مبرهنة فيثاغورس في التقليد الرياضي في دار الإسلام

غرابة وسيلة
أستاذة بقسم الرياضيات والإعلام الآلي، كلية العلوم، جامعة الدكتور يحي فارس، المدية
مخبر الإبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
gheraba.ouassila@univ-medea.dz

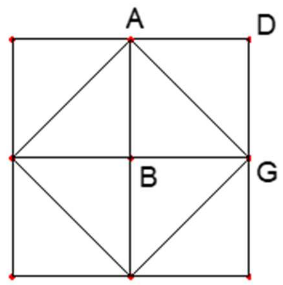
استكمالًا لمقالات مبرهنة فيثاغورس، نحاول في هذا الجزء الأخير فهم المبرهنة من خلال دراستها في التقليد الرياضي العربي، وذلك عبر أعمال رياضيين من دار الإسلام.

1. الخوارزمي (ت. 850م)

اسمه محمد بن موسى، وأصله من خوارزم، وكان منقطعًا إلى خزانة الحكمة للمأمون. يُعدّ من علماء الهيئة، وقد كان الناس، قبل الرصد وبعده، يعتمدون على زيجيه الأول والثاني، المعروفَين بالسند هند [5].

أثبت الخوارزمي في كتابه **الجبر والمقابلة** مبرهنة فيثاغورس في الحالة الخاصة المتعلقة بالمثلث القائم المتقايس الساقين. ويختلف برهان الخوارزمي عن إثبات أُقليدس (Euclid). ولقد استبعد بروكلوس (Proclus) هذه الحالة الخاصة في كتابه، ومشيرًا إلى أن أُقليدس لم يُثبتها هندسيًا، رغم أن الفيثاغوريين أثبتوا قبله أن العدد $\sqrt{2}$ ليس عددًا ناطقًا، وهو طول وتر في مثلث قائم الزاوية طولا ضلعا القائمة فيه 1 [10].

ربّما كان وجود المبرهنة في كتاب الخوارزمي لغرض حرفي، لأنه زاوج فيه (خاصة في الجزء الهندسي) بين الأشكال الهندسية وتطبيقاتها، وكان إثباتها معروفا عند اليونان والهنود [11]. والإثبات في الشكل 1 [8].



الشكل 1

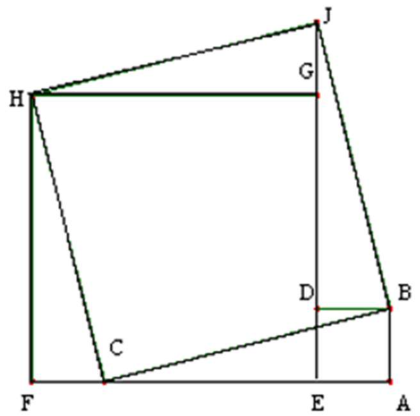
ملاحظات:

- الطريقة المستخدمة في الإثبات هي إتمام المربع، وقد ظهرت هذه الطريقة أيضًا في حوار بين سقراط (Socrates) وعبدٍ له لم يدرس الرياضيات، أدرجها أفلاطون (Plato) عن أستاذه. وفي هذا الحوار جعل سقراط عبده يستنتج خطأً أن ضعف مساحة مربع طول ضلعه قدم هو مربع ضعف ضلعه [10]. ولا نجد هذه الطريقة عند الطوسي في كتابه **تحرير أوقليدس**.
- وُجد هذا الشكل أيضًا في **السولباسوتراس** الهندية، وقد يُعدّ إثباتًا مرئيًا للمبرهنة: مساحة مربع تقع رؤوسه على منتصفات أضلاع مربع آخر، تساوي ضعف مساحته" [9].

2. ثابت بن قرة (ت. 901م)

هو أبو الحسن ثابت بن قرة بن مروان بن ثابت بن كرايا بن مارينوس بن سلامويوس، وُلد سنة 212هـ وتوفي سنة 288هـ كان صيرفيا في حرّان، فاستصحبه محمد بن موسى ووصله بالمعتضد، وأدخله في جملة المنجمين. وأصل رياسة الصابئة في بلاد الإسلام وبحضرة الخلفاء ثابت بن قرة [5].

كرّس ثابت بن قرة مؤلفَين للبناءات الهندسية. ففي كتابه **رسالة في الحجة المنسوبة إلى سقراط في المربع وقطره**، قدّم حلًا للمسألة التالية: تقسيم مربع مبني على وتر مثلث قائم الزاوية إلى قطع نستطيع أن نركّب بها المربعات المبنية على أضلاع المثلث عينه. وهي فكرة تختلف تمامًا عن فكرة إثبات أُقليدس لمبرهنة فيثاغورس. يُظهر الشكل 2 أحد رسوم ثابت بن قرة، هنا بُني المربع $BCHJ$ على وتر المثلث ABC وقُطّع فيما بعد إلى أجزاء أعطت بدورها الشكل $BAFHGD$. وهذا الشكل ليس سوى المربعين $ABDE$ و $EFHG$ المبنيين على أضلاع المثلث ABC [2].



الشكل 2

ملاحظة

قدّم النيريزي (ت. 922م) هذا الإثبات أيضًا أثناء شرحه لكتاب **الأصول** لأُقليدس، ونسبه إلى ثابت بن قرة دون إعطاء مصادره [2]. وهو الإثبات الثامن في كتاب **تحرير أُقليدس** للطوسي.

3. أبو الوفاء البوزجاني (ت. 997م)

هو محمد بن محمد بن يحيى بن إسماعيل بن العباس، وُلد ببوزجان من بلاد نيسابور سنة 328هـ قرأ على عمه وخاله ما يتعلق بالعدديات والحساب، وتعلّم الهندسة على يد أبي يحيى الماوردي، انتقل إلى العراق سنة ثمان وأربعين. من مؤلفاته: **كتاب ما يحتاج إليه العمال، تفسير كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة، تفسير كتاب ديوفنطس في الجبر، كتاب معرفة الدائرة من الفلك، كتاب الكامل** [5]، وغيرها من الكتب.

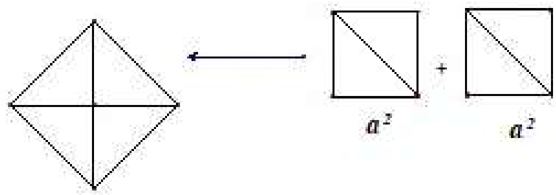
أراد أبو الوفاء البوزجاني تشكيل مربع باستخدام التقطيع، انطلاقًا من مربعات صغيرة. وقد حلّ أبو الوفاء المسألة خصيصًا لفائدة المهندسين والحرفيين، وذلك من أجل تغيير ممارساتهم لمهنتهم بطرقهم غير الدقيقة بأخرى مدروسة رياضيًا في كتابه **كتاب فيما يحتاج إليه الصانع من أعمال الهندسة**. يحتوي الكتاب على عدد كبير من إنشاءات تطبيقية هامة لمسح الأراضي، وأعمال الهندسة عند الحرفيين [11].

حل المسألة باستخدام خواص حسابية للعدد الطبيعي n، مع تفصيل حالتين:

أ- **الحالة التي يكون فيها العدد n مربعًا أو مجموع مربعين:**

أ-1. في حالة كان n من الشكل a^2، أي أن لدينا مربعات متقايسة عددها a^2، فإن المربع المطلوب تشكيله بهذه القطع سيكون طول ضلعه a. وبالعكس، يمكننا تقطيع مربع مساحته a^2 إلى مربعات عددها a^2، وذلك بتقطيع أضلاع المربع إلى a جزءًا.

أ-2. في حالة تشكيل مربع من مربعات عددها $2a^2$: في المرحلة الأولى نشكّل مربعين كما مرّ سابقا في أ-1، مساحة كل منهما a^2. ثم نقسم المربعين على مستوى قطريهما، فنحصل على 4 مثلثات قائمة ومتقايسة الساقين. عند لصق هذه المضلعات على مستوى أضلاعها نحصل على مربع، كما يبيّنه الشكل 3.



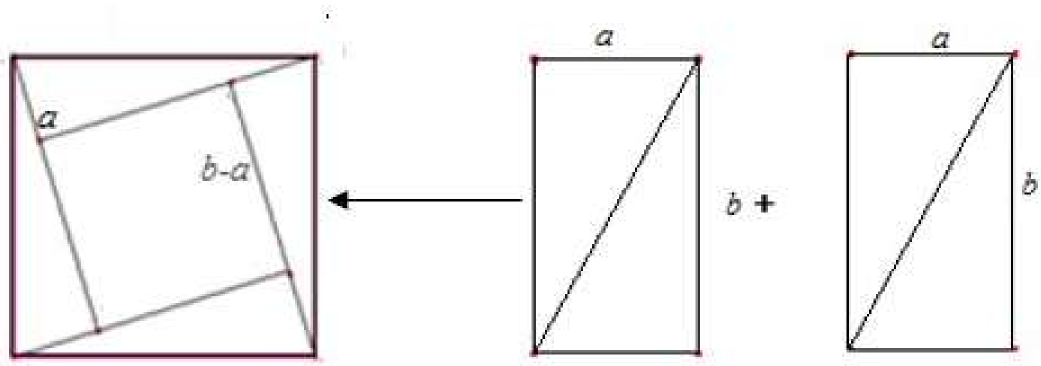
الشكل 3

أما إذا كان لدينا مربع مساحته $2a^2$ ونريد تجزئته إلى مربعات متساوية عددها $2a^2$، فإننا نقوم بالعملية العكسية [6].

أ-3. في حال تشكيل مربع انطلاقًا من مربعات عددها يساوي $a^2 + b^2$ (حيث $a < b$)، نأخذ مستطيلين بعداهما a وb حيث a وb عددان طبيعيان. يحتوي كلٌّ من المستطيلين إذن على ab مربعًا. نقسم المستطيلين على مستوى القطر إلى أربعة مثلثات قائمة، ونحيطها على مستوى أوتارها حول مربع طول ضلعه $(b-a)$، كما هو مبيّن في الشكل 4، فيتشكل مربع يتكون من $(b-a)^2$ مربعًا.

يتشكل المربع المطلوب انطلاقًا من العلاقة:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 4(ab/2) + (b-a)^2.$$

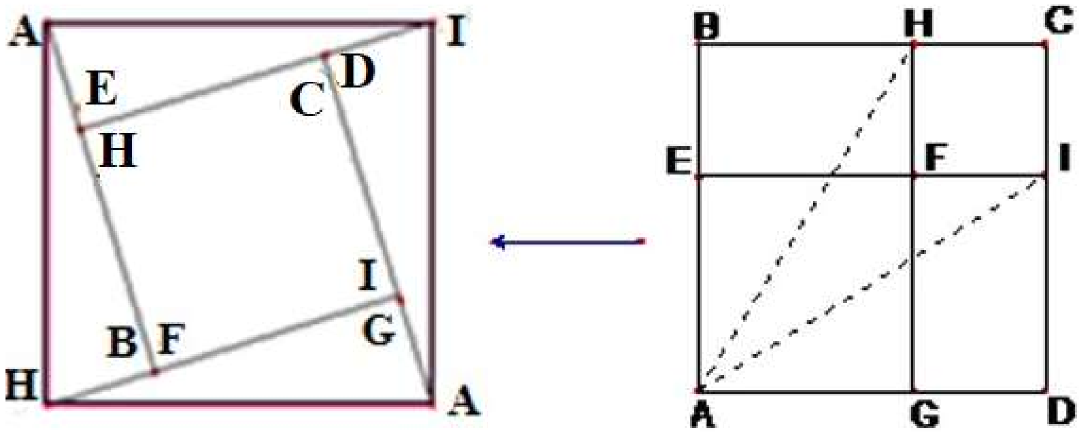


الشكل 4

ب- في الحالة الثانية: إذا لم يكن n مربعًا ولا مجموع مربعين:

ب-1. نريد تشكيل مربع انطلاقًا من مربعين طولي ضلعيهما c وd بحيث $c > d$: نفرض أن المربع $AEFG$ طول ضلعه d والمربع $ABCD$ طول ضلعه c، بحيث يشتركان في رأس الزاوية القائمة، وأن الضلعين اللذين يحصرانها متطابقان كل منهما لنظيره في المربع الآخر، كما هو موضح في الشكل 5. نمدّ الضلعين FI وFH، فنحصل على المربع $HFIC$ الذي طول ضلعه $c-d$، والمستطيلين $EIDA$ و$BHGA$ اللذين بعداهما c و d (بعد إلصاق المربع

$EFGA$ والمستطيل $FIDG$). بعد ذلك نقسم المستطيلين بحسب قطريهما، ونشكّل المربع تكون أضلاعه هي أقطار المستطيلات بحيث يكون المربع $HFIC$ في الوسط، كما هو مبيّن في الشكل 5 [6].

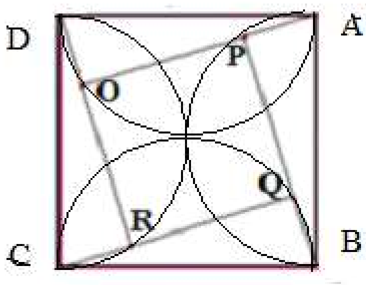


الشكل 5

ب-2. أما في الحالة العكسية، أي عند تقطيع مربع طول ضلعه ليس عددًا طبيعيًا إلى مربعين طول أحد ضلعيه معلوم، نرسم المربع $ABCD$ طول ضلعه c، كما هو مبين في الشكل 6. ثم نشكّل أنصاف الدوائر أقطارها c، ونعيّن النقط R، Q، P، O بحيث يكون المربع $OPQR$ طول ضلعه $b-a$. ووفق العلاقة

$$a^2 + b^2 = 4(ab/2) + (b-a)^2$$

نجد المطلوب [8].



الشكل 6

ملاحظة

يشبه الإثبات **ب-2.** الإثبات الوارد في كتاب **تحرير أُقليدس** لنصير الدين الطوسي، غير أن الطريقة ليست نفسها؛ إذ رسم الطوسي المثلث قبل مربع الوتر، في حين قام أبو الوفاء البوزجاني بالعكس. وبذلك يمكن تفسير وجود الدوائر في شكل أبو الوفاء البوزجاني [8].

4. ابن الهيثم

هو أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم (عاش بين 965م و1041م)، وقد حظي بتقدير واهتمام كبيرين في الدراسات الحديثة، وله مكانة بارزة في المجالات العلمية عمومًا وفي الرياضيات خصوصًا. ومن بين مؤلفاته كتاب **في حل**

شكوك أُقليدس في الأصول، وهو أضخم كتبه المحفوظة في الرياضيات. وقد ألّفه بعد انتهائه من تأليف رسالته في **شرح مصادرات أُقليدس** [4].

قال ابن الهيثم في كتابه في **حل شكوك أُقليدس في الأصول**، في سياق حديثه عن مبرهنة فيثاغورس: "وهذا الشكل هو شكل علمي وليس يعترض فيه شيء من الشكوك إلا أنه يمكن أن يبين بطريق غير هذا الطريق الذي ذكره أُقليدس". وهي المبرهنة 47 في كتاب **الأصول**. وقدّم ابن الهيثم الإثبات التالي [4]:

- نرسم المثلث ABG القائم في G، ثم نرسم المربع $ABED$ ضلعه $[AB]$ منطبقًا على المثلث.

- في حالة $AB = AG$ فإن:

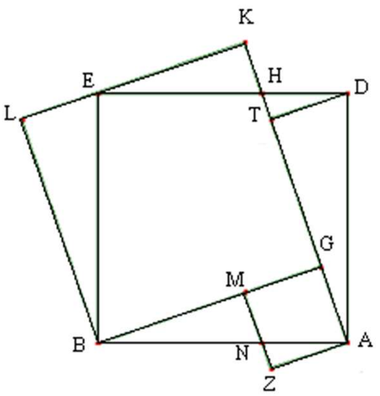
$$\Delta(DGA) = \Delta(AGB) = \Delta(BGE) = \Delta(EGD)$$

وكل اثنين من هذه المثلثات هي مربع الضلع $[AB]$ أو $[AG]$.

- في حالة $AB \neq AG$:

- نضع: $H = (AG) \cap (DE)$، $(BL) \perp (BG)$، $(BL) \perp (EL)$، $K = (EL) \cap (AG)$.
- بما أن $(EL) // (BG)$ و (BE) قاطع فإن $\angle EBG = \angle BEL$، و $\angle BAG = \angle EBG$ لأنهما متممان لنفس الزاوية $\angle ABG$ لقائمة، و $ED = BE$. إذن $\Delta(ABG) = \Delta(EBL)$، وبالتالي $BL = BG, EL = AG.$
- بما أن $(BL) // (GK)$ و $\angle K = \frac{\pi}{2}$ فإن $(GKLB)$ مربع وهو مربع $[GB]$.
- نرسم المربع $(AGMZ)$ وهو مربع $[GA]$.
- لتكن T مسقط D على (AG). لدينا $\angle BAG = \angle ADT$ لأن كل منهما متممة $\angle DAT$ من قائمة.
- $\angle ABG = \angle DAT$ لأنهما متمما $\angle GAB$ من قائمة، إذن $\Delta(ABG) = \Delta(ADT)$، ومنه $DT = AG$، ومنه $\Delta(ABG) = \Delta(EBL)$، إذن $\Delta(EBL) = \Delta(ADT)$.
- لدينا $\angle ZAN = \angle TDH$ لأنهما متممان لزاويتين متساويتين $\angle GAB$، $\angle ADT$ من قائمة، و $\angle DTH = \frac{\pi}{2}$، $AZ = DT$، ومنه $\Delta(AZN) = \Delta(DTH)$.
- لدينا $KL = GB$، $EL = GM$ ومنه $MB = KE$.
- مما سبق نجد $\Delta(MNB) = \Delta(HKE)$.
- ومنه $S_{(AGMN)} + S_{(DTH)} = S_{(AGMZ)}$
- ومنه $S_{(GKLB)} = S_{(BGHE)} + S_{(MNB)} + S_{(ADT)}$
- إذن $S_{(ABED)} = S_{(GBEH)} + S_{(ANMG)} + S_{(NMB)} + S_{(DTH)} + S_{(ADT)}$.

ومنه المطلوب.



الشكل 7

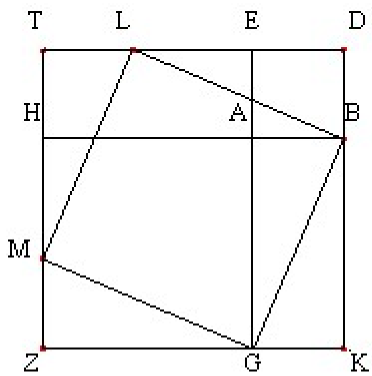
ملاحظة: إثبات ابن الهيثم هو الإثبات الثاني عشر في كتاب **تحرير أوقليدس** للطوسي.

5. المؤتمن بن هود (ت. 1085م)

هو أبو عمير بن أحمد بن هود، المعروف بالمؤتمن، ثالث ملوك مملكة بني هود التي حكمت إمارة سرقسطة بين عامي 1039م و1146م. لم يَدُم حكمه سوى أربع سنوات. تبرز أعماله العلمية في كتابه **الاستكمال**. الإثبات الذي يعادل مبرهنة فيثاغورس قدّمه في هذا الكتاب في المبرهنة 22 [7]. وإثباتها كالتالي:

ليكن المثلث ABG، زاويته القائمة A. إذن لدينا $GB^2 = AB^2 + AG^2$.

- نرسم على $[AB]$ المربع AD، وعلى $[AG]$ المربع AZ. إذن H، A، B (على التوالي E، A، G) على استقامة.
- نمدّد $[ZH]$ و $[DE]$ إلى أن يلتقيا عند T من جهة H، E.
- كذلك نمدّد $[ZG]$ و$[DB]$ إلى أن يلتقيا عند K من جهة B، G.
- نعيّن L على (TD)، وM على (TZ) بحيث $BK = TM = DL$. نصل MG، LM، BL.
- إذن $(ZT) // (GE) // (KD)$ و $(ZK) // (BH) // (DT)$. و$ED = BA = KG$ و $GA = HZ$ و BK.
- ومنه $TZ = KD$ و $\angle BKG = \frac{\pi}{2}$، وبالتالي $S_{(KT)}$ مربع. إذن $MZ = LT = BD = KG$.
- و $S_{(GL)}$ مربع مساو لـ BG^2. و$S_{(AK)} = 2\Delta(BGK)$ و $S_{(AK)} + S_{(AT)} = 4\Delta(BGK)$.
- و $\Delta(BGK) + \Delta(BLD) + \Delta(MZG) + \Delta(LTM) = 4\Delta(BGK)$.
- إذن لدينا $S_{(BM)} = S_{(DA)} + S_{(AZ)}$. إذن $GB^2 = AB^2 + AG^2$.



الشكل 8

ملاحظة:

ورد هذا الشكل عند الطوسي في الإثبات السابع عشر، لكن النقطة A لا تقع داخل المربع، كما أن طريقة الإثبات تختلف عمّا قدّمه المؤتمن بن هود، إذ إن هذا الأخير استخدم المتطابقة

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$$

بشكل هندسي، في حين استخدمها الطوسي بشكلها الجبري [7].

6. الطوسي [3]

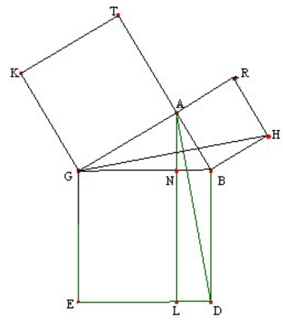
نصير الدين أبو جعفر محمد بن محمد بن الحسن، المعروف بنصير الدين الطوسي، وكان يُلقّب بالمحقق الطوسي، أو خواجه الطوسي، أو خواجه نصير. أصله من سِواح، وهي منطقة تقع في همذان، وُلد طوس بخراسان، أو في

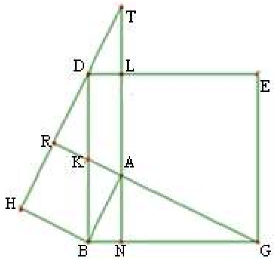
الجبل الواقع في فارس، يوم الأحد 11 جمادى الأول 579هـ، الموافق لـ 17 فيفري 1201م. توفيّ قرب بغداد يوم 18 ذو الحجة 672هـ، الموافق لـ 26 جوان 1274م، أثناء رحلة إليها. ودُفن، حسب وصيته، بجوار مرقد الإمام موسى الكاظم في مسجد الرشيد. كان الطوسي فلكيًا، ورياضيًا، وعالم معادن، وعالم منطق، وفيلسوف، وعالم أخلاق، وعالم دين.

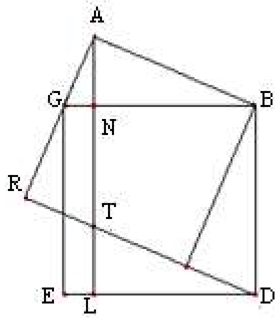
من أشهر مؤلفات الطوسي **تحرير أوقليدس**. ويُقصد بالتحرير عادةً تنقيح الكتاب وتصحيحه من أخطاء النُسّاخ. غير أن تحرير الطوسي تجاوز ذلك إلى تطوير الكتاب وتحديث مصطلحاته. وقد استند فيه الطوسي إلى نسخة الحجاج إصلاح ثابت بن قرة. أنجز الطوسي تحريره لكتاب أُقليدس في نسختين: إحداهما مختصرة، والأخرى مطولة.

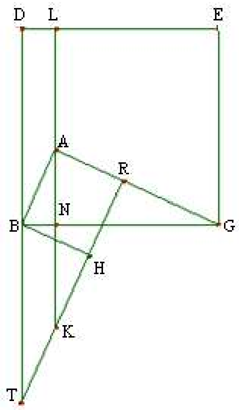
يُطنب نصير الدين الطوسي في عرض البراهين المختلفة لهذه المبرهنة في كتابه، بذكر اختلافات وقوع مربعات عديدة. ويحتوي الجزء المحقق على 18 إثباتًا للمبرهنة، منها ما ذكره علماء قبله ومنها إثباتات لا يُعرف مصدرها. وقد بيّن الطوسي غرضه من ذكر هذا الكم من الإثباتات في قوله: "وإنما أطنبت الكلام بإيراد هذه الأوجه لأنها تفيد التدرب في الصناعة فإن هذه الأوضاع يدور بعضها على بعض ولما رأيت من كثرة إعجاب المبتدئين ببعض ما ظفروا به منها."

1- الإثباتات من 1 إلى 4: الإثبات الأول هو الذي قدّمه أُقليدس في كتاب **الأصول**. أما البراهين من الثاني إلى الرابع، فتقوم على نفس الفكرة، إذ تعتمد على الاستنباط والاستنتاج، كما تستند إلى تساوي المثلثات وتساوي المساحات وذلك باستخدام المبرهنات المقدّمة في المقالة الأولى من كتاب **الأصول**. المربعات مرسومة على أضلاع المثلث بطريقة مباشرة باستخدام المبرهنة 46 من المقالة الأولى من كتاب **الأصول** والتي تنص على: لنا أن نعمل على كل خط مستقيم محدود مربعًا.

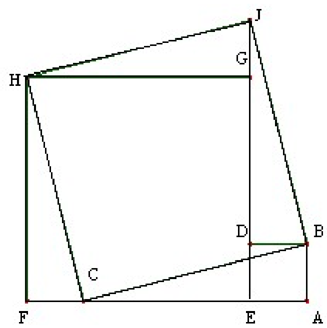


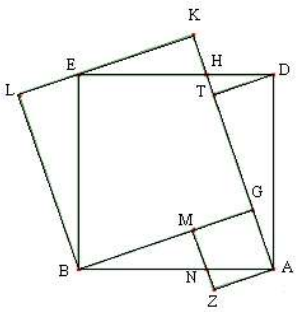


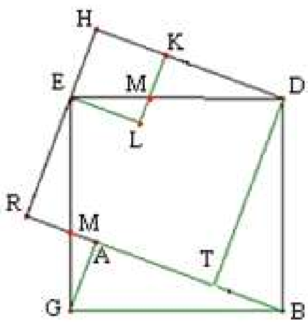


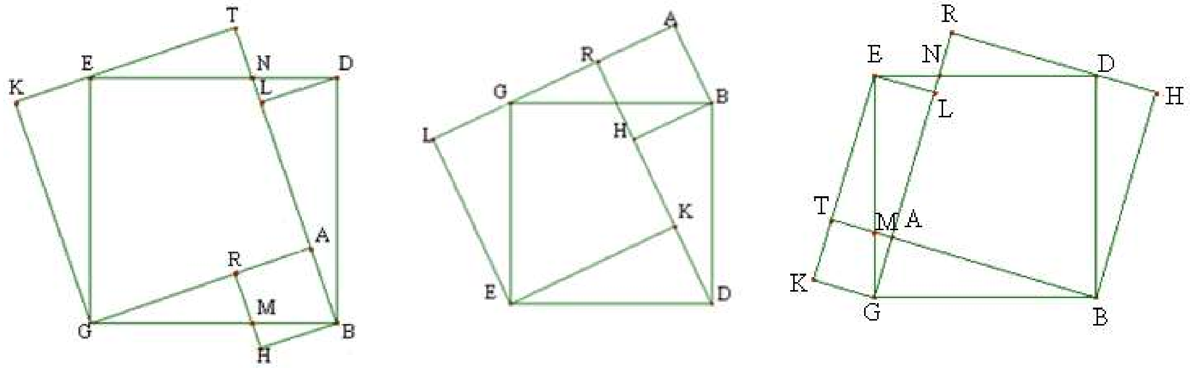


2- الإثباتات من 5 إلى 16: تعتمد على طريقة التحليل والتركيب في إنشاء مربعات أضلاع المثلث، وذلك باستخدام مستقيمات موازية أو عمودية على أحد أضلاع المثلث. مربعات أضلاع المثلث هي مربعات كاملة ليست بالضرورة مرسومة على أضلاع المثلث. ولإثبات تقايس المساحات، استُخدمت طريقة التقطيع واللصق.

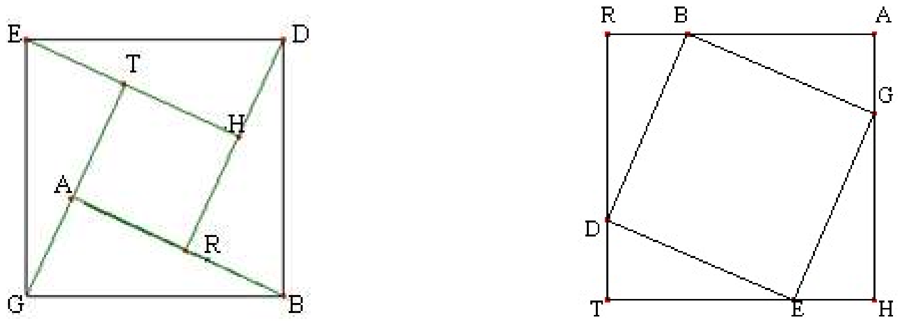








3- الإثباتان 17 و18: مربعَا ضلعي الزاوية القائمة ليسا مرسومين في الشكل، واستُخدمت طريقة جبرية وهندسية في آن واحد لإثبات مبرهنة فيثاغورس.



رابط مقال "مبرهنة فيثاغورس في العالم القديم" https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n14/article14-13.pdf

رابط مقال "مبرهنة فيثاغورس عند اليونان" https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n15/article15-10.pdf

المراجع

[1] روزنفيلد، بوريس أ. و يوشكفيتش، أدولف ب. الهندسة، في موسوعة تاريخ العلوم العربية، ج. 2، إشراف رشدي راشد بمعاونة ريجيس مورلون، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 1997.

[2] سعيدان، أ. س. هندسة أُقليدس في أيد عربية، دار البشير، عمان، 1991.

[3] غرابة، و. مبرهنة فيثاغورس عند نصير الدين الطوسي (ت. 579هـ/ 1274م)، (تحقيق وتحليل)، رسالة دكتوراه، المدرسة العليا للأساتذة، القبة، 2010.

[4] ابن الهيثم، كتاب في حل شكوك كتاب أقليدس في الأصول، معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية، جامعة فرنكفورت، 1985.

[5] ابن النديم، الفهرست، تحقيق إ. رمضان، دار المعرفة، بيروت، 1997.

[6] Fourrey, E. Curiosités géométriques, Vuibert, Paris, 2001.

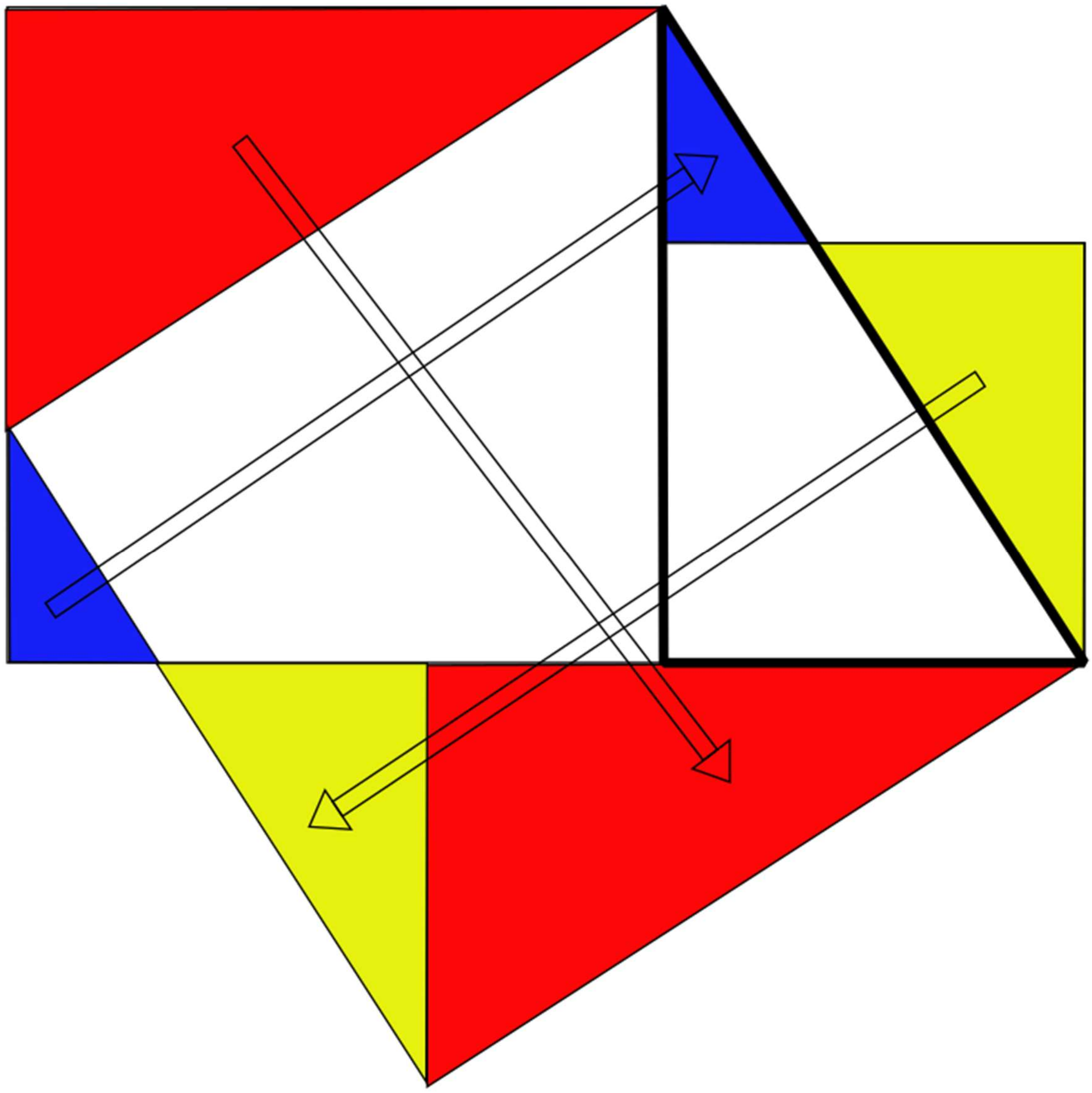
[7] Guergour, Y. La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m.478/1085) : Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb.Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2006.

[8] Guergour, Y. Le roi de Saragosse Al-Mu'taman Ibn Hūd (m.1085) et le théorème de Pythagore : ses sources et ses prolongements, LLULL, 28 , 415-434, 2005.

[9] Katz, V. J. A History of Mathematics: An Introduction, Harper Collins College, New York, 1993.

[10] Lucas, N. H. B., Jones, P. S. and Bedient, J. D. The Hystorical Roots of Elementary Mathematics, Dover, New York, 1988.

[11] Youschkevitch, A. P. Les mathématiques arabes (VIII^{e}-VX^{e} siècles), Vrin, Paris, 1976.



شكل يظهر في أحد الألغاز الرياضية