مبرهنة فيثاغورس عند اليونان

وسيلة غرابة
أستاذة بقسم الرياضيات والإعلام الآلي، كلية العلوم، جامعة الدكتور يحي فارس، المدية
مخبر الإبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
gheraba.ouassila@univ-medea.dz

نحاول من خلال هذه السلسلة من المقالات تقديم نظرة شاملة حول مبرهنة فيثاغورس (Pythagoras) والطرق المختلفة لإثباتها عبر التاريخ. لقد تنوعت البراهين بين إثباتات هندسية وأخرى عددية، باستخدام الاستنباط والاستنتاج، والتقطيع واللصق، والتركيب والتحليل، والمتطابقات.

هذه السلسلة مستنبطة من مذكرة ماجستير بعنوان "مبرهنة فيثاغورس عند نصير الدين الطوسي (ت. 672هـ/1274م) (تحليل وتحقيق)". المذكرة من إعداد وسيلة غرابة، وتحت إشراف الأستاذ القدير المرحوم يوسف قرقور. أهدي هذا العمل إلى روحه الطاهرة.

في هذا الجزء من المقال، سنحاول فهم هذه مبرهنة فيثاغورس من خلال دراستها عند اليونانيين، وكيفية إثباتها لديهم، وتعميمها إلى أشكال أخرى غير المربعات.

مقدمة

البرهان الرياضي الهندسي الأول -حسب المعلومات المتوفرة- لمبرهنة فيثاغورس، يعود إلى أُقليدس Euclid (القرن الثالث قبل الميلاد) [4]. كانت الثلاثية (5,4,3) تُمثل رمزًا مقدسًا واعتُبرت رمزًا للزواج؛ وقد أدرجها أفلاطون Plato في التركيب المشهور للرقم "العرسي" في كتابه **الجمهورية**. أما بلوتارخ Plutarch (القرن الأول الميلادي)، فقد وصف في كتابه **إيزيس وأوزيريس** (Isis and Osiris) المثلث الذي تحقق أطوال أضلاعه هذه الثلاثية بأنه المثلث الأجمل [4]. وقد اهتم اليونانيون بالثلاثيات الفيثاغورية، ومن أبرز من تناولها أقليدس، وَهيرون الإسكندري Hero of Alexandria (القرن الأول الميلادي)، وَديوفانطس Diophantus (القرن الثالث الميلادي). كما استُخدمت مبرهنة فيثاغورس لدى اليونان في أرصادهم الفلكية.

1. المبرهنة قبل كتاب "الأصول"

فيثاغورس بن ميسارخس من أهل ساموس، وقد ذكر بلوتارخ أنه أول من سمّى الفلسفة بهذا الاسم، وقد اشتهر أنه عاش في القرن السادس قبل الميلاد. ويذكر ابن صاعد الأندلسي في **طبقات الأمم** أن فيثاغورس أدخل إلى اليونان علم الهندسة وعلم الطبيعة وعلم الدين، وأنه تلقى الحكمة عن أصحاب سليمان بن داود بمصر حين دخلوا إليها من بلاد الشام. وقد استخرج بذكائه علم الألحان وتأليف النغم، وأوقعها تحت النسب العددية، وادعى أنّه استفاد من مشكاة النبوة. وكان من تلاميذه الفيلسوف سقراط (Socrates) [3].

هل تبقى الخاصية المتعلقة بالثلاثية (5,4,3)، صحيحة في أي مثلث قائم الزاوية؟ هذه المسألة تُنسب إلى فيثاغورس، وقد ظلت نسبة هذه المبرهنة إلى فيثاغورس محلّ جدل حتى بين قدماء اليونان أنفسهم، إذ رُويت أساطير أن فيثاغورس قدّم قربانًا، ثورًا، من أجل هذه المبرهنة.

توجد أول إشارة إلى هذه الرواية عند فيتروف Vitruvius (القرن الأول قبل الميلاد) - وهو زمن يفصل بينه وبين فيثاغورس بفترة طويلة - حيث كتب في أبيات شعرية أن فيثاغورس قدّم ثورًا كقربان بعد اكتشافه لهذه المبرهنة [4]. كما نقل بلوتارخ أبياتًا شعرية من دارس للمنطق يُدعى أبولودورس Apollodorus، ويبدو أن أصلها يرجع إلى فيتروف غير أنه لم يحدد بالضبط أيّ مبرهنة يقصد. وقد ذهب إلى الرأي ذاته أثينايوس Athenaeus (القرن الثالث الميلادي) وديوجانس اللايرتي Diogenes Laertius (القرن الثالث الميلادي)، الذي أعاد نقل أبيات أبولودور، التي لم يشر فيها إلى تضحية بثور واحد فقط، بل ذكر أن فيثاغورس قدّم مئة ثور كقربان [7] [8]. أما بروكلوس Proclus، الذي عاش في القرن الخامس الميلادي، فقد قال: "لو أننا اتبعنا ما قاله القدماء، لوجدنا أن هذه المبرهنة منسوبة إلى فيثاغورس، وأنه ضحّى بثور لقاء هذا الاكتشاف" [7].

لكن من جهة أخرى، يؤكد مؤرخو العصور القديمة أن الفيثاغوريين كانوا يرفضون إراقة الدماء، وهو ما أشار إليه شيشرون Cicero (القرن الأول قبل الميلاد)، مما أثار الشكوك حول صحة هذه الأسطورة [4].

وينسب بروكلوس إلى الفيثاغوريين الفضل في اكتشاف الأعداد الجذرية باعتبارها نتيجة مترتبة على المبرهنة 47 من المقالة الأولى في كتاب الأصول، والممثَّلة بطول الوتر في مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي قائمته يساوي 1[5]. رغم أن بروكلوس أشار في كتابه إلى عدم إمكانية تطبيق مبرهنة فيثاغورس حسابيًا على مثلث متساوي الساقين (أي إيجاد ثلاثيات فيثاغورية ناطقة موجبة تمثل أضلاع مثلث متساوي الساقين)، وهذا ما يؤدي إلى التساؤل عن كيفية اكتشاف الأعداد الجذرية وتاريخها [7].

ذكر أوديمس الرودسي Eudemus of Rhodes (القرن الرابع قبل الميلاد) - تلميذ أرسطو (Aristotle)، والذي كانت بحوزته العديد من كتب المهندسين الأوائل الذين ضاعت أعمالهم بعد ظهور كتاب أُقليدس- جزءًا احتفظ به سامبليسيوسSimplicius (القرن السادس الميلادي)، يتعلق بتربيع الهلال من قِبل أبقراط الخيوسي Hippocrates of Chios (القرن الخامس قبل الميلاد)، والذي استخدم مبرهنة فيثاغورس في إثباته. من المرجح أن أوديمس هو الذي نسب شكلين خاصين لإيجاد الثلاثيات الفيثاغورية من الأعداد الطبيعية، أحدها إلى أفلاطون والآخر إلى فيثاغورس، وهما موجودان في كتاب بروكلوس، الذي يُحتمل أنه اطّلع على كتاب أوديمس [9].

2. المبرهنة في كتاب "الأصول"

مبرهنة فيثاغورس هي المبرهنة 47 من المقالة الأولى في كتاب **الأصول**، في ترجمتي هيث (Heath) وَفيتراك (Vitrac)، وهي تقابل المبرهنة 46 في "النقل المأموني" كما نقلها الحجاج بن مطر، وتقابل المبرهنة 35 من مبرهنات علي بن أحمد النسوي في المقالة الأولى من كتابه "كتاب تجريد أقليدس" [1]. نقدّم فيما يلي نص المبرهنة وإثباتها كما وردا عند أقليدس.

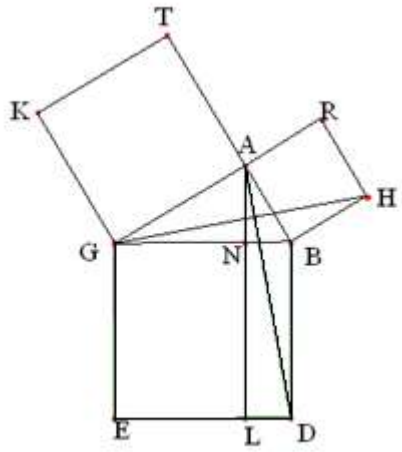
المبرهنة 47 (من المقالة الأولى في كتاب **الأصول**) [9]

في كل مثلث قائم الزاوية، يكون مربع وتر زاويته القائمة مساويًا لمجموع مربعي ضلعيها.

الإثبات

- ليكن المثلث ABG القائم في A، $[BG]$ وتر القائمة.
- نريد إثبات أن $BG^2 = AB^2 + AG^2$.
- نرسم المربعات $(ATKG)$، $(BHRA)$، $(BDEG)$ خارج المثلث وعلى أضلاعه.
- لدينا G، A، R على استقامية لأن $\angle BAG = \angle BAR = \frac{\pi}{2}$ ، كذلك T، A ، B على استقامية.
- نرسم من A المستقيم (AL) يوازي (BD). إذن (AL) يقسم مربع $[BE]$ إلى سطحي $[BL]$ و$[LG]$.

- لدينا $\Delta(BAD) = \Delta(HGB)$ لأن $HB = BA$، $BG = BD$، $\angle HBG = \angle ABD$.
- لدينا $S_{(RB)} = \frac{1}{2} S_{(HGB)}$ لأن $[HB]$ قاعدة مشتركة بين السطحين $\Delta(HBG)$ و$\Delta(RHB)$ الموجودين بين متوازيين (RG) و(HB).
- ولدينا أيضًا $S_{(BL)} = \frac{1}{2} S_{(BAD)}$ لأن $[BD]$ قاعدة مشتركة بين السطحين $\Delta(LBD)$ و$\Delta(ADB)$ الموجودين بين متوازيين (BD) و(AL).
- ومنه $S_{(BL)} = S_{(RB)}$.
- بنفس الطريقة نجد أن $S_{(GL)} = S_{(TG)}$. ومنه $BG^2 = AB^2 + AG^2$.



الشكل 1

3. مبرهنة فيثاغورس بعد كتاب "الأصول"

1.3. بابوس الإسكندري

يُجهل تحديدًا في أي منطقة في اليونان وُلد المهندس بابوس Pappus of Alexandria، كما أن الفترة التي عاش فيها تبقى محل تخمين؛ إذ يُرجح أنه عاش قبل نهاية القرن الثاني من الميلاد، هذا ما يُستشف من بعض تعليقاته في كتابه **المجموعة الرياضية** (Mathematical Collection) عن بعض أعمال بطليموس Ptolemy (القرن الثاني بعد الميلاد)، حيث علّق بابوس على كتابه **المجسطي**، ويُعتقد أنه كان معاصرًا له. من جهة أخرى، جاءت في **معجم سودا** (Suda Lexicon)، وهو عمل لمعجمي يوناني من القرن العاشر الميلادي، إشارةٌ إلى أن بابوس كان معاصرًا لثيون الإسكندري Theon of Alexandria، الذي رصد كسوف الشمس وخسوف القمر سنة 364م، وقد كتب كل من بابوس وثيون تعليقات على كتاب **المجسطي** لبطليموس. من المرجّح أن بابوس عمل معلّمًا في مدرسة الإسكندرية في أواخر المرحلة اليونانية-الرومانية [6].

من أهم مؤلفات بابوس **المجموعة الرياضية**؛ والذي يتضمن مجموعة من الأعمال الرياضية التي تشمل مبرهنات لسابقيه، مع تقديم تعميمات لبعضها، علمًا بأن معظم هذه الأعمال فُقدت في العصر الحديث. يتألف الكتاب من ثماني مقالات. في مستهل المقالة الرابعة من **المجموعة الرياضية** -والتي فُقد تمهيدها- توجد صيغة تشبه تعميمًا للمبرهنة 47 من المقالة الأولى لكتاب **الأصول**، تُطبّق على مثلث كيفي. إذ يُنشأ على أضلاع هذا المثلث متوازيات أضلاع، بحيث يكون مجموع مساحتي متوازيي الأضلاع المُنشأين على ضلعين منه يساوي مساحة متوازي الأضلاع المُنشأ على الوتر

(أطول أضلاع المثلث). ولا يُعد هذا التعميم امتدادًا للمبرهنة 47 من المقالة الأولى في كتاب **الأصول** فحسب، بل يُمثّل أيضًا تعميمًا للمبرهنة 31 من المقالة السادسة من **الأصول**، والتي اعتُبرت بدورها تعميمًا للمبرهنة 47. ونص هذه الأخيرة كالآتي:

"في المثلثات قائمة الزاوية، الشكل المرسوم على الضلع المقابل للزاوية القائمة يساوي مجموع الشكلين المُتشابهين والمرسومين بنفس الطريقة على الضلعين المُحيطين بالزاوية القائمة " [6].

المبرهنة 1 (من المقالة الرابعة في **المجموعة الرياضية** لبابوس) [6]

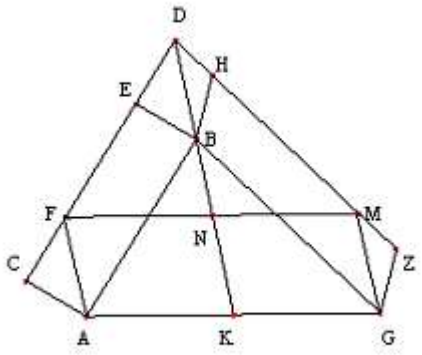
كل مثلث مستقيم الأضلاع، فإن مساحة متوازي الأضلاع المضاف إلى وتر المثلث تساوي مساحة متوازيي الأضلاع المضافين إلى الضلعين المتبقيين.

الإثبات

طريقة إثباته، مشابهة للإثبات الذي قدّمه أقليدس للمبرهنة 47 من المقالة الأولى في كتاب **الأصول**.

- نرسم المثلث ABG.
- نرسم على ضلعيه $[BG]$ و$[AB]$ متوازيي أضلاع كيفيين $BGZH$ و$ABEC$.
- نمدّد الضلعين $[ZH]$ و$[CE]$ إلى أن يلتقيا على النقطة D، ثم نمدّد الضلع $[DB]$.
- K نقطة تقاطع $[AG]$ و$[DB]$.
- نرسم متوازي الأضلاع $AFMG$ بحيث $[AF]$ يوازي $[DK]$، N نقطة تقاطع $[FM]$ و$[DK]$.
- لدينا مجموع مساحتي متوازيي الأضلاع $BGZH$ و$ABCE$ المنشأين على الضلعين $[GB]$ و$[AB]$ يساوي مساحة $AFMG$ المنشأ على الضلع $[AG]$.
- يثبت أن $S(NKGM) = S(DBGM)$، $S(BGZH)$، وأن $S(NKAF) = S(FABD) = S(EBAC)$.

كما هو مبين في الشكل 2.



الشكل 2

2.3. بروكلوس

يُعتبر بروكلوس Proclus من أشهر أعلام مدرسة الفلاسفة الأفلاطونيين الجدد التي أسّسها أفلوطين Plotinus (القرن الثالث الميلادي)، وَفرفوريوس Porphyry (القرن الثالث الميلادي)، وَمارينوس Marinus (القرن الخامس الميلادي). وُلد بروكلوس في القسطنطينية سنة 412م وتُوفي في أثينا سنة 486م. درس البلاغة والقانون في

مدرسة الإسكندرية، ثم كرّس حياته لتعلّم الفلسفة. تلقى تعليمه في الرياضيات على يد **هيرون** (ليس العالم الشهير، فاسم هيرون كان شائعًا في ذلك الوقت)، ثم انتقل إلى أثينا. ألّف بروكلوس عددًا من الكتب وصل معظمها إلى العصر الحالي، بعضها كُتب باليونانية، وأخرى تُرجمت إلى اللاتينية، وتناولت موضوعات في الفلسفة والشعر، فضلًا عن مؤلفات في العلوم، ولا سيما في التنجيم والرياضيات [7].

ألّف في الرياضيات كتابًا عنوانه **شروح على المقالة الأولى للأصول لأقليدس**، ويضم هذا الكتاب عروض دروس الهندسة في مدرسة الأفلاطونيين في أثينا. يُعدّ هذا الكتاب مرجعًا هامًا في تاريخ الرياضيات اليونانية، لا سيما في المرحلة التي تلت أقليدس [7].

يستهل بروكلوس كتابه بدراسة التعاريف والأوليات والمصادرات للمقالة الأولى من كتاب **الأصول**. وقدّم إثباتات مستحدثة لبعض المبرهنات، وأعطى مبرهنات عكسية، وأبرز حالات خاصة لم يعالجها أقليدس. وقد استعار الكثير من هذه التعليقات من كتابات من سبقوه، مثل فرفوريوس وأبولونيوس Apollonius (القرن الثالث قبل الميلاد). من بين شروحاته ما تعلّق بالمبرهنة 47 من المقالة الأولى من **الأصول**، حيث أشار إلى أنها تُنسب إلى فيثاغورس، وذكر أسطورة الأضحية المرتبطة بها. غير أنه بدا متحفظًا بشأن صحة هذه النسبة، إذ اعتبرها مجرد تقليد بسيط، في حين أشاد بالإثبات الذي قدّمه أقليدس. كما تطرّق إلى تعميم هذه المبرهنة الوارد في المبرهنة 31 من المقالة السادسة، التي أشرنا إليها آنفًا [7]. وذكر أيضًا طريقتين لاستخراج الثلاثيات الفيثاغورية من الأعداد الطبيعية، نَسَبَ إحداهما إلى فيثاغورس، والأخرى إلى أفلاطون، ويُرجَّح أنه اطّلع عليها من أوديمس الرودسي.

يبدو أن بروكلوس لم يطّلع على كتاب **الأرتماطيقي** لديوفانطس (القرن الثالث الميلادي)، الذي يعرض طريقة لاستخراج ثلاثيات فيثاغورية، متمثلة بالعددين $2ab$ و$a^2 - b^2$ وهما طولا الضلعين اللذين يحصران الزاوية القائمة وطول الوتر $a^2 + b^2$. تحدّث بروكلوس عن مبرهنة فيثاغورس وعدم إمكانية تطبيقها في مثلث متقايس الساقين بأضلاع ناطقة [7].

رابط مقال مبرهنة فيثاغورس في العالم القديم https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n14/article14-13.pdf

المراجع

[1] سعيدان، أ. س.، هندسة أُقليدس في أيد عربية، دار البشير، عمان، 1991.
[2] صاعد الأندلسي، طبقات الأمم، تحقيق ح. ع. بوعلوان، دار الطليعة، بيروت، 1985.
[3] ابن النديم، الفهرست، تحقيق إ. رمضان، دار المعرفة، بيروت، 1997.
[4] Fourrey, E., Curiosités géométriques, Vuibert, Paris, 2001.
[5] Heath, T. L., Euclid, the Thirteen Books of the Elements. Vol 1, Dover Publications, New York, 1956.
[6] Pappus d'Alexandrie, La collection mathématique, vol. 1, traduite du grec en français avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1982.
[7] Proclus de Lycie, Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide, traduits du grec en français avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.
[8] Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. 2, Dover Publications, New York, 1958.
[9] Vitrac, B., Euclide d'Alexandrie, Les Eléments, Vol. 1 : Introduction générale et Livres I à IV, Presses Universitaires de France Bibliothèque d'histoire des sciences, Paris, 1990.