathfrak{a} \neq \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$، أي يلزم ويكفي أن يكون $1 \notin \mathfrak{a}$. بنفي طرفي هذا التكافؤ، نحصل على النتيجة: "لكي لا تقبل الجملة $(\mathcal{S})$ حلولا في $\Bbbk^n$ يلزم ويكفي أن يتحقق الانتماء $1 \in \mathfrak{a}$، أي يلزم ويكفي أن توجد كثيرات حدود u_k، $1 \leq k \leq m$، من $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ بحيث $1 = u_1 f_1 + \cdots + u_m f_m$".

إذا كانت f_k، $1 \leq k \leq m$، كثيرات حدود غير ثابتة من $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$، فإن مجموعة النقاط

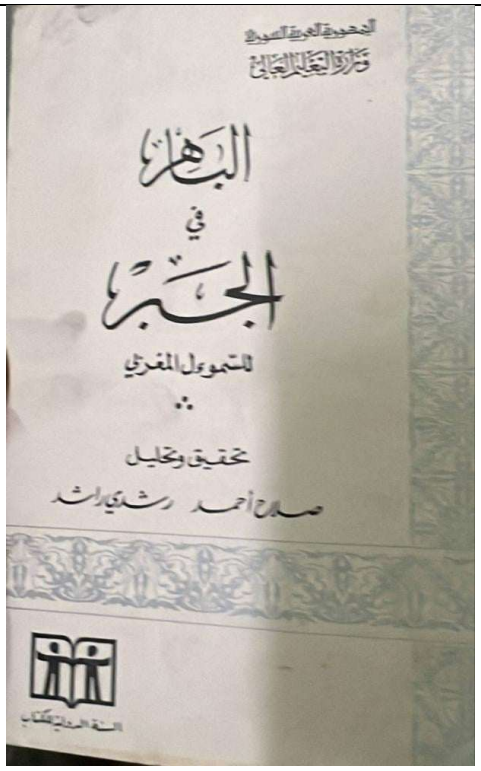
$$\mathcal{V} = \{x \in \Bbbk^n : f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{m} \{x \in \Bbbk^n : f_k(x) = 0\}$$

تُدعى، إن لم تكن خالية، 'منوعة جبرية تآلفية' (Affine algebraic variety)، وهي من البنيات الهندسية الجبرية المهمة التي تستهدفها الهندسة الجبرية.

إذا كان f كثير حدود غير ثابت من $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$، فإن المجموعة $\{x \in \mathbb{k}^n : f_k(x) = 0\}$ تُدعى 'سطحًا مُصعَّدًا جبريًا' (Algebraic hypersurface) في حالة $4 \leq n$، وسطحًا جبريًا (Algebraic surface) في حالة $3 = n$، ومنحنىً جبريًا مستويًا (Plane algebraic curve) في حالة $2 = n$. وهكذا فإن مبرهنة هيلبرت تعطينا شرطًا لازمًا وكافيًا لأن يشكل تقاطع سطوح مصعدة جبرية منوعة جبرية تآلفية.

******

كتاب الجبر والمقابلة للخوارزمي



كتاب الباهر في الجبر للسموءل المغربي