مدخل إلى دراسة البطارية الكمومية باستعمال تماثل التبديل

عزّ الدّين مسيخ
باحث في مركز البحث في تكنولوجيا نصف النواقل للطاقوية
شارع الدكتور فرانز فانون، الجزائر العاصمة، الجزائر
amessikh@yahoo.com

في حالة الجسيمات المتطابقة، لا تتغير المعادلات عند تبادل المتغيرات، وهو ما يساعد على تقليل عدد المتغيرات والحصول على حلول أكثر دقة وبسرعة أعلى. في هذا المقال، سنتطرق إلى مفهوم يُستخدم في تبسيط المعادلات، وهو تناظر التبديل (Permutation Symmetry) الذي يقودنا إلى تبسيط المعادلة الرئيسية في البصريات الكمومية (Master equation)، ومن ثم نطبّقه على نموذج البطارية الكمومية.

فكرة هذا المقال مستمدة من المرجعين [2] و [4]؛ إذ يشرح المرجع الأول تماثل التبديل بشكل مفصل، بينما يعرض الآخر نموذج شحن لبطارية كمومية في خزان حراري.

1. مقدمة

يُعدّ مفهوم الإشعاع الفائق (Superradiance) من المفاهيم المعرّفة في البصريات الكمومية. وقد طُرح هذا المفهوم لأول مرة على يد روبرت هـ. ديكي (Robert H. Dicke) عام 1954، ويُعبّر عن الحالة التي تُصدر فيها مجموعة من الذرات أو الجزيئات المُثارة، عندما تكون متقاربة ومُترابطة، إشعاعًا بمعدل أعلى بكثير من الذرات المُنفردة، وذلك بفضل التأثيرات التعاونية (Collective effects).

إن هذا السلوك الجماعي لهذه المجموعة هو ما يؤدي إلى انبعاث مُعزز ومُتماسك للضوء. وقد توقع ديكي أن شدة الإشعاع المنبعث تتناسب مع مربع عدد الباعثات (Emitters)، وليس بشكل خطي كما هو متوقع من الباعثات المستقلة. عندما يكون عدد الباعثات كبيرًا، يصعب حل معادلة الحركة (Master Equation)، إلا أنّه في حال كانت هذه الباعثات متطابقة، يمكننا استخدام التناظر لتبسيط المسألة، مما يؤدي إلى تقليل عدد المعادلات اللازمة للحل. وعادةً ما يعني التناظر في المعادلات أن بعض التحويلات -مثل التباديل- تُبقي النظام ثابتًا، مما يسمح بالتخلص من درجات الحرية الزائدة وتبسيط العمليات الحسابية. ويُعد هذا الاستعمال شائعًا في الإشعاع الفائق أو البطاريات الكمومية.

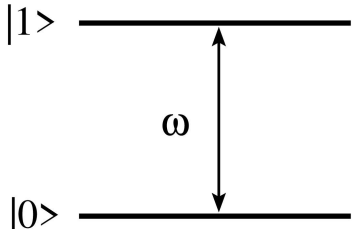
تُعدّ البطارية الكمومية جهازًا يوظّف مبادئ ميكانيكا الكم لتخزين الطاقة والاحتفاظ بها وإطلاقها بكفاءة تفوق كفاءة البطاريات التقليدية. وهي لا تعتمد على التفاعلات الكيميائية أو العمليات الفيزيائية الكلاسيكية، بل تستخدم أنظمة كمومية - مثل الذرات أو الجسيمات الكمومية الأخرى - لتخزين الطاقة في حالاتها الكمومية.

2. الأنظمة ذات المستويين

يُعدّ النظام ثنائي المستوى أو نظام الحالتين (Two-level System) أبسط الأنظمة الكمومية. والحالتان الأساسيتان اللتان يتواجد فيهما هذا الثنائي هما القاعدتان $|0\rangle$ و$|1\rangle$. لذلك تكون الحالة الكمومية النقية (Pure State) $|\psi\rangle$ لهذا الثنائي عبارة عن تركيبة خطية على النحو التالي:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

أما في الحالة الكمومية المختلطة (Mixed State)، فيتم تمثيل أية حالة كمومية بواسطة مصفوفة الكثافة أو مؤثر الكثافة (Density Matrix)، والتي يُرمز إليها عادة بالحرف ρ. في الحالة النقية تكون $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$، أما في الحالة المختلطة، فتكون عبارة عن مصفوفة 2×2 ذات أثر يساوي واحدًا. لمزيد من التوضيح يرجى الرجوع إلى [1].



يُمثّل الشكل أعلاه نظامًا ذا مستويين، حيث يكون الفرق بين ترددي الحالة الأرضية $|0\rangle$ والحالة المثارة $|1\rangle$ مساويًا للتردد ω. يمكن وصف نظام واحد مكون من مستويين بأربع لفات مغزلية (Spin):

$$\sigma_{11} = |1\rangle\langle 1|, \quad \sigma_{00} = |0\rangle\langle 0|$$
$$\sigma_{10} = |1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_{01} = |0\rangle\langle 1|$$

تُحقق هذه اللفات المغزلية خاصية جبر لي (Lie Algebra) التي يرمز لها بـ $su(2)$:

$$[\sigma_{10}, \sigma_{01}] = \sigma_{11} - \sigma_{00}, \quad [\sigma_{10}, \sigma_{11}] = -\sigma_{10}, \quad [\sigma_{01}, \sigma_{11}] = \sigma_{01}.$$

3. تمثيل الأنظمة ذات المستويين

في حالة وجود عدة أنظمة كمومية، نحتاج إلى فضاء هيلبرت يكون بُعده مساويًا جداء الأبعاد المكوّنة له. فعلى سبيل المثال، عندما يكون لدينا نظام واحد فإننا نحتاج إلى بُعدين $|0\rangle$ و$|1\rangle$، أما إذا كان لدينا N نظامًا فإننا نحتاج إلى 2^N:

$$|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle, \quad i_k \in \{0,1\}.$$

ونعرّف اللفات المغزلية الأربعة للمجموعة بالشكل التالي:

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ij}^{k}, \quad i,j \in \{0,1\}.$$

تخضع هذه المؤثرات لعلاقات التبديل ذاتها التي تخضع لها المؤثرات الفردية المقابلة:

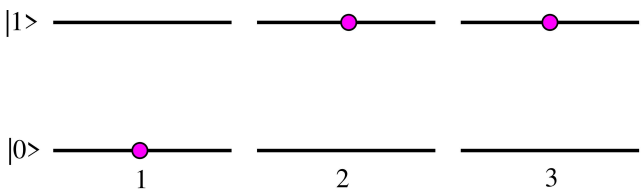
$$[J_{10}, J_{01}] = J_{11} - J_{00}, \quad [J_{10}, J_{11}] = -J_{10}, \quad [J_{01}, J_{11}] = J_{01}.$$

ومع تزايد قيمة العدد N يكبر بُعد فضاء هيلبرت أُسيًا. فعلى سبيل المثال، بُعد فضاء هيلبرت المكون فقط من 30 نظامًا هو عدد كبير: $2^{30} = 1073741824$. عندما تكون الأنظمة ذات المستويين كلها على شاكلة واحدة، حينئذ يمكننا تقليل بُعد فضاء هيلبرت من دالة أسية إلى دالة متعددة الحدود، وهذا ما سنوضحه فيما يلي.

لنبدأ أولًا بثلاثة أنظمة ثنائية المستوى حتى تكون الفكرة واضحة، ثم نعممها إلى عدد كيفي من الأنظمة. في حالة ثلاثة أنظمة، يكون بُعد فضاء هيلبرت يساوي 8. ويمكن كتابتهم بالشكل التالي:

$$\left|\begin{matrix} n \\ \mathbf{u_n} \end{matrix}\right\rangle$$

حيث n هو عدد الأنظمة الموجودة في الحالة $|1\rangle$ و $\mathbf{u_n}$ مجموعة الأنظمة المرافقة لها. فعلى سبيل المثال، الشكل أدناه يرمز إلى الحالة $\left|\begin{matrix} 2 \\ \{2,3\} \end{matrix}\right\rangle$. في هذه الحالة يوجد نظامان في الحالة المثارة: النظام الثاني والنظام الثالث.



إذا كانت الأنظمة متشابهة تمامًا، فلا نفرّق بينهما وتصبح عدد الحالات التي لها نفس العدد n تعطى بعدد التوافيق:

$$C_n^N = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}.$$

لحساب الكميات الفيزيائية التي تُعرف باسم بالملاحظات (Observables)، نستعين بالتعريف التالي. القيمة المتوسطة للملاحظ O تُعطى بالعلاقة:

$$\langle O \rangle = \mathrm{Tr}[O\rho]$$

ولحساب هذه القيمة المتوسطة نحتاج لإيجاد عناصر المصفوفة ρ:

$$\begin{aligned}\langle m, \mathbf{u_m}|\rho|n, \mathbf{u_n}\rangle &= \mathrm{Tr}[|n, \mathbf{u_n}\rangle\langle m, \mathbf{u_m}|\rho] \\ &= \langle |n, \mathbf{u_n}\rangle\langle m, \mathbf{u_m}|\rangle\end{aligned}$$

المصفوفات $|n, \mathbf{u_n}\rangle\langle m, \mathbf{u_m}|$ تُشكّل قاعدة متكاملة في فضاء ليوفيل(Liouville) لمجموعة أنظمة N ثنائية المستوى. وفي الحقيقة توجد $(2^N)^2$ مصفوفة. إذا كانت الجملة التي نحن بصدد دراستها متكونة من أنظمة متشابهة، فمن الأفضل كتابة هذه المصفوفات بالشكل التالي:

$$|n, \mathbf{u_n}\rangle\langle m, \mathbf{u_m}| = \left|\begin{matrix} n_{11}\ n_{10} \\ \mathbf{u_{11}}\ \mathbf{u_{10}} \end{matrix}\right\rangle \left\langle\begin{matrix} n_{11}\ n_{01} \\ \mathbf{u_{11}}\ \mathbf{u_{01}} \end{matrix}\right|$$

حيث

$$n_{11} + n_{10} + n_{01} + n_{00} = N$$
$$\mathbf{u_{11}} \cup \mathbf{u_{10}} \cup \mathbf{u_{01}} \cup \mathbf{u_{00}} = \mathbf{u_N}$$

$$n = n_{11} + n_{10},\ \ m = n_{11} + n_{01}$$

$$\mathbf{u_n} = \mathbf{u_{11}} \cup \mathbf{u_{10}},\ \ \mathbf{u_m} = \mathbf{u_{11}} \cup \mathbf{u_{01}}$$

أي أنّ n_{ij} يُمثّل عدد اللفات المغزلية للمؤثر σ_{ij}. وبما أن N ثابت، فإن عدد الحالات يصبح دالة كثير الحدود من الدرجة الثالثة [5]:

$$\frac{(N+3)!}{3!\,N!} = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3).$$

4. معادلة الحركة الأساسية

عندما نهمل تأثير المحيط على مجموعة من الأنظمة ثنائية المستوى، فإن معادلة الحركة الأساسية تُكتب على النحو التالي [1]:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_0],\quad H_0 = \hbar\omega J_{11}$$

حيث H_0 هاميلتونيان المجموعة المعزولة (Close system) و $\hbar$ هو ثابت بلانك.

أما عندما تكون المجموعة مفتوحة (Open System)، فإننا نضيف إلى المعادلة السابقة تأثير المحيط على المجموعة، فتصبح المعادلة تعطى بحسب الانبعاث التلقائي:

- الانبعاث التلقائي الفردي (Individual Spontaneous Emission)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_0] + \frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{N}(2\sigma_{01}^{i}\rho\sigma_{10}^{i} - \sigma_{11}^{i}\rho - \rho\sigma_{11}^{i}).$$

- الانبعاث التلقائي الجماعي (Collective Spontaneous Emission)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_0] + \frac{\gamma}{2}(2J_{01}\rho J_{10} - J_{10}J_{01}\rho - \rho J_{10}J_{01}),$$

حيث γ هو معامل التخميد (Damping rate).

كما هو واضح من شكل المعادلتين، تظهر مؤثرات على كلّ من يمين ويسار المؤثر ρ. سنوضّح فيما يلي كيفية الحصول على معادلة الحركة لعناصر المصفوفة ρ، ونختار فقط الحد الذي يشمل الهاميلتونيان، أما الحدود الأخرى فسنكتفي بذكر تأثير المؤثرات على يمين ويسار المصفوفة ρ دون برهان.

لنبدأ بالمعادلة الخاصة بـ N نظامًا في الحالة المعزولة:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_0],$$

فنجد

$$\begin{aligned}\langle m, \mathbf{u_m}|\dot{\rho}|n, \mathbf{u_n}\rangle &= i\omega\langle m, \mathbf{u_m}|(\rho J_{11} - J_{11}\rho)|n, \mathbf{u_n}\rangle \\ &= i\omega[\langle m, \mathbf{u_m}|\rho J_{11}|n, \mathbf{u_n}\rangle - \langle m, \mathbf{u_m}|J_{11}\rho|n, \mathbf{u_n}\rangle].\end{aligned}$$

نحتاج لحساب تأثير J_{11} على يمين ويسار المؤثر ρ. وبما أن $J_{11}|n, \mathbf{u_n}\rangle = n|n, \mathbf{u_n}\rangle$، فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\langle m, \mathbf{u_m}|\dot{\rho}|n, \mathbf{u_n}\rangle = i\omega(n - m)\langle m, \mathbf{u_m}|\rho|n, \mathbf{u_n}\rangle$$

أو

$$\langle m, \mathbf{u_m}|\dot{\rho}|n, \mathbf{u_n}\rangle = i\omega(n_{10} - n_{01})\langle m, \mathbf{u_m}|\rho|n, \mathbf{u_n}\rangle$$

في حالة التشابه فإن المعادلة أعلاه لا تتعلق إلا بـ m وn فقط وليس بـ $u_{n,m}$. ولذلك نكتبها بالشكل التالي:

$$\dot{\rho}[n_{11}, n_{10}, n_{01}] = i\omega(n_{10} - n_{01})\rho[n_{11}, n_{10}, n_{01}].$$

فإذا أردنا حساب القيمة المتوسطة لمؤثر ما، فإننا نضطر إلى استخدام عدد التوافيق. وكما هو معلوم، فإن العدد $n!$ يصبح كبيرًا جدًا، وسيعاني حساب القيمة المتوسطة من عدم الاستقرار العددي (Numerical instability)، لذلك من الأفضل تغيير المعادلات بحيث تشمل المتغيرات $\mathcal{P}$ المعرفة كما يلي:

$$\mathcal{P}[n_{11}, n_{10}, n_{01}] = C^{N}_{n_{11},n_{10},n_{01}}\rho[n_{11}, n_{10}, n_{01}],$$

حيث

$$C^{N}_{n_{11},n_{10},n_{01}} = \frac{N!}{n_{11}!\, n_{10}!\, n_{01}!\, n_{00}!}$$

فتصبح المعادلة السابقة

$$\dot{\mathcal{P}}[n_{11}, n_{10}, n_{01}] = i\omega(n_{10} - n_{01})\mathcal{P}[n_{11}, n_{10}, n_{01}],$$

فلا نحتاج بعد ذلك لحساب عاملي الأعداد ونتحصل على قيم مستقرة.

بعد حل المعادلة الأساسية، يمكننا إيجاد القيمة المتوسطة لأي مؤثر. فعلى سبيل المثال، القيمة المتوسطة للمؤثر J_{11} يمكن حسابها بسهولة، إذ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\langle J_{11}\rangle = \sum_{n=0}^{N} n\mathcal{P}[n, 0, 0].$$

الآن، سنكتب دون برهان التأثيرات التي تُحدثها المؤثرات J_{xy} على يمين ويسار المصفوفة ρ وذلك من غير الدخول في تفاصيل الإثبات.

$$J_{xx}\rho \to \sum_k n_{kx}\mathcal{P}[\cdots]$$
$$\rho J_{xx} \to \sum_k n_{xk}\mathcal{P}[\cdots]$$
$$J_{xy}\rho \to \sum_k \Theta[n_{kx}]\,(n_{ky}+1)\mathcal{P}[n_{ky}+1, n_{kx}-1]$$
$$\rho J_{xy} \to \sum_k \Theta\,[n_{yk}](n_{xk}+1)\mathcal{P}[n_{xk}+1, n_{yk}-1]$$

حيث إن الدالة $\Theta[x]$ تأخذ القيمة الصفر عندما $x=0$، وواحدًا في باقي القيم.

5. حساب موضع الحالات

بعد تحديد تأثيرات المؤثرات على كلّ من يمين ويسار مصفوفة الكثافة ρ، يمكننا حساب المصفوفة الكلية $\mathcal{M}$ للجملة، والتي تنتج عن المعادلة التفاضلية الخطية:

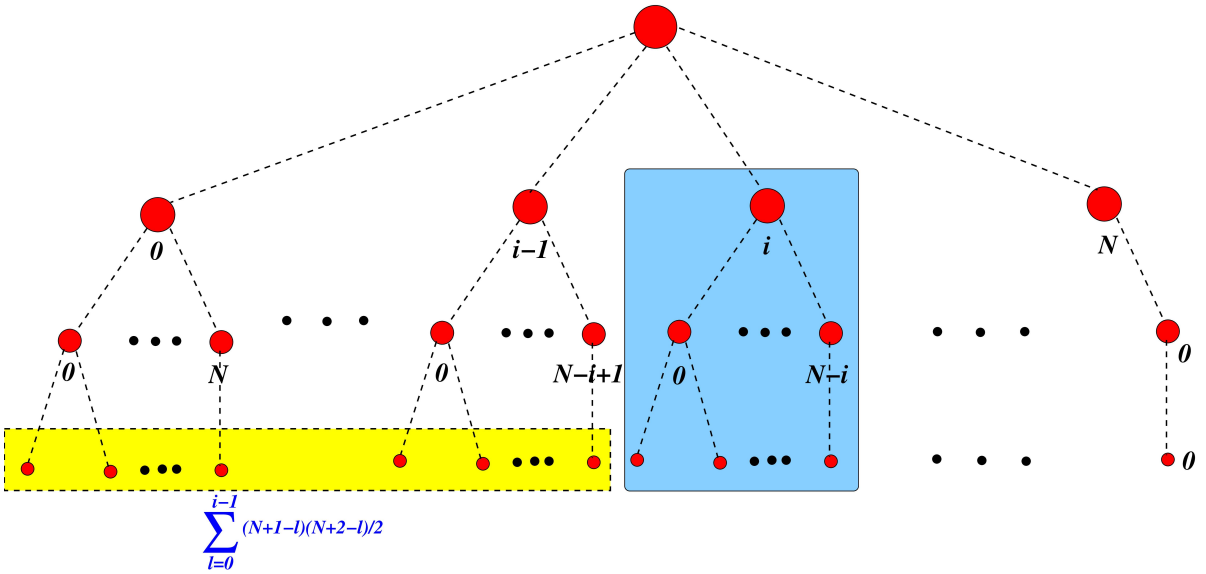
$$\dot{\mathcal{P}}[n_{11}, n_{10}, n_{01}] = \mathcal{M}\mathcal{P}[n_{11}, n_{10}, n_{01}].$$

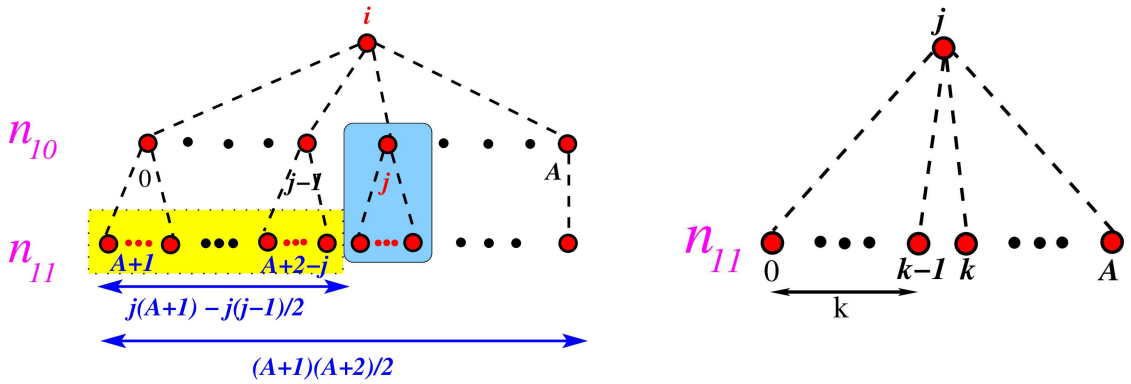
من خلال المعادلات أعلاه، نلاحظ أن هذه التأثيرات إما أنها لا تُغيّر ترتيب المتغيّر $\mathcal{P}$، أو أنها تُغيّر ترتيبه من خلال زيادة واحد في بُعد معيّن وإنقاصه من بُعد آخر. لذلك، نحتاج إلى معرفة موضع أو ترتيب الحالات المعطاة بالأعداد $\{n_{11}, n_{10}, n_{01}\}$. ويمكن تحديد الموضع كما هو مبين في الشكل أدناه.

$$L_1 = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{i-1}(N+1-l)(N+2-l)$$
$$L_2 = j\left[(N-i+1) - \frac{1}{2}(j-1)\right]$$
$$L_3 = k.$$

إذن الموضع يعطى بالعلاقة التالية:

$$d[i,j,k] = L_1 + L_2 + L_3, \quad (i,j,k) = (n_{01}, n_{10}, n_{11})$$





6. شحن بطارية كمومية

نعتبر نظام شحن بطارية كمومية مكوّنًا من نظامين:

- النظام الأول: البطارية الكمومية، وهو مجموعة من أنظمة N_B ثنائية المستوى، بطاقة انتقالية $\hbar\omega$.
- أما النظام الآخر: الشاحن، فيتكون من مجموعة من أنظمة $N_C \geq N_B$ ثنائية المستوى، بنفس الطاقة الانتقالية للبطارية.

كلا النظامين موجودان في خزان حراري. بافتراض أن النظامين والخزان الحراري غير مترابطة في البداية، ووفقًا لتقريب بورن-ماركوف (Born-Markov)، تُعطى المعادلة الرئيسية أثناء الشحن بواسطة معادلة ليندبلاد (Lindblad) [4]:

$$\dot{\rho} = -i\omega[J^z, \rho] + \frac{\gamma}{2}(2J^-\rho J^+ - J^+J^-\rho - \rho J^+J^-).$$

هنا البطارية والشاحن قريبان من بعضهما البعض ويخضعان للانبعاث الجماعي حيث:

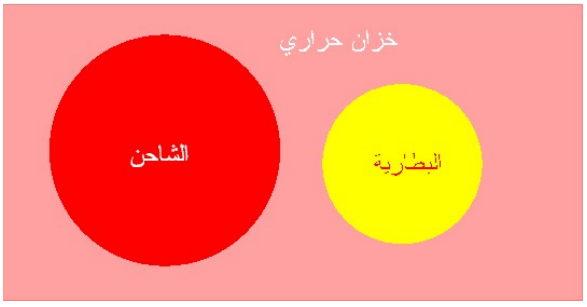
$$J^- = J^B_{01} + J^C_{01}, \quad J^+ = J^B_{10} + J^C_{10}.$$

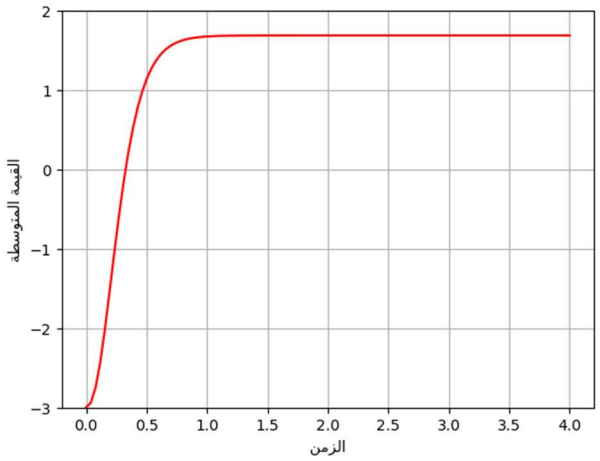
وJ^z هو مجموع مؤثرات مصفوفة باولي (Pauli Matrix σ_z) للنظامين البطارية والشاحن.

ملاحظة: لدينا نوعان من ثنائي المستوى، البطارية والشاحن، لذلك تصبح المتغيرات على الشكل:

$$\mathcal{P}[n^0_{11}, n^0_{10}, n^0_{01}; n^1_{11}, n^1_{10}, n^1_{01}]$$

ويعطى ترتيبها بـ $p = d_0p_1 + p_0$، حيث d_0 هو بُعد نظام البطارية، p_0 وp_1 هما ترتيبا المتغيرات n^0 وn^1 المعطى بالعلاقة $d[i,j,k]$ أعلاه.





الشكل أعلاه يوضّح نموذج البطارية الكمومية والقيمة المتوسطة $\langle J_{11}\rangle - \langle J_{00}\rangle$ بدلالة الزمن. المعلمات المستخدمة هي: عدد أنظمة البطارية $N_B = 3$، وعدد أنظمة الشحن $N_C = 5$. والظروف الأولية هي: البطارية فارغة تمامًا أي في حالتها الأرضية $|0, \phi\rangle$، في حين أن الشاحن في الحالة المثارة $|5, \{1 \dots 5\}\rangle$.

نلاحظ أن القيمة المتوسطة دالة متزايدة بالنسبة للزمن، مما يدل على أن البطارية في طور الشحن. كما يمكن التثبت من أن انتقال الطاقة هذا لا يمكن اعتباره ناتجًا عن انبعاث فوتون من الشاحن يليه امتصاص البطارية له، بل هو تأثير ميكانيكي كمي بحت، ينشأ عن السلوك الجماعي لكل من البطارية والشاحن والخزان.

ملاحظة: في المقال القادم، سوف نشرح بالتفصيل، خطوة بخطوة، حل المعادلة الأساسية وحساب القيم المتوسطة للمؤثرات باستخدام برمجة بايثون (Python)، والبرهان على أن الشحن هو نتيجة السلوك الجماعي.

المراجع

[1] Ficek Z. and Wahiddin M.R. Quantum Optics for Beginners. CRC Press, 2014.

[2] Gegg M. and Richter M. Efficient and exact numerical approach for many multi-level systems in open system CQED. New Journal of Physics. 2016 Apr 26,18(4).

[3] Mandel L. and Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge University Press, 1995

[4] Quach J.Q. and Munro W.J. Using dark states to charge and stabilize open quantum batteries. Physical Review Applied. 2020 Aug 1,14(2).

[5] Rosen K.H. Discrete Mathematics and Its Applications. New York, McGraw-Hill, 1999.