الرياضيات التعليمية: ما هي الرياضيات التي تُدرَّس؟
الجزء الأول: نظرية المجموعات

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

هذا المقال مهدى إلى أستاذة الرياضيات السابقة بالمدرسة الأساسية، الطور الثاني، فاطنة داودي.

1. مقدمة

أذكّر في البداية ببيتين من الشعر للإمام الشافعي رحمه الله، مفيدين لأي طالب علم:

أخي لن تنال العلم إلا بستةٍ ... سأنبيك عن تفصيلها ببيانِ
ذكاءٌ وحرصٌ واجتهادٌ وبُلغةٌ ... وصحبةُ أستاذٍ وطـولُ زمانِ

تنفق جميع الدول في العالم أموالًا لتدريس الرياضيات لأجيالها الناشئة، وتكمن وراء ذلك بالتأكيد أسباب معينة. ولذلك، يحق للمرء التفكير في أسئلة من قبيل: ما هي الأسباب التي تجعل تدريس الرياضيات مشروعًا مجتمعيًا ضروريًا؟ وما هي الرياضيات التي تُدرّس للناشئة؟ وبالأحرى، ما هي الرياضيات التعليمية؟

فيما يتعلق بالسؤال الأول، يمكن القول عمومًا إن تدريس الرياضيات يستمد مشروعيته المجتمعية من سببين رئيسيين، هما:

أ- تطوير وتنمية المهارات العقلية الاستنباطية لدى الناشئ، وذلك لكون الرياضيات تمثل النموذج الأكثر وضوحًا وحضورًا للتفكر البشري الاستنباطي الضروري لحياة الأفراد ولحياة المجتمع. ويمكن الزعم، دون مبالغة، بأن تعلّم الرياضيات هو تعلّم حِرفة البرهان، أو أيضًا فن البرهان.

ب- الرياضيات علم ضروري لفهم وتطوير واستخدام الكثير من المعارف البشرية، مثل العلوم الدقيقة كالفيزياء والكيمياء، وعلوم المهندسين مثل الإعلام الآلي والإلكترونيك والآلية، وغيرها.

ويجب لفت انتباه مُدرّسي الرياضيات بالمدارس الابتدائية والمتوسطة والثانوية، وحتى في الجامعات، إلى ضرورة وضع الهدف الأول المرجو من تدريس الرياضيات نصب أعينهم، وذلك لكي يعطوا أولًا فرصًا أكبر للشباب الناشئ لتحقيق أهدافه المشروعة في الحياة، وثانيًا، لكي يمنحوا نشاطاتهم التعليمية معان حقيقية جادة وخالية من العبث.

يمكن القول إن الرياضيات التعليمية هي الرياضيات الكانتورية، أي الرياضيات المؤسَّسة على نظرية المجموعات لكانتور (Cantor) وعلى المنطق الرياضي الكلاسيكي. بناءً على هذا، ينبغي على مُدرّسي الرياضيات الجادين الإلمام بالمبادئ الأساسية لهذه النظرية، والاطلاع اطلاعًا كاملًا على المبادئ الأولية للمنطق الكلاسيكي، مثل المعرفة الكاملة بمعاني الروابط المنطقية في إطار هذا المنطق، والمعرفة المقبولة بالمسلّمات المنطقية، وبمبادئ الاستنباط الأكثر شهرة واستخدامًا.

حدّد علماء الرياضيات عشر مسلّمات تُؤسِّس لنظرية المجموعات، والمعروفة في أبجديات الرياضيات باسم "مسلّمات زرميلو وفرانكل + مسلّمة الاختيار". ومن جانبهم، اعتمد خبراء التعليم ومؤلّفو كتب الرياضيات هذه المسلّمات كأهداف تعليمية قاعدية في عملية تدريس الرياضيات. وينبغي، كما أُشير إلى ذلك آنفًا، أن يُلّم مدرّسو الرياضيات الجادّون بهذه المسلمات، وربما تكفيهم مبدئيًا معرفة خمس منها، والتي سنتحدث عنها في هذا الجزء. ولمساعدة القارئ الكريم على

الاطلاع عليها سريعًا، نورد اسمها بالإنكليزية: "Zermelo-Fraenkel Axioms + Axiom of choice"، وكثيرًا ما يُشار في الكتب اختصارًا إلى نظرية المجموعات المستخدمة في الرياضيات التعليمية بالاسم ZFC.

من الأمور الأساسية أيضًا أن يعرف مدرّس الرياضيات لغة نظرية المجموعات، حتى يصير بمقدوره معرفة طريقة تكوين الصيغ الرياضياتية معرفة كاملة.

لقد أُعِدَّ هذا المقال حول الرياضيات التعليمية تحديدًا لتحقق الهدفين المشار إليهما، وبذلك يصير عونًا وسندًا لجميع مُدرّسي الرياضيات في المدارس الثانوية، ولمدرّسي الرياضيات في السنوات الجامعية الأولى.

يعرض المقال لغة نظرية المجموعات، وهي اللغة الرياضياتية العالمية الضرورية لكتابة كل قضايا الرياضيات رمزيًا، والمبادئ الأولية للمنطق الرياضي الكلاسيكي الأولي المعتمَد في تدريس هذه الرياضيات. يُقدّم المقال واحدًا من أبسط نُظم الاستدلال الرياضياتي وأكثرها ألفةً واستخدامًا في البراهين الرياضياتية. كما تم تضمينه الطريقة الصحيحة، التي يُفترض أن يتبنّاها مُدرّسو المنطق في إعداد دروسهم، لتعريف الصيغ والمبادئ الصحيحة. إحدى الغايات من هذا التضمين هي تبيان الهدف الحقيقي من تدريس جداول الصحة في برامج المنطق، وهو الهدف الذي لا يُقدّم أيّة خدمة لتعلّم حرفة البرهان الرياضياتي، علمًا بأن المنطق أُسّس تحديدًا من أجل ترسيخ هذه الحرفة في الأذهان.

يتبنّى المقال وجهة النظر التي اتفق عليها غالبية علماء الرياضيات في بداية القرن العشرين، وهي عرض هذا العلم في إطار نظرية المجموعات، وبواسطة لغة رياضياتية عالمية هي لغة هذه النظرية. ولا يحتوي على أمور جديدة حول المنطق الرياضياتي الكلاسيكي والرياضيات، وإنما تكمن أهميته في أنه، بحسب المؤلف، لا توجد نصوص عربية تتناول موضوع الرياضيات التعليمية بالطريقة ذاتها، اللهم باستثناء النص المعروض في كتاب "الجبر" للأستاذ الفرنسي روجي غودمان (Roger Godement)، والذي قام الأساتذة مختار عبيد وأبو بكر خالد سعد الله ويوسف عتيق بتعريبه. جميع الكتب المصاغة بالعربية، التي تتناول جانبًا من المنطق الأولي، سواء كانت محلية أو قادمة من مصر أو سوريا، والتي قام المؤلف بمعاينتها، لا تتناول سوى جداول الحقيقة، وهذا يعني أنها لا تتناول المنطق كما ينبغي، وإنما تتناول بالأحرى موضوعًا آخر يتعلق بجبور بول (Boole). وهذا، في نظر المؤلف، أعاق فهم المنطق الأولي على الرغم من بساطته، ومن ثمة أضرّ بعملية تدريس الرياضيات الأولية.

يتضمن المقال أيضًا نصًّا قصيرًا، ولكنه دقيق جدًا، حول الصورنة والرياضيات الصورية، التي طالب هيلبرت (Hilbert) بتأسيسها في بداية القرن العشرين. ويمكن لطلاب فلسفة العلوم استخدامه في مقالاتهم والاستفادة منه ونشره لديهم.

يُعنى الجزء الأول من المقال بعرض إحدى لغات نظرية المجموعات، بالإضافة إلى خمس مسلّمات من بين المسلّمات العشر لهذه النظرية.

2. نظرية المجموعات ZFC

في نهاية القرن التاسع عشر الميلادي، قدَّم كانتور إلى مجتمع الرياضياتيين نظريته الرائدة في الرياضيات، المعروفة باسم "نظرية المجموعات"، والتي اعتُبرت من حينها وحتى اليوم أساس الرياضيات. وأقرّ العديد من علماء الرياضيات الكبار، وعلى رأسهم هيلبرت، عالم الرياضيات ذائع الصيت وصاحب التأثير الكبير على العلماء الشباب، بأن الإطار الطبيعي الذي ينبغي أن تُؤسَّس داخله الرياضيات المعتادة، المستخدمَة في حل مشكلات العلوم، والتي تُدعى أيضًا برياضيات النماذج، هو نظرية المجموعات، وهو ما تحقق بالكامل منذ بداية القرن العشرين. وتكفي لمحة سريعة للتأكد من أن جميع النظريات الرياضياتية المعتادة، أو بالأحرى جميع النماذج الرياضياتية، قد صيغت في عصرنا بلغة نظرية المجموعات، والتي سنتحدث عنها في الفقرة التالية.

وعلى الرغم من الشكوك العديدة التي حامت حول نظرية المجموعات بسبب ترافق ظهورها مع بروز بعض المفارقات، فقد حظي كانتور، مع ذلك، بدعم وتقدير معنوي قوي من هيلبرت، الذي قال في خضم دفاعه عن مجمل أفكار كانتور حول المجموعات والأعداد الترتيبية والأصلية جملته الشهيرة التي حفظها لنا التاريخ: "لا يمكن لأحد أن يطردنا من الجنة التي أنشأها كانتور لنا".

قدَّم هيلبرت برنامجًا طموحًا لحسم مشكلة المفارقات الناشئة، وحثّ العلماء الشباب على دراسة المسائل المنطقية دراسة مستفيضة وعميقة، باعتبارها الوسيلة الأولى لمحاصرة مشكلة تناقض الرياضيات. وفي الوقت عينه دعاهم إلى البحث عن نظام مسلماتي انتهائي لنظرية المجموعات. وبالفعل، تم العثور على العديد من هذه النُظم، ولعل أشهرها وأكثرها توافقًا مع الحدس وتحقيقًا في المنطق التجريبي العادي هو نظام المسلَّمات ZFC. يوجد نظام مسلمات آخر للنظرية ذاتها أكثر فاعلية في البحوث المتقدمة حول أُسس الرياضيات، يعرف باسم نظام "مسلمات نيومان وَبيرنايز وغودل"، ويُشار إليه اختصارًا بـ NBG. بيد أن ZFC هو المعتمد في الرياضيات التعليمية وفي غالبية البحوث الرياضياتية، ربما باستثناء تلك المتعلقة بالفئات (Categories) وَالتوبوس (Topos).

1.2. لغة ZFC

إحدى اللغات الرياضياتية من الرتبة الأولى المناسبة لدراسة المجموعات وخواصها هي اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ ذات الأبجدية التالية:

- رموز الروابط المنطقية: $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\Rightarrow$، $\Leftrightarrow$؛
- رمزا المُكَمِّمين الوجودي والعمومي: $\exists$، $\forall$؛
- رمزا القوسين اليميني واليساري: (،)؛
- رمز المساواة: $=$؛
- رموز متغيرات أولى: x، y، z، ...؛
- رموز متغيرات ثانية خاصة بالمجموعات: X، Y، Z، ...؛
- رمز الانتماء: $\in$.

لنضع

$$\mathcal{V}ar_1 := \{x, y, z, \dots\}, \mathcal{V}ar_2 := \{X, Y, Z, \dots\}, \mathcal{V}ar := \mathcal{V}ar_1 \cup \mathcal{V}ar_2.$$

تُدعى $\mathcal{V}ar$ بمجموعة رموز المتغيرات، بينما تدعى $\mathcal{LS} := \mathcal{V}ar \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall, (,), =\}$ بمجموعة الرموز المنطقية. إن $\mathcal{LS}$ محتواة في أبجدية أية لغة رياضياتية كلاسيكية من الرتبة الأولى، وهي قابلة للعد، لأن أصلها مساوٍ لأصلي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المشار إليه بالرمز $\aleph_0$. ونذكر بالمناسبة أن المُقابِلات الإنكليزية للكلمة العربية "أصلي" هي Cardinality وَ Cardinal number وَ Cardinal.

من ناحية أخرى، تُسمى المجموعة $\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) := \mathfrak{Rl}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) := \{\in\}$ بمجموعة الرموز غير المنطقية للُّغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$، وهي في هذه الحالة مجموعة منتهية. وعلى هذا الأساس نقول إن لغة نظرية المجموعات قابلة للعد لأن أبجديتها $\mathcal{A}\ell ph(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) := \mathcal{LS} \cup \mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ قابلة للعد.

وعمومًا، تتميز أية لغة رياضياتية كلاسيكية من الرتبة الأولى $\mathfrak{L}_1$ بمجموعة رموز ثوابتها الأساسية $\mathcal{C}st(\mathfrak{L}_1)$ ومجموعة رموزها التابعية (الدالية) الأساسية $\mathcal{F}ct(\mathfrak{L}_1)$ ومجموعة رموز علاقاتها الأساسية $\mathfrak{Rl}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$. ويُشكّل اتحاد هذه المجموعات الثلاث مجموعة الرموز غير المنطقية $\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1)$ للُّغة $\mathfrak{L}_1$. ونضع

$$\mathrm{Card}\mathfrak{L}_1 := \mathrm{Card}\mathcal{A}\ell ph(\mathfrak{L}_1) := \mathrm{Card}\mathcal{LS} + \mathrm{Card}\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1) := \aleph_0 + \mathrm{Card}\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1).$$

وعليه، إذا كان $\mathrm{Card}\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1) \leq \aleph_0$، فإن $\mathrm{Card}\mathfrak{L}_1 \coloneqq \aleph_0$، ويقال في هذه الحالة إن $\mathfrak{L}_1$ قابلة للعد. بينما إذا كان $\aleph_0 < \mathrm{Card}\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1)$، فإن $\mathrm{Card}\mathfrak{L}_1 \coloneqq \mathrm{Card}\mathcal{NLS}(\mathfrak{L}_1)$، ومن ثمة يقال إن $\mathfrak{L}_1$ غير قابلة للعد.

مجموعة الصيغ الذرية للُّغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$، والتي يشار إليها بالرمز $\mathrm{AFor}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، مكونة بالضبط من الصيغ:

- $x = y$، والتي تُقرأ لغويًا كالآتي "x يساوي y"؛
- $X = Y$، والتي تُقرأ لغويًا كالآتي "المجموعة X تساوي المجموعة Y"؛
- $x \in X$، والتي تُقرأ لغويًا كالآتي "x ينتمي إلى المجموعة X"؛
- $X \in Y$، والتي تُقرأ لغويًا كالآتي "المجموعة X تنتمي إلى المجموعة Y".

مجموعة صيغ اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$، والمشار إليها بالرمز $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، هي أصغر مجموعة (بالنسبة للاحتواء) في مجموعة كل كلمات $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ المحققة للشروط الثلاثة:

· $\mathrm{AFor}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \subset \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$؛

· إذا كانت P وَ Q تنتميان إلى $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، فإن $P \wedge Q$ وَ $P \vee Q$ وَ $P \Rightarrow Q$ وَ $P \Leftrightarrow Q$ وَ $\neg P$ تنتمي أيضًا إلى $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$؛

· إذا كانت P تنتمي إلى $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، فمن أجل أي رمز متغير x، $(\exists x)P$ وَ $(\forall x)P$ تنتمي أيضًا إلى $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$. تُقرأ $(\exists x)P$ لغويًا كالآتي "يوجد x بحيث P"، ويقال إن P هي نطاق المكمم الوجودي $\exists$. بينما تُقرأ $(\forall x)P$ لغويًا كما يلي "مهما يكن x، P"، ويقال إن P هي نطاق المكمم العمومي $\forall$.

يقال في أبجديات التعاريف الرياضياتية إننا قمنا بتعريف $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ تراجعيًا. وسيتضح هذا من المقاربة التالية. لنضع

$$\mathrm{For}_0(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) = \mathrm{AFor}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{For}_1(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) = {} & \mathrm{For}_0(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \cup \{\neg P : P \in \mathrm{For}_0(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\} \\ & \cup \bigcup_{*\in\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow\}} \{P * Q : P, Q \in \mathrm{For}_0(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\} \\ & \cup \{(\exists x)P : P \in \mathrm{For}_0(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\} \cup \{(\forall x)P : P \in \mathrm{For}_0(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\mathrm{For}_{n+1}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) = {} & \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \cup \{\neg P : P \in \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\} \\ & \cup \bigcup_{*\in\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow\}} \{P * Q : P, Q \in \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\} \\ & \cup \{(\exists x)P : P \in \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\} \cup \{(\forall x)P : P \in \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})\}\end{aligned}$$

حيث n عدد طبيعي.

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1. $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$.

البرهان. يكفي أن نتحقق من أن المجموعة $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ تحقق الشروط الثلاثة الواردة في تعريف $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، وأنها محتواة في هذه الأخيرة. وبما أن $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ هي أصغر مجموعة بالنسبة للاحتواء محققة لهذه، فلدينا حتما التساوي $\mathcal{F} = \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$.

من الواضح أن $\mathcal{F}$ تحقق الشرط الأول. إذا كانت P وَ Q تنتميان إلى $\mathcal{F}$، فإنه يوجد n بحيث $\mathrm{For}_n(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \ni P, Q$. وعليه

$$P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q, \neg P, (\exists x)P, (\forall x)P \in \mathrm{For}_{n+1}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \subseteq \mathcal{F}.$$

الأمر الذي يعني أن $\mathcal{F}$ تحقق كذلك الشرطين الثاني والثالث.

لدينا، كما هو واضح، $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \supseteq \text{For}_0(\mathfrak{L}_1\text{Set})$. كذلك نلاحظ، استنادًا إلى تعريف $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$، أن الاحتواء $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \supseteq \text{For}_n(\mathfrak{L}_1\text{Set})$ يؤدي إلى الاحتواء $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \supseteq \text{For}_{n+1}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$. وعليه لدينا $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \supseteq \text{For}_n(\mathfrak{L}_1\text{Set})$ مهما يكن n، الأمر الذي يعني أن $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \supseteq \mathcal{F}$. انتهى البرهان.■

مجموعة الصيغ الأولية للُّغة $\mathfrak{L}_1\text{Set}$ هي المجموعة

$$\text{PFor}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) := \text{AFor}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \cup \{(\exists x)P : P \in \text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})\} \cup \{(\forall x)P : P \in \text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})\}.$$

لنلاحظ بأن $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$ هي كذلك أصغر مجموعة (بالنسبة للاحتواء) في مجموعة كل كلمات $\mathfrak{L}_1\text{Set}$ والمحققة للشرطين:

- $\text{PFor}(\mathfrak{L}_1\text{Set}) \subset \text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$؛
- إذا كانت $\mathcal{P}$ وَ Q تنتميان إلى $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$، فإن $P \wedge Q$ وَ $P \vee Q$ وَ $P \Rightarrow Q$ وَ $P \Leftrightarrow Q$ وَ $\neg P$ تنتمي أيضًا إلى $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$؛

بما أن لغة نظرية المجموعات قابلة للعد، فمجموعة صيغها $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$ هي الأخرى قابلة للعد. ولنتذكر جيدًا أن صيغ الرياضيات التعليمية مصاغة بلغة نظرية المجموعات $\mathfrak{L}_1\text{Set}$. وعلى هذا الأساس، فأية صيغة منها لا بد وأن تنتمي إلى $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$. ويمكن أن يُطرح السؤال التالي: أين هي رموز الاحتواء والتقاطع والاتحاد من كل هذا؟ والإجابة هي إن هذه الرموز ليست رموزًا أساسية مثل رمز الانتماء، بل هي مجرد اختصارات معرفة كما يلي:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$$
$$X \subset Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \neq Y$$
$$x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y$$
$$x \in X \cup Y \Leftrightarrow x \in X \vee x \in Y.$$

من هنا ندرك بأن الصيغ الأربع $X \subseteq Y$ وَ $X \subset Y$ وَ $x \in X \cap Y$ وَ $x \in X \cup Y$ تنتمي كلها إلى $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$.

كذلك من بين الاختصارات المفيدة والمعتمدة في الرياضيات ما يلي: الكتابة الرمزية $(\exists x \in X)P$ هي اختصار للصيغة $(\exists x)(x \in X \wedge P)$، والكتابة الرمزية $(\forall x \in X)P$ هي اختصار للصيغة $(\forall x)(x \in X \Rightarrow P)$.

لنتذكر كذلك أن أية كلمة مصاغة بالأبجدية $\mathcal{phlA}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$ لا تنتمي بالضرورة إلى $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$. فعلى سبيل المثال، الكلمات $\in xy$ وَ $x = \exists y$ وَ $X \in \forall Y$، وغيرها من هذا النمط، لا تنتمي إلى $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$.

من ناحية أخرى، كَوْنُ أو عالَمُ كل حدود نظرية المجموعات $\mathbb{U} = \mathcal{Term}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$ يشمل كل الحدود التي تم إدخالها إلى الرياضيات وتلك الممكن إدخالها إليها، إنه يشمل كل المجموعات وكل الأعداد والدوال والعلاقات التي تم بناؤها في الرياضيات. وكحالة خاصة، فهو يشمل المجموعات الخمس للأعداد $\mathbb{N}$ وَ $\mathbb{Z}$ وَ $\mathbb{Q}$ وَ $\mathbb{R}$ وَ $\mathbb{C}$ وما تحتوي عليه. إن الكون $\mathbb{U}$ ليس مجموعة؛ بل هو نوع آخر من الحشود الفائقة الضخامة، يسميه البعض مجموعة فائقة، ويسميه آخرون صفًا.

كل متغير في أية صيغة رياضياتية (أي عنصر من المجموعة $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$) يمكن تعويضه بما يناسبه من حدود.

أنوّه بقوة إلى أن بمقدور مُدرّسي الرياضيات بالعربية، ممّن يتّسمون بالجدية، كتابة الصيغ الرياضياتية مستخدمين كلمات وحروف من اللغة العربية؛ فهذا المسلك قد يساعد في زيادة سرعة الفهم والاستيعاب لدى التلاميذ لما يُقدّم إليهم، ويُقال عن مثل هذه الصيغ في الأوساط الرياضياتية إنها كُتبت بلهجة رياضياتية عربية. لكن هذا المسلك يطرح تحدّيين جادّين؛ أولهما أن الصيغ الرياضياتية المكتوبة بهذه اللهجة قد لا تكون صحيحة نحويًا من وجهة نظر الرياضيات، أي ربما لا تنتمي إلى المجموعة $\text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$، لذلك يجدر بمدرس الرياضيات الجاد إتقان عملية تحويل الصيغ الرياضياتية إلى عبارات سليمة مكتوبة باللهجة الرياضياتية العربية، والعكس.

أما التحدي الآخر، فيتمثل في تمييز الصيغ الرياضياتية المكتوبة باللهجة الرياضياتية العربية ضمن النصوص الرياضياتية الواردة في الكتب المدرسية. فإذا كان المدرّس لا يمتلك القدرة على هذا التمييز، فإن أمورًا كثيرة ستختلط عليه، منها أنه سيصعب عليه لا محالة استخدام مبادئ الاستدلال الرياضياتية المعتمدة، أي مبادئ المنطق الرياضياتي

الكلاسيكي الأولية، لتبرير صحة الصيغ الرياضياتية الواردة في النصوص، وربما يجرّه ذلك إلى استخدام طرق استدلال معيبة، وأحيانًا غير مقبولة رياضياتيًا. وعلى هذا الأساس ينبغي على مدرّس الرياضيات الجاد أن يسعى بجهوده الخاصة إلى امتلاك البصيرة الكافية لتمييز الصيغ الرياضياتية عن غيرها داخل نصوص كتب الرياضيات. واستنادًا إلى خبرتي، أرى أن هذا الأمر يُشكّل أحد التحديات الكبيرة التي تواجه تدريس الرياضيات بالجزائر.

2.2. بعض مسلّمات ZFC

كما أُشير سابقًا، يكفي في البداية أن يكون مدرّس الرياضيات على دراية بالمسلمات الخمس التالية من بين مسلّمات نظرية المجموعات ZFC العشر.

مسلّمة الامتداد. إذا كان لمجموعتين نفس العناصر، فإنهما متساويتان. ويعبر عنها بواسطة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ كالآتي:

$$(\forall X)(\forall Y)\big((\forall x)(x \in X \Leftrightarrow x \in Y) \Rightarrow X = Y\big).$$

تتجاهل هذه المسلمة، التي يشيع استخدامها ضمنيًا في كل موضع من الرياضيات، طرق تكوين المجموعتين X وَ Y، وتركز فقط على محتويهما من العناصر. وتصبح مبرهنة إذا كانت X وَ Y منتهيتين، إذ يمكننا ببساطة التحقق من صحتها استنادًا إلى خبرتنا الحدسية التجريبية حول المجموعات المنتهية. وفي حقيقة الأمر، تصير مسلمة الامتداد في هذه الحالة منتمية إلى الفكر الانتهائي. لكن يختلف الحال كليًا إذا كانت إحدى المجموعتين X وَ Y غير منتهية، حيث لا نملك في هذه الحالة أية خبرة حدسية حول المجموعات غير المنتهية، لسبب بسيط هو أنه لا يوجد في الكون الذي نعيش فيه أي شيء يمكن أن يكون تجسيدًا ماديًا للمجموعة غير المنتهية. وهذا يطرح تحديًا حقيقيًا على علماء الرياضيات، إذ "قد تؤدي مسلمة الامتداد، في هذه الحالة، إلى تناقض في الرياضيات". ولسوء الحظ، لا يمكننا أبدًا، استنادًا إلى مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل (Gödel)، دحض هذا الطرح الكارثي بواسطة وسائل اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$.

إن صحة الاتجاه العكسي لمسلمة الامتداد

$$X = Y \Rightarrow (\forall x)(x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$$

تنبع كاملًا من خواص المساواة "الشيئان المتساويان يتمتعان بذات الخصائص". وعلى هذا الأساس يُقدّم بعض المؤلفين مسلمة الامتداد كما يلي:

$$(\forall X)(\forall Y)\big((\forall x)(x \in X \Leftrightarrow x \in Y) \Leftrightarrow X = Y\big).$$

مسلّمات الفصل أو مسلّمات المجموعات الجزئية. من أجل كل مجموعة X وكل صيغة $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \ni P$، توجد مجموعة Y بحيث $(\forall x)(x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x])$. ويُعبر عن هذه المسلّمة بواسطة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ كالآتي

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x]).$$

لنتحقق من أن المجموعة Y وحيدة. لأجل ذلك، نفرض وجود مجموعة ثانية Z تتمتع بذات الخاصية. وبالتالي

$$x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x], x \in Z \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x].$$

الآن تخبرنا قاعدة السلسلة 19 والقاعدة 15 MP في المبرهنة 2، بالجزء الثاني من المقال، أنه لدينا الصيغة

$$x \in Y \Leftrightarrow x \in Z$$

والتي تستنبط منها الصيغة

$$(\forall x)(x \in Y \Leftrightarrow x \in Z).$$

وعليه نستنتج، استنادًا إلى مسلمة الامتداد، بأن $Y = Z$. وهكذا يمكننا والحالة هذه إدخال حد جديد، يشار إليه بالرمز $\{x : x \in X \wedge P[x]\}$، إلى حدود اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ كما يلي

$$Y = \{x : x \in X \wedge P[x]\} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x]).$$

بوضع $\{x : x \in X \wedge P[x]\}$ في مكان المتغير Y نحصل على

$$\{x : x \in X \wedge P[x]\} = \{x : x \in X \wedge P[x]\}$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in \{x : x \in X \wedge P[x]\} \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x]).$$

الآن نستنتج، استنادًا إلى المسلمة المنطقية ت) والقاعدة MP، بالجزء الثاني من المقال، أنه لدينا

$$(\forall x)(x \in \{x : x \in X \wedge P[x]\} \Leftrightarrow x \in X \wedge P[x]).$$

وهكذا فالحد $\{x : x \in X \wedge P[x]\}$ هو مجموعة العناصر المنتمية إلى X والمحققة للخاصية P.

مسلّمة المجموعة الخالية. توجد مجموعة X بحيث $(\forall x)(x \notin X)$. ويُعبّر عن هذه المسلّمة بواسطة اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ كما يلي $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$.

يبرهن كما في حالة مسلّمات الفصل بأن المجموعة X وحيدة. وعلى هذا الأساس نُدخل حدًا جديدًا $\emptyset$ إلى حدود اللغة بواسطة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ التكافؤ التالي

$$X = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X).$$

بوضع $\emptyset$ في مكان المتغير X نحصل على

$$\emptyset = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin \emptyset).$$

ومنه، استنادًا إلى المسلمة المنطقية ت) والقاعدة MP، بالجزء الثاني من المقال، يأتي

$$(\forall x)(x \notin \emptyset).$$

وهكذا فالحد $\emptyset$ هو المجموعة الوحيدة التي لا تحتوي على أي عنصر، ولذلك يسمى بالمجموعة الخالية.

مسلّمة مجموعة القوة. من أجل كل مجموعة X توجد مجموعة Z بحيث

$$(\forall Y)(Y \subseteq X \Rightarrow Y \in Z).$$

ويُعبر عن هذه المسلّمة بواسطة اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ كما يلي $(\forall X)(\exists Z)(\forall Y)(Y \subseteq X \Rightarrow Y \in Z)$.

لتكن X مجموعة معطاة. حسب مسلّمة مجموعة القوة توجد مجموعة Z بحيث

$$(\forall Y)(Y \subseteq X \Rightarrow Y \in Z).$$

تخبرنا الآن مسلمات الفصل أنه توجد مجموعة وحيدة $\mathbb{P}(X) = \{Y : Y \in Z \wedge Y \subseteq X\}$ بحيث

$$(\forall Y)(Y \in \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow Y \in Z \wedge Y \subseteq X).$$

من ناحية أخرى، بما أن $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in Z$، فإن $Y \in Z \wedge Y \subseteq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$. وعليه يأتي

$$(\forall Y)(Y \in \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow Y \subseteq X)\mathbb{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$$

من هنا يتضح بأن $\mathbb{P}(X)$ لا تتعلق إلا بالمجموعة X. تُدعى $\mathbb{P}(X)$ بمجموعة كل المجموعات الجزئية في X، ويشار إليها أحيانا بالرمز 2^X.

مسلمة الاختيارAC. من أجل كل عائلة غير خالية $\mathcal{F}$ لمجموعات غير خالية، توجد دالة

$$f : \mathcal{F} \to \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$$

بحيث $(\forall X \in \mathcal{F})(f(X) \in X)$. تدعى f دالة اختيار.

تُعدّ مسلمة الاختيار (AC) أهم المسلّمات على الإطلاق في الرياضيات؛ إذ أن الجزء المهم من الرياضيات الكلاسيكية، والذي يُمثّل أكثر من خمسين بالمائة منها، لا يقوم إلا عليها. وقد قال عنها هيلبرت: "إنها حقيقة غريبة أن تكون جميع المسلّمات المتعلقة باللانهاية قابلة للاستنباط من مسلّمة واحدة، وهي مسلّمة الاختيار، المسلّمة الأكثر تحديًا في الأدبيات الرياضياتية". كما قال سيربينسكي (Sierpiński): "إن المشكلة الكبرى والقديمة المتعلقة بالوجود هي التي تُشكّل أساس الجدل الدائر حول مسلّمة الاختيار".

وتنبع مشكلة الجدل المشار إليه هنا من القناعات الفلسفية لعلماء الرياضيات البِنائيين، الذين يرفضون جملة وتفصيلًا تَبني مسلّمة الاختيار. وفي هذا الصدد، قال غودشتاين (Goodstein): "النظرية الرياضياتية الصورية التي يمكن فيها إثبات صيغة من النوع $(\exists x)P$ من دون إعطاء طريقة صريحة لإنشاء x، هي النظرية التي يفشل فيها المكمم الوجودي $\exists$ في تحقيق وظيفته المقصودة". وللاطلاع على مزيد من الآراء حول مسلّمة الاختيار، يمكن العودة إلى المرجع 4.

توجد عدة نصوص لمسلّمة الاختيار (AC)؛ نذكر من بينها الثلاثة التالية:

· من أجل كل عائلة غير خالية $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ لمجموعات غير خالية، الجداء الديكارتي $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ غير خال.

· من أجل كل علاقة ثنائية $\mathcal{R}$، توجد دالة f بحيث $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ وَ $f \subseteq \mathcal{R}$.

· من أجل كل عائلة غير خالية $\mathcal{F}$ لمجموعات غير خالية ومنفصلة مثنى مثنى، توجد مجموعة C بحيث $C \cap X = \{a_X\}$ مهما تكن $X \in \mathcal{F}$.

مراجع

[1] J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, Studies in Logic, vol. 90, North Holland, 1977.

[2] A. Church, Introduction to Mathematical Logic, vol. 1. Princeton University Press, 1956.

[3] M. Foreman and A. Kanamori, Handbook of Set Theory, Springer, 2010.

[4] H. Herrlich, Axiom of Choice, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.

[5] A. Indrzejczak, Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics, Springer, 2010.

[6] T. Jech, Set Theory, The Third Millenium Edition, revised and expanded, Springer, 2003.

[7] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, North Holland/Van Nostrand, Amsterdam, New York. 1952.

[8] Yu. I. Manin, A Course in Mathematical Logic for Mathematicians, Springer, 2010.

[9] E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015.

[10] J. R. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison-Wesley Pub., 1967.

[11] G. Tourlakis, Lectures in Logic and Set Theory, Vol. 1: Mathematical Logic, Cambridge University Press, 2003.

[12] G. Tourlakis, Lectures in Logic and Set Theory, Vol. 2: Set Theory, Cambridge University Press, 2003.

[13] R. L. Vaught, Set Theory: An Introduction, Birkhäuser, Boston, 1995.