الرياضيات التعليمية: ما هي الرياضيات التي تُدرَّس؟
الجزء الثاني: مبادئ المنطق الرياضياتي الكلاسيكي

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

هذا المقال مهدى إلى أستاذة الرياضيات السابقة بالمدرسة الأساسية، الطور الثاني، فاطنة داودي.

1. مقدمة

أذكّر في البداية ببتين من الشعر للإمام الشافعي رحمه الله، مفيدين لأي طالب علم:

أخي لن تنال العلم إلا بستةٍ ... سأنبيك عن تفصيلها ببيانِ
ذكاءٌ وحرصٌ واجتهادٌ وبُلغةٌ ... وصحبةُ أستاذٍ وطـولُ زمانِ

تنفق جميع الدول في العالم أموالًا لتدريس الرياضيات لأجيالها الناشئة، وتكمن وراء ذلك بالتأكيد أسباب معينة. ولذلك، يحق للمرء التفكير في أسئلة من قبيل: ما هي الأسباب التي تجعل تدريس الرياضيات مشروعًا مجتمعيًا ضروريًا؟ وما هي الرياضيات التي تُدرّس للناشئة؟ وبالأحرى، ما هي الرياضيات التعليمية؟

فيما يتعلق بالسؤال الأول، يمكن القول عمومًا إن تدريس الرياضيات يستمد مشروعيته المجتمعية من سببين رئيسيين، هما:

أ- تطوير وتنمية المهارات العقلية الاستنباطية لدى الناشئ، وذلك لكون الرياضيات تمثل النموذج الأكثر وضوحًا وحضورًا للتفكر البشري الاستنباطي الضروري لحياة الأفراد ولحياة المجتمع. ويمكن الزعم، دون مبالغة، بأن تعلّم الرياضيات هو تعلّم حِرفة البرهان، أو أيضًا فن البرهان.

ب- الرياضيات علم ضروري لفهم وتطوير واستخدام الكثير من المعارف البشرية، مثل العلوم الدقيقة كالفيزياء والكيمياء، وعلوم المهندسين مثل الإعلام الآلي والإلكترونيك والآلية، وغيرها.

ويجب لفت انتباه مُدرّسي الرياضيات بالمدارس الابتدائية والمتوسطة والثانوية، وحتى في الجامعات، إلى ضرورة وضع الهدف الأول المرجو من تدريس الرياضيات نصب أعينهم، وذلك لكي يعطوا أولًا فرصًا أكبر للشباب الناشئ لتحقيق أهدافه المشروعة في الحياة، وثانيًا، لكي يمنحوا نشاطاتهم التعليمية معان حقيقية جادة وخالية من العبث.

يمكن القول إن الرياضيات التعليمية هي الرياضيات الكانتورية، أي الرياضيات المؤسَّسة على نظرية المجموعات لكانتور (Cantor) وعلى المنطق الرياضي الكلاسيكي. بناءً على هذا، ينبغي على مُدرّسي الرياضيات الجادين الإلمام بالمبادئ الأساسية لهذه النظرية، والاطلاع اطلاعًا كاملًا على المبادئ الأولية للمنطق الكلاسيكي، مثل المعرفة الكاملة بمعاني الروابط المنطقية في إطار هذا المنطق، والمعرفة المقبولة بالمسلمات المنطقية، وبمبادئ الاستنباط الأكثر شهرة واستخدامًا.

حدّد علماء الرياضيات عشر مسلّمات تُؤسِّس لنظرية المجموعات، والمعروفة في أبجديات الرياضيات باسم "مسلّمات زرميلو وفرانكل + مسلّمة الاختيار". ومن جانبهم، اعتمد خبراء التعليم ومؤلّفو كتب الرياضيات هذه المسلّمات كأهداف تعليمية قاعدية في عملية تدريس الرياضيات. وينبغي، كما أُشير إلى ذلك آنفًا، أن يُلّم مدرّسو الرياضيات الجادّون بهذه المسلمات، وربما تكفيهم مبدئيًا معرفة خمس منها، والتي سنتحدث عنها في هذا الجزء. ولمساعدة القارئ الكريم على

الاطلاع عليها سريعًا، نورد اسمها بالإنكليزية: "Zermelo-Fraenkel Axioms + Axiom of choice"، وكثيرًا ما يُشار في الكتب اختصارًا إلى نظرية المجموعات المستخدمة في الرياضيات التعليمية بالاسم ZFC.

من الأمور الأساسية أيضًا أن يعرف مدرس الرياضيات لغة نظرية المجموعات، حتى يصير بمقدوره معرفة طريقة تكوين الصيغ الرياضياتية معرفة كاملة.

لقد أُعدَّ هذا المقال حول الرياضيات التعليمية تحديدًا لتحقق الهدفين المشار إليهما، وبذلك يصير عونًا وسندًا لجميع مُدرّسي الرياضيات في المدارس الثانوية، ولمدرّسي الرياضيات في السنوات الجامعية الأولى.

يعرض المقال لغة نظرية المجموعات، وهي اللغة الرياضياتية العالمية الضرورية لكتابة كل قضايا الرياضيات رمزيًا، والمبادئ الأولية للمنطق الرياضي الكلاسيكي الأولي المعتمَد في تدريس هذه الرياضيات. يُقدّم المقال واحدًا من أبسط نُظم الاستدلال الرياضياتي وأكثرها ألفة واستخدامًا في البراهين الرياضياتية. كما تم تضمينه الطريقة الصحيحة، التي يُفترض أن يتبنّاها مُدرّسو المنطق في إعداد دروسهم، لتعريف الصيغ والمبادئ الصحيحة. إحدى الغايات من هذا التضمين هي تبيان الهدف الحقيقي من تدريس جداول الصحة في برامج المنطق، وهو الهدف الذي لا يُقدّم أيّة خدمة لتعلم حرفة البرهان الرياضياتي، علمًا بأن المنطق أُسّس تحديدًا من أجل ترسيخ هذه الحرفة في الأذهان.

يتبنّى المقال وجهة النظر التي اتفق عليها غالبية علماء الرياضيات في بداية القرن العشرين، وهي عرض هذا العلم في إطار نظرية المجموعات، وبواسطة لغة رياضياتية عالمية هي لغة هذه النظرية. ولا يحتوي على أمور جديدة حول المنطق الرياضياتي الكلاسيكي والرياضيات، وإنما تكمن أهميته في أنه، بحسب المؤلف، لا توجد نصوص عربية تتناول موضوع الرياضيات التعليمية بالطريقة ذاتها، اللهم باستثناء النص المعروض في كتاب "الجبر" للأستاذ الفرنسي روجي غودمان (Roger Godement)، والذي قام الأساتذة مختار عبيد وأبو بكر خالد سعد الله ويوسف عتيق بتعريبه. جميع الكتب المصاغة بالعربية، التي تتناول جانبًا من المنطق الأولي، سواء كانت محلية أو قادمة من مصر أو سوريا، والتي قام المؤلف بمعاينتها، لا تتناول سوى جداول الحقيقة، وهذا يعني أنها لا تتناول المنطق كما ينبغي، وإنما تتناول بالأحرى موضوعًا آخر يتعلق بجبور بول (Boole). وهذا، في نظر المؤلف، أعاق فهم المنطق الأولي على الرغم من بساطته، ومن ثمة أضرّ بعملية تدريس الرياضيات الأولية.

يتضمن المقال أيضًا نصًّا قصيرًا، ولكنه دقيق جدًا، حول الصورنة والرياضيات الصورية، التي طالب هيلبرت (Hilbert) بتأسيسها في بداية القرن العشرين. ويمكن لطلاب فلسفة العلوم استخدامه في مقالاتهم والاستفادة منه ونشره لديهم.

يُعنى الجزء الثاني من هذا المقال بالمبادئ الأولية للمنطق الرياضي الكلاسيكي.

2. المنطق الرياضي الكلاسيكي CML

يُقال إن المنطق هو نظام للحكم والتقييم، وهو نظام لإثبات صفات الحق والصدق والصِّحة والصواب من عدمها. ولا يوجد بطبيعة الحال منطق واحد، كما هو واضح تمامًا من تنوع وثراء الحياة من حولنا. ولعل ما يُسمى بالمنطق التجريبي العادي هو أكثرها وضوحًا واستخدامًا في الحياة العادية للناس. ويُستند في الحكم على صحة المقولات من عدمها في هذا المنطق إلى وصفها لوقائع معينة حدثت بالفعل فيما يدور حولنا.

ويمتلك كل إنسان منطقًا خاصًا به، يُدعى أحيانا بمنطق الفيلسوف، والذي يتكون أساسًا من أخلاط عديدة لطرق حكم وتقييم مرتبطة بالثقافة والعقائد والقناعات الخاصة حول الوجود والحياة والموت وبمستوى التعليم وبيئة النشأة وغيرها. ويظهر هذا المنطق قويًا لدى أناس أكثر من غيرهم، حيث يترك هؤلاء غالبًا تراثا فلسفيًا يكون مؤثرًا بدوره

في القناعات الخاصة للناس. وربما تكون أنواع المنطق الاستنباطي، والتي تبدو في ظاهرها خالية من تأثيرات وقناعات الذات المُفكِّرة، مستخلصة بطرق ما من هذا المنطق.

أول أنواع المنطق الاستنباطي ظهورًا في التاريخ هو المنطق القياسي الأرسطي، الذي أسسه الفيلسوف اليوناني أرسطو (Aristotle). وفي العصر الحديث، وتحديدًا في نهاية القرن التاسع عشر، انطلقت مجددًا عمليات تأسيس فروع المنطق الاستنباطي المحورية في التفكير الاستنباطي. ويُعدّ المنطق الرياضياتي الحديث نموذجها الأكثر حضورًا وشهرة. ويمكن القول، من دون مبالغة، إن النظريات الرياضياتية هي النظم المركزية فيما أصبح يُعرف منذ بداية القرن العشرين بالنظم الاستنباطية المسلماتية، والتي قدّم لها فريجه (Frege) في كتابه "Begriffsschrift" الصادر في عام 1879، نظامًا مُسلَّماتيًا حديثًا للبرهان. ولاحقًا، نُوقشت أنظمة أخرى للبرهنة في الرياضيات في أعمال راسل (Russell)، وبخاصة في كتابه المشهور "أساسيات الرياضيات"، الذي ألّفه بالاشتراك مع وايتهيد (Whitehead) خلال الفترة ما بين 1910 و1913. كل هذه النظم تنتمي إلى عائلة نظم الاستدلال الهيلبرتية، والمعروفة اختصارًا بالاسم HK، في إطار المنطق الرياضياتي الكلاسيكي.

يُعرف المنطق الرياضياتي الكلاسيكي أيضًا باسم المنطق المُكَمَّم الكلاسيكي (Classical Quantificational Logic) (CQL)، وباسم منطق المُسْنَدات الكلاسيكي (Classical Predicate Logic) (CPreL)، وهو المعتمد بصفة رسمية في الرياضيات التعليمية والأكثر استخدامًا في البحوث الرياضياتية. وقد واجه استخدام هذا المنطق في الرياضيات، في بداية القرن العشرين، معارضة شديدة من بعض علماء الرياضيات، مثل راسل وبراور (Brouwer) مؤسس الرياضيات الحدسية، وذلك بسبب قناعات شخصية خاصة بهم. وانتصر له من ناحية أخرى عدد كبير من الرياضاتيين، على رأسهم هيلبرت (Hilbert).

1.2. الصيغ والمبادئ الصحصحية

نذكّر بالمبدأ الآتي، وهو مبدأ مركزي في المنطق الرياضياتي الكلاسيكي:

مبدأ الصحصحة (tautology) الموسعة ليوست (Post). في إطار المنطق الرياضياتي الكلاسيكي، كل صيغة صحصحية هي مسلّمة منطقية، وكل قاعدة استدلال صحصحي هي قاعدة استدلال منطقي.

لكن ما المقصود بالصيغة الصحصحية؟ وما هو الاستدلال الصحصحي؟

تُسمّى مجموعة الدوال $\{0,1\}^{\mathrm{PFor}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})}$ بمجموعة دوال الحقيقة، أو مجموعة تكليفات الحقيقة. إذا كانت $v\colon \mathrm{PFor}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \to \{0,1\}$ دالة حقيقة، فإنه يمكن تمديدها تراجعيًا بطريقة وحيدة إلى المجموعة $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، وذلك بوضع:

$$v(\neg P) = 1 - v(P), v(P \wedge Q) = v(P)v(Q) = \min\{v(P), v(Q)\}$$
$$v(P \vee Q) = \max\{v(P), v(Q)\}, v(P \Rightarrow Q) = \max\{1 - v(P), v(Q)\}$$
$$v(P \Leftrightarrow Q) = \min\{v(P \Rightarrow Q), v(Q \Rightarrow P)\}$$

نقول إن $P \ni \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ صيغة صَحْصَحية أو صيغة بَيِّنَة أو صيغة صحيحة صحصحيًا حسب فيتجنشتاين (Wittgenstein) إذا كان، من أجل كل دالة حقيقة $v\colon \mathrm{PFor}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \to \{0,1\}$، يكون $v(P) = 1$. ونكتب في هذه الحالة $\vDash P$.

من ناحية أخرى، يمكن أن نحدد تراجعيًا جميع الصيغ الأولية الداخلة في كتابة P، ومن ثمة نستطيع كتابة ما يسمى بجدول الحقيقة لـ P. ويمكن التحقق من دون صعوبة من أنه لكي تكون P صيغة صحصحية، يلزم ويكفي أن يظهر الواحد فقط في العمود الأخير في هذا جدول.

نقول إن P خاطئة صحصحيًا إذا كانت $\neg P$ صيغة صحصحية، وفي هذه الحالة يظهر الصفر وحده في العمود الأخير لجدول الحقيقة للصيغة P. ومن الطبيعي أن يُطرح السؤال الآتي: هل يمكن أن توجد صيغة تكون صحيحة وخاطئة صَحْصَحيًا في آنٍ واحد؟ الإجابة هي بالنفي، وذلك لأن افتراض وجود هذا النوع من الصيغ يؤدي إلى الصيغة الخاطئة $1 = 0$. وعلى هذا الأساس نقول إن مجموعة الصيغ الصحصحية خالية من التناقض. وتمنح هذه النتيجة بعض الأمان لعلماء الرياضيات، فهي تؤكد لهم بأنه إذا تم العثور على تناقض ما في الرياضيات، فإنه والحالة هذه لن يكون ناشئًا من المبادئ الصحصحية في حد ذاتها، وإنما قد يكون مصدره استخدام خاطئ لهذه المبادئ أو مبادئ ومسلمات رياضية أخرى.

نقول إن P تستلزم صحصحيًا Q إذا كانت $P \Rightarrow Q$ صيغة صحصحية، ونقول إنهما متكافئتان صحصحيًا إذا كانت $P \Leftrightarrow Q$ صيغة صحصحية.

لتكن Γ مجموعة صيغ رياضياتية. نقول إن P هي نتيجة صحصحية لـ Γ، ونكتب ذلك رمزيا كما يلي $\Gamma \vDash P$، إذا تحقق الشرط التالي: إذا وُجد الواحد في إحدى الخانات بجميع جداول الحقيقة لصيغ Γ، فإنه يوجد بالضرورة في نفس الخانة بجدول الحقيقة للصيغة P. ويقال في هذه الحالة أيضًا إن P قابلة "للاشتقاق أو للاستنباط أو للاستنتاج" صحصحيًا من مجموعة الصيغ Γ. ونسمي $\Gamma \vDash P$ "استدلالًا أو استنباطًا أو استنتاجًا" صحصحيًا. وليس من الصعب الملاحظة بأن الكتابة هي $\emptyset \vDash P$ بالضبط الكتابة $\vDash P$.

في المبرهنة التالية، نعرض بعضًا من أهم الصيغ والاستدلالات الصحصحية، والتي تُستخدم بصورة ضمنية ودون أن يُشار صراحة إلى أسمائها، في جميع البراهين الرياضياتية. ويمكن التأكد من صحتها بواسطة جداول الحقيقة.

مبرهنة 1. من أجل كل $P \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، وكل $Q \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ وكل $R \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، لدينا:

1) $\vDash P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$، تبديلية الرابط $\wedge$؛

2) $\vDash P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$، تبديلية الرابط $\vee$؛

3) $\vDash (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$، تجميعية الرابط $\wedge$؛

4) $\vDash (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$، تجميعية الرابط $\vee$؛

5) $\vDash P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$، توزيعية الرابط $\vee$ على الرابط $\wedge$؛

6) $\vDash P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$، توزيعية الرابط $\wedge$ على الرابط $\vee$؛

7) $\vDash P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ وَ $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$، قانونا مورجان (1847)؛

8) $\vDash P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow \neg Q)$، التعبير عن الرابط $\wedge$ بواسطة الرابطين $\Rightarrow$ وَ $\neg$؛

9) $\vDash P \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$، التعبير عن الرابط $\vee$ بواسطة الرابطين $\Rightarrow$ وَ $\neg$؛

10) $\vDash P \Rightarrow P$، مبدأ الهوية أو مبدأ استلزام الذات؛

11) $\vDash P \vee \neg P$، مبدأ الثالث المرفوع؛

12) $\vDash \neg(P \wedge \neg P)$، مبدأ عدم التناقض؛

13) $\vDash P \Leftrightarrow \neg\neg P$، مبدأ النفي المضاعف؛

14) $\vDash (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$، مبدأ عكس النقيض؛

15) $P, P \Rightarrow Q \vDash Q$، قاعدة القياس الاستثنائي **(MP)**؛

16) $P \Rightarrow Q, \neg Q \vDash \neg P$، القاعدة **MT**؛

17) $P \vee Q, \neg P \vDash Q$، القاعدة **MTP**؛

18) "$\Gamma, P \vDash Q$ إذا، وإذا فقط، $\Gamma \vDash P \Rightarrow Q$"، مبدأ الاستنباط **DP**؛

19) $\vDash \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \big((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big)\big)$، قاعدة السلسلة أو خاصية التعدي للرابط $\Rightarrow$؛

20) $\vDash \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big)\big)$، صيغة فريجه؛

21) $\vDash \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Rightarrow P$، صيغة بيرس (Pierce)؛

22) $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow R \vDash P \Rightarrow Q \wedge R$، مبدأ البرهان بالأجزاء؛

23) إذا كان $\Gamma \vDash P \Rightarrow Q$ وَ$\Gamma \vDash P \Rightarrow R$ وَ$\Gamma \vDash P$، فإن $\Gamma \vDash Q \wedge R$، مبدأ البرهان بالأجزاء؛

24) $P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R \vDash P \vee Q \Rightarrow R$، مبدأ البرهان بالحالات؛

25) إذا كان $\Gamma \vDash P \Rightarrow R$ وَ$\Gamma \vDash Q \Rightarrow R$ وَ$\Gamma \vDash P \vee Q$، فإن $\Gamma \vDash R$، مبدأ البرهان بالحالات، وكحالة خاصة، إذا كان $\Gamma \vDash P \Rightarrow R$ وَ$\Gamma \vDash \neg P \Rightarrow R$، فإن $\Gamma \vDash R$؛

26) $P \Rightarrow R, Q \Rightarrow T \vDash P \vee Q \Rightarrow R \vee T$، مبدأ المأزق البناء؛

27) إذا كان $\Gamma, P \vDash R$ وَ$\Gamma, Q \vDash T$، فإن $\Gamma, P \vee Q \vDash R \vee T$، مبدأ المأزق البناء؛

28) $\vDash (P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$، مبدأ إثبات النفي بالتناقض؛

29) إذا كان $\Gamma, P \vDash Q \wedge \neg Q$، فإن $\Gamma \vDash \neg P$، مبدأ إثبات النفي بالتناقض؛

30) $\vDash (\neg P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow P$ ، مبدأ البرهان بالتناقض؛

31) إذا كان $\Gamma, \neg P \vDash Q \wedge \neg Q$، فإن $\Gamma \vDash P$، مبدأ البرهان بالتناقض؛

32) $\vDash P \wedge \neg P \Rightarrow Q$، مبدأ الحذف الضعيف للنفي أو أيضا مبدأ "Ex Falso Quodlibet"؛

33) إذا كان $\Gamma \vDash P \wedge \neg P$، فإن $\Gamma \vDash Q$، مبدأ "Ex Falso Quodlibet"؛

34) $\vDash \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Leftrightarrow \big(Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big)$، مبدأ تبادل المَحال؛

35) $\vDash \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Leftrightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$، Importation and Exportation؛

36) $P \Rightarrow R \vDash P \wedge Q \Rightarrow R$، مبدأ تقوية السابقة؛

37) $P \Rightarrow R \vDash P \Rightarrow Q \vee R$، مبدأ إضعاف النتيجة؛

38) $P \wedge Q \vDash P$، مبدأ حذف الرابط $\wedge$؛

39) $P, Q \vDash P \wedge Q$، مبدأ إدخال الرابط $\wedge$؛

38) $P \vDash P \vee Q$، مبدأ إدخال الرابط $\vee$؛

39) $\vDash P \Leftrightarrow P \wedge P$، مبدأ خمول الرابط $\wedge$؛

40) $\vDash P \Leftrightarrow P \vee P$، مبدأ خمول الرابط $\vee$؛

41) $\vDash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$، مبدأ تأكيد النتيجة؛

42) $\vDash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$، مبدأ إهمال السابقة؛

43) $P \vee Q, \neg P \vee R \vDash Q \vee R$، مبدأ القص.

2.2. نظام للاستدلال في المنطق الرياضياتي الكلاسيكي

نقدّم فيما يلي، في إطار لغة نظرية المجموعات $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$، أحد "نظم الاستدلال" الأكثر ألفة واستخدامًا في المنطق الرياضياتي الكلاسيكي والمنتمي إلى المجموعة غير المنتهية HK، وهو النظام المكوّن من المسلّمات التالية:

أ) $\Gamma \vDash P$، حيث $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \ni P$ وَ$\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \supseteq \Gamma$؛

ب) $P[x \leftarrow t] \Rightarrow (\exists x)P$ حيث $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \ni P$ وَt حد قابل للتعويض في مكان المتغير x؛

ت) $x = x$؛

ث) $t = s \Rightarrow (P[x \leftarrow t] \Leftrightarrow P[x \leftarrow s])$، حيث $P \ni \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ وَt وَs حدان قابلان للتعويض في مكان x.

ج) $P \Rightarrow Q / (\exists x)P \Rightarrow Q$، حيث $P \ni \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ وَ$Q \ni \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، علمًا أن المتغير x لا يظهر حرًا في الصيغة Q. تدعى $\exists \downarrow$ قاعدة برهان أو استدلال أو استنباط أو استنتاج، ويقال إن الصيغة $(\exists x)P \Rightarrow Q$ قابلة للاشتقاق من الصيغة $P \Rightarrow Q$. ولهذه القاعدة في الحقيقة اسم خاص متواتر في أبجديات المنطق هو "قاعدة إدخال المكمم الوجودي".

نذكّر بأن المسلمة أ) هي بالضبط مبدأ الصحصحة الموسعة لبوست. وسنشير فيما يلي إلى النظام أ) + ب) + ت) + ث) + ج) اختصارًا بـ CML.

لتكن $\Gamma \subseteq \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ مجموعة صيغ معطاة. إن مجموعة الصيغ القابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، والتي نرمز لها بالرمز Thm_Γ، هي أصغر مجموعة صيغ (بالنسبة للاحتواء) في $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ محققة للشروط:

- $\mathrm{Thm}_\Gamma \supseteq \Gamma$؛
- إذا كان $\Gamma \vDash P$، فإن $P \ni \mathrm{Thm}_\Gamma$؛
- Thm_Γ تحتوي على الصيغ الواردة في المسلمات ب) وَت) وَث)؛
- Thm_Γ مستقرة بالنسبة للقاعدة ج)؛ بمعنى أنه إذا كانت $P \Rightarrow Q \ni \mathrm{Thm}_\Gamma$، فإن $(\exists x)P \Rightarrow Q \ni \mathrm{Thm}_\Gamma$، مع العلم أن المتغير x لا يظهر حرًا في الصيغة Q.

يُشار في أغلب كتب المنطق إلى الكتابة الرمزية $P \ni \mathrm{Thm}_\Gamma$ بالكتابة الرمزية $\Gamma \vdash P$، والتي تسمى أحيانًا استدلالًا. ويقال في هذه الحالة بأن P قابلة "للبرهان" أو "الاشتقاق" أو "الاستنباط" أو "الاستنتاج" من Γ. ويمكن، كما هو واضح تمامًا، استبدال الرمز $\vDash$ بالرمز $\vdash$ في جميع العبارات الرمزية الواردة في المبرهنة 1، وتبقى جميعها صحيحة بلا استثناء. ونشير، بالمناسبة، إلى أن أول استخدام للرمز $\vdash$ كان من قِبل فريجه في عام 1879، ثم استُخدم لاحقًا من قِبل كلِيْني (Kleene) في عام 1934، ومن قِبل روسر (Rosser) في عام 1935. ويجدر التنبيه إلى أنه لا ينتمي إلى اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$، وإنما ينتمي إلى لغة المراقب، ويستخدم فقط للدلالة على أن P قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ.

يمكن التأكد، من دون صعوبة، بأنه إذا كانت $\Lambda \supseteq \Gamma$ وَ$\Gamma \vdash P$، فإن $\Lambda \vdash P$. تستبدل الكتابة $\{P_1, \ldots, P_n\} \vdash P$ بالكتابة $P_1, \ldots, P_n \vdash P$ والكتابة $\emptyset \vdash P$ بالكتابة $\vdash P$. وفي الحالة الأخيرة، نقول إن P قابلة للبرهان مطلقًا أو قابلة للبرهان في CML.

لتكن $\Gamma \subseteq \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ مجموعة صيغ معطاة. لدينا ثلاث مجموعات من الصيغ غير المجموعة Thm_Γ؛ اثنتان منهما لا تتعلقان بالمجموعة Γ، وهما:

- مجموعة الصيغ الصحصحية: $\mathrm{Taut} = \{P \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) : \vDash P\}$؛
- مجموعة الصيغ القابلة للبرهان مطلقًا: $\mathrm{Thm}_{\mathrm{CML}} = \{P \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) : \vdash P\}$؛
- مجموعة الصيغ القابلة للاشتقاق صحصحيًا من Γ: $\mathrm{Taut}_\Gamma = \{P \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) : \Gamma \vDash P\}$؛

وليس صعبا الملاحظة بأنه لدينا الاحتواءات التالية:

$$\mathrm{Taut} \subseteq \mathrm{Taut}_\Gamma \subset \mathrm{Thm}_\Gamma, \mathrm{Taut} \subset \mathrm{Thm}_{\mathrm{CML}} \subseteq \mathrm{Thm}_\Gamma$$

يقال إن Γ متسقة أو غير متناقضة إذا كان $\mathrm{Thm}_\Gamma \neq \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$. وفي الحالة الأخرى، يقال إنها غير متسقة أو متناقضة. ولقد ذكرنا سابقًا بأن المجموعة Taut خالية من التناقض. كذلك يُبرهن بأن $\mathrm{Thm}_{\mathrm{CML}} \neq \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$، وعلى هذا الأساس يقال إن CML غير متناقض.

إن $P[x \leftarrow t]$ هي الصيغة الناتجة عن P بتعويض المتغير x بالحد t. ولكي تكون عملية التعويض صحيحة رياضياتيًا يجب التقيد تمامًا بالشرطين التاليين:

- المتغيرات الحرة هي وحدها الحدود القابلة للتعويض، فلا يصح رياضياتيًا تعويض حد لا متغير بحد آخر أو تعويض متغير مقيد بحد؛
- عند تعويض متغير حر x بحد t في صيغة P، ينبغي الانتباه جيدًا إلى أنه لا يجب أن يصير أي متغير وارد في كتابة هذا الحد مُقيَّدا في $P[x \leftarrow t]$ بعد التعويض.

ومن أجل إتاحة فهم أعمق لما ذكر آنفا، نورد هنا بعض الأمثلة. لنعتبر مثلًا الصيغة $(\forall y)(x = y)$. يوجد بهذه الصيغة متغيران؛ أحدهما حر، وهو x، والآخر مقيد بالمكمم العمومي، وهو y. فإذا قمنا (من دون انتباه) بتعويض x بالحد t المساوي للمتغير y في الصيغة المذكورة، فسنحصل مستندين على المسلمة المنطقية ب) على الصيغة

$$(\forall y)(y = y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(x = y).$$

الصيغة الواردة في اليسار صحيحة لأنها بكل بساطة هي الواردة في المسلمة المنطقية ت)، وعليه تعطينا قاعدة الاستدلال MP ما يلي

$$(\exists x)(\forall y)(x = y).$$

ويمكن الملاحظة من دون صعوبة أن هذه الصيغة ليست محققة إلا في المجموعات أحادية العنصر. بيد أن هذا تناقض، لأنه يخالف حقيقة كون المسلمة المنطقية ب) محققة في جميع المجموعات. والسؤال هو: ما الذي أدى بنا إلى الحصول على هذا التناقض؟ والإجابة بكل بساطة أن عملية التعويض التي قمنا بها مخالفة للشرط الثاني؛ إذ أن المتغير المُعوَّض x واقع في نطاق المكمم العمومي، وتم تعويضه بالمتغير y، والذي أصبح مقيدًا بعد عملية التعويض.

لنعتبر الآن الصيغة $(\exists y)(x \neq y)$. يوجد كذلك بهذه الصيغة متغيران؛ أحدهما حر، وهو x، والآخر مقيد بالمكمم الوجودي، وهو y. لنقم (من دون احترام الشرط الثاني) بتعويض المتغير الحر x بالحدين t الذي يساوي x وَs الذي يساوي y في الصيغة المعتبرة، ثم لنستخدم المسلمة المنطقية ث) للحصول ما يلي:

$$x = y \Rightarrow \big((\exists y)(x \neq y) \Leftrightarrow (\exists y)(y \neq y)\big).$$

بما أن المتغير y يظهر حرًا في الصيغة الواقعة على اليسار، فإنه يمكن تعويضه بالحد $x = t$، فنحصل على الصيغة

$$x = x \Rightarrow \big((\exists y)(x \neq y) \Leftrightarrow (\exists y)(y \neq y)\big).$$

الآن تخبرنا المسلمة المنطقية ت) والقاعدة MP أنه لدينا

$$(\exists y)(x \neq y) \Leftrightarrow (\exists y)(y \neq y).$$

وعليه، استنادًا إلى مبدأ عكس النقيض **14** في المبرهنة 1، يأتي

$$(\forall y)(x = y) \Leftrightarrow (\forall y)(y = y).$$

نستخدم مرة أخرى المسلمة المنطقية ت) والقاعدة MP لنحصل على

$$(\forall y)(x = y).$$

بيد أن هذه الصيغة غير محققة إلا في المجموعات أحادية العنصر. وقد حصلنا على هذا التناقض لأننا لم نحترم بكل بساطة الشرط الثاني أثناء إجرائنا لعملية التعويض.

نعلم أن الصيغة $(\forall x)(x \notin \emptyset)$ صحيحة استنادًا إلى تعريف المجموعة الخالية $\emptyset$. فإذا قمنا بتعويض هذه الأخيرة بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، والتي تُنشأ في إطار النظرية ZFC، فسنحصل على الصيغة الخاطئة $(\forall x)(x \notin \mathbb{N})$. وواضح تمامًا سبب الحصول على هذا التناقض، لأن التعويض المُجرى غير صحيح رياضياتيًا كونه يخل بالشرط الأول.

نعطي فيما يلي بعض أشهر الصيغ وقواعد الاستدلال الصحيحة في المنطق CML.

مبرهنة 2. من أجل كل $P \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ وكل $Q \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ وكل $\Gamma \subseteq \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ لدينا:

1) $Q \vdash P \Rightarrow (\forall x)Q$، حيث لا يظهر x حرا في P؛

2) $\vdash P[x \leftarrow t] \Rightarrow (\exists x)P$. وكحالة خاصة، $\vdash P \Rightarrow (\forall x)P$؛

3) $\Gamma \vdash P$ إذا، وإذا فقط، $\Gamma \vdash (\forall x)P$. وكحالة خاصة، $P \vdash (\forall x)P$؛

4) $\vdash (\exists x)P \Leftrightarrow (\exists z)P[x \leftarrow z]$، حيث لا يظهر z حرا ولا مقيدا في $(\exists x)P$؛

5) $\vdash (\forall x)P \Leftrightarrow (\forall z)P[x \leftarrow z]$، حيث لا يظهر z حرا ولا مقيدا في $(\forall x)P$؛

6) إذا كان $\Gamma \vdash P \Rightarrow Q$، فإن $\Gamma, P \vdash Q$، ويكون العكس، المسمى بمبدأ الاستنباط، صحيحا إذا كانت P لا تحوي متغيرات حرة (مغلقة).

7) $P \Rightarrow Q \vdash (\exists x)P \Rightarrow (\exists x)Q$ وَ $P \Rightarrow Q \vdash (\forall x)P \Rightarrow (\forall x)Q$؛

8) تكون Γ غير متسقة (متناقضة) إذا، وإذا فقط وجدت صيغة $P \in \mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set})$ بحيث $\Gamma \vdash P$ وَ $\Gamma \vdash \neg P$؛

9) نفرض أن p صيغة جزئية من P، ولنقم بتعويضها بالصيغة $\mathcal{P}$ في بعض الأماكن التي تظهر فيها في P، فنحصل بذلك على صيغة جديدة $\mathcal{P}$. في هذه الحالة لدينا $P \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash P \Leftrightarrow p$.

البرهان. نقدّم هنا برهانين للقضيتين الأولى والثانية. ويمكن العودة إلى المرجع [11] بخصوص براهين بقية القضايا.

برهانٌ للقضية الأولى؛

1. $P \Rightarrow Q$ (فرضية)
2. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (حسب **1** ومبدأ عكس النقيض)
3. $(\exists x)\neg Q \Rightarrow \neg P$ (حسب **2** والقاعدة جـ))
4. $P \Rightarrow \neg(\exists x)\neg Q$ (حسب **3** ومبدأ عكس النقيض)
5. $P \Rightarrow (\forall x)Q$ (حسب **4** وتعريف المكمم العمومي في CML)
6. $P \Rightarrow Q \vdash P \Rightarrow (\forall x)Q$ (حسب **1** وَ**5**). انتهى البرهان.

برهانٌ للقضية الثانية؛

1. $\neg[x \leftarrow t] \Rightarrow (\exists x)\neg P$ (حسب المسلمة المنطقية ب))
2. $\neg(\exists x)\neg P \Rightarrow P[x \leftarrow t]$ (حسب **1** ومبدأ عكس النقيض)
3. $(\forall x)P \Rightarrow P[x \leftarrow t]$ (حسب **2** وتعريف المكمم العمومي في CML). انتهى البرهان. ■

رابط الجزء الأول من المقال:

مراجع

[1] J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, Studies in Logic, vol. 90, North Holland, 1977.

[2] A. Church, Introduction to Mathematical Logic, vol. 1. Princeton University Press, 1956.

[3] M. Foreman and A. Kanamori, Handbook of Set Theory, Springer, 2010.

[4] H. Herrlich, Axiom of Choice, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.

[5] A. Indrzejczak, Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics, Springer, 2010.

[6] T. Jech, Set Theory, The Third Millenium Edition, revised and expanded, Springer, 2003.

[7] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, North Holland/Van Nostrand, Amsterdam, New York. 1952.

[8] Yu. I. Manin, A Course in Mathematical Logic for Mathematicians, Springer, 2010.

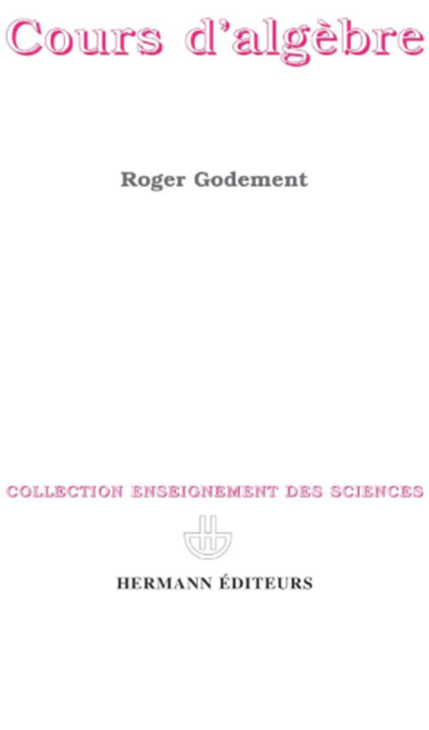
[9] E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015.

[10] J. R. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison-Wesley Pub., 1967.

[11] G. Tourlakis, Lectures in Logic and Set Theory, Vol. 1: Mathematical Logic, Cambridge University Press, 2003.

[12] G. Tourlakis, Lectures in Logic and Set Theory, Vol. 2: Set Theory, Cambridge University Press, 2003.

[13] R. L. Vaught, Set Theory: An Introduction, Birkhäuser, Boston, 1995.



روجي غودمان Roger Godement (1921-2016)