# حركة جسم في علبة

إبراهيم سعد الله
أستاذ (متقاعد) بقسم العلوم الفيزيائية، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
brsadallah@gmail.com

## 1. تمهيد

تهدف هذه المساهمة إلى عرض تطبيق لمسلّمات الكم التي وردت في المقال تاريخ ميكانيكا الكم. والدافع هو أن الجانب النظري مجرد لا تنجلي حقيقته مباشرة، ومن ثمّ فهو يحتاج لتطبيقات تكشفه. لهذا السبب اخترنا مسألة "حركة جسم في علبة" لدراستها من خلال مسلّمات الكم (مبادئ ميكانيكا الكم). ستبين لنا هذه الدراسة بوجه خاص حقيقة الجُزيْء والذرة والنواة وحقائق لا يمكن الوصول إليها إلا من خلال مسلّمات الكم.

قبل الشروع في المسألة، نسرد مسلّمات الكم الأربع ومسلمات بورن (Born) الثلاث التي تحدد معنى الدالة $\psi$.

**المسلّمة الأولى:**

كل كائن فيزيائي $A(\vec{r},\vec{p},t)$ يوافقه مؤثر في فضاء هلبرتي $\mathcal{O}$ يحقق معادلة القيم الذاتية/الخاصة:

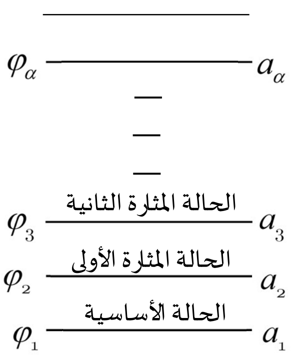
$$\mathcal{O}\varphi_\alpha = a_\alpha \varphi_\alpha \tag{1}$$

حيث $\mathcal{O}$ هو المؤثر الذي يوافق الكائن الفيزيائي؛ حلها هو من الشكل:

$\{a_\alpha\} = a_1$ ، $a_2$ ، ....، $a_\alpha$ ، ... هي أعداد تسمى القيم الذاتية المتاحة للمؤثر $\mathcal{O}$ ، وتشكل طيفه.

$\{\varphi_\alpha\} = \varphi_1$ ، $\varphi_2$ ،...، $\varphi_\alpha$ ، ... هي دوال تسمى الدوال الذاتية للمؤثر $\mathcal{O}$ ، وتشكل الأساس المنبثق عليه.

يفضل البعض عرض حل معادلة القيم الذاتية على الصورة الجانبية، الشكل 1.




الشكل 1: يبين الحالات المتاحة للجملة.

**المسلّمة الثانية:** إذا قمت بقياس للكائن الفيزيائي $A(\vec{r},\vec{p},t)$ لجملة ما، ستشاهد إحدى القيم الذاتية $\{a_\alpha\} = a_1$ ، $a_2$ ، ....، $a_\alpha$ ، ... للمؤثر $\mathcal{O}$ فحسب.

**المسلّمة الثالثة:** تشغل الجملة جميع الحالات المتاحة لها في وقت واحد، باحتمال $|c_1(t)|^2$ للحالة الأساسية، و $|c_2(t)|^2$ للحالة الثانية، و $|c_3(t)|^2$ للحالة الثالثة ...، و $|c_\alpha(t)|^2$ للحالة $\alpha$ ...، حيث

$$\sum_\alpha |c_\alpha(t)|^2 = 1 \tag{2}$$

وحيث الدالة التي تصف حالة الجملة في اللحظة $t$ هي

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1} c_\alpha(t)\varphi_\alpha(\vec{r}) \tag{3}$$

على أن

$$\int d^3r\left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2=1 \qquad (4)$$

وهو أحد مسلمات بورن.

**ملاحظة**: لو كررنا قياس الكائن مرارًا، لحصلنا على جدول يتكون من أعمدة، يُمثّل كلُّ عمود منها نتائج القياس المرتبطة بكل قيمةٍ ذاتية. فما هو مقدار الكائن الفيزيائي إذًا؟ يُعرّف مقدار هذا الكائن بكونه القيمة المتوسطة /المتوقعة لنتائج كل عمود، أي القيمة المتوسطة لكل قيمة ذاتية، وتُعرّف بالعلاقة

$$\left\langle A\right\rangle_{\psi}=\int d^3r\,\psi^*\mathcal{O}\psi \qquad (5)$$

على أن الشرط (4) محقق.

**المسلمة الرابعة**: معادلة الحركة لجملة مؤثر طاقتها $H\left(\vec{r},\vec{p},t\right)$ هي معادلة شرودنجر (Schrödinger)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \qquad (6)$$

هذه معادلة تحققها الدالة $\psi$ التي تصف حالة الجملة.

**مسلّمات بورن (Born)**

**المسلّمة الأولى**: كافة المعلومات عن الجملة التي مؤثر طاقتها $H\left(\vec{r},\vec{p},t\right)$ منطوية في الدالة $\psi\left(\vec{r},t\right)$.

**المسلّمة الثانية**: كثافة احتمال العثور على الجملة عند $\vec{r}$ في اللحظة $t$ هو

$$p\left(\vec{r},t\right)=\left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2\equiv\psi^*\psi \qquad (7)$$

انظر كيف ربط بورن تواجد الجملة في مكان وفي لحظة بالدالة؛ فأجب عن السؤال: أين الجملة الآن؟

**المسلّمة الثالثة**: احتمال العثور على الجملة في $d^3r$ عند $\vec{r}$ حول $\vec{r}$ في اللحظة $t$ هو

$$d^3r\,p\left(\vec{r},t\right)=d^3r\left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2\equiv d^3r\,\psi^*\psi \qquad (8)$$

والإحصاء يقضي بالعلاقة

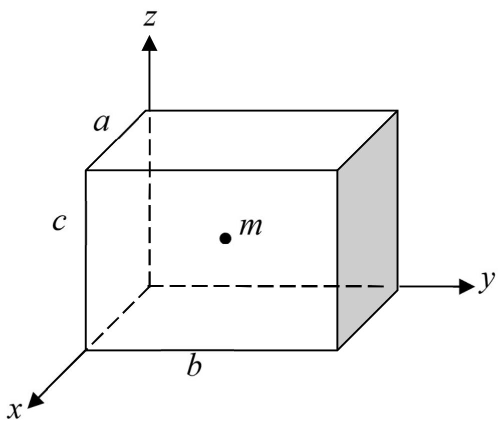
$$\int d^3rp\left(\vec{r},t\right)=\int d^3r\left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2\equiv\int d^3r\psi^*\psi=1 \qquad (9)$$

التكامل يجري في كل الفضاء، تُعبر العلاقة (9) على أن الجملة لابد من أن تكون في مكان ما في الفضاء.

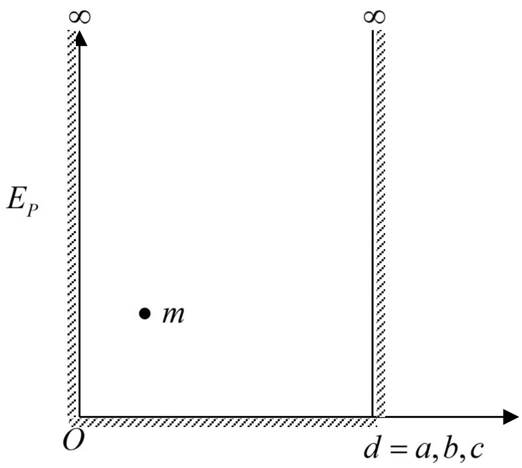
## 2. الشروع في حل المسألة

**تطبيق مسلّمات الكم على مسألة حركة جسم في علبة**:. يُبيّن الشكل 2 علبة متوازية المستطيلات أضلاعها $a$، $b$، $c$ وهي تحتوي الجسم. مسألة حركة جسم في علبة تشبه حركة إلكترون في ذرة ونكليون في نواة وحركة إلكترون في رابطة كيميائية وغيرها. ولهذا نلفت الانتباه إلى أنه سيكون لنتائجها دور مهم في فهم بنية تلك الجمل. يوضّح الشكل 2 معنى حصر الجسم في العلبة، حيث تُشكّل الجدران قوة رادّة هائلة لا يستطيع تجاوزها، في حين تكون طاقة كمون الجسم بين الجدران معدومة. لذلك نقول إن الجسم بين الجدران طليق. وبناءً على المسلّمة الرابعة، فإن الدالة التي تصف حركة جسم تحقق معادلة شرودنجر:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\alpha}=H\psi_{\alpha} \qquad (10)$$




الشكل 2: يبين حركة جسم في علبة.




الشكل 3: يبين طاقة كمون جسم محصور في علبة.

حيث $H = H(\vec{r},\vec{p},t)$ هو مؤثر طاقة الجسم في العلبة، في هذه المسألة مستقل عن الزمن. عندئذ يمكننا فصل متغير الزمن عن متغير الموضع في الدالة $\psi_\alpha$، فنعرضها على الصورة

$$\psi_\alpha(\vec{r},t) = \varphi_\alpha(\vec{r}) f_\alpha(t) \qquad (11)$$

إدخال ذلك في معادلة شرودنجر، يجعلها تأخذ الصورة

$$i\hbar\varphi_\alpha \frac{df_\alpha}{dt} = f_\alpha H\varphi_\alpha \qquad (12)$$

وقسمتها على $\psi_\alpha = \varphi_\alpha f_\alpha$ ينتج العلاقة

$$i\hbar\frac{1}{f_\alpha}\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{1}{\varphi_\alpha}H\varphi_\alpha \qquad (13)$$

يلاحظ أن الطرف الأيسر دالة متعلقة بالزمن فحسب، والطرف الأيمن دالة متعلقة بالموضع فحسب، مهما كان الزمن وموضع الجسم. هذا لا يصح إلا إذا كان الطرفان يساويان نفس الثابت $E_\alpha$، لأن وحدته طاقة. من ثم يصح أن نكتب العلاقة (13) على الصورة

$$i\hbar\frac{1}{f_\alpha}\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{1}{\varphi_\alpha}H\varphi_\alpha = E_\alpha \qquad (14)$$

من ثم المعادلتان

$$i\hbar\frac{df_\alpha}{dt} = E_\alpha f_\alpha \qquad (15)$$

$$H\varphi_\alpha = E_\alpha\varphi_\alpha \qquad (16)$$

المعادلة الثانية ما هي إلا ما نصّت علية المسلّمة الأولى، معادلة القيم الخاصة لمؤثر طاقة الجملة. سنناقشها للتو. أما المعادلة الأولى فحلها هو

$$f_\alpha(t) = f_\alpha(0)e^{-iE_\alpha t/\hbar} \qquad (17)$$

والدالة التي تصف حركة جسم في علبة تصير

$$\psi_\alpha(\vec{r},t) = \varphi_\alpha(\vec{r})\, e^{-iE_\alpha t/\hbar} \qquad (18)$$

نذكر بأن هذه الصورة للدالة نتجت عن عدم تعلق $H$ بالزمن. لذلك الدالة (18) تصف حالة جملة مؤثر طاقتها $H$ مستقل عن الزمن مهما كان شكله.

ما هي صفة الدالة (18) في سياق بورن؟ إذ قال "إن احتمال وجود الجسم عند $\vec{r}$ في $d^3r$ حول $\vec{r}$ في اللحظة $t$ هو

$$d^3r\, p_\alpha(\vec{r},t) = d^3r\left|\psi_\alpha(\vec{r},t)\right|^2 = d^3r\,\psi_\alpha{}^*(\vec{r},t)\psi_\alpha(\vec{r},t) = d^3r\left|\varphi_\alpha(\vec{r})\right|^2 = d^3r\, p_\alpha(\vec{r}) \tag{19}$$

تبين هذه القاعدة جليًا أن احتمال الوجود مستقل عن الزمن. يعني سواءً راقبنا الجسم الآن أو بالأمس أو غدًا، النتيجة واحدة: سنجده يتحرك بالطاقة $E_\alpha$ وتصفه $\varphi_\alpha(\vec{r})$. لهذا السبب سُمّيت الدالة (18)، "دالة تصف الحالات المستقرة". انظر كيف أسبغ الدالة التي صورتها المبينة في العلاقة (18) بالحالات المستقرة. إن الدالة التي تصف حالة إلكترون في ذرة لها نفس السبغة، إذ بينت التجارب أن له طاقات محددة $E_\alpha$.

## 3. البحث عن الدالة الخاصة للمؤثر $H$، $\varphi_\alpha$

يُعتبر الجسم في العلبة طليقًا، (خاليًا من أي تأثير كان، $E_P = 0$)، ويتلقى تأثيرًا عندما يصل الجدار فيرده ($E_P = \infty$ عند الجدران). لذلك نُمثل طاقة كمون الجسم المحصور في العلبة بالتخطيط في الشكل 3. وعليه مؤثر طاقته هو طاقة حركته فقط ما دام في العلبة

$$H = H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{p^2}{2m} + E_P = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} = H_x + H_y + H_z \tag{20}$$

حيث $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$، ... و $H_x = \frac{p_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$. وهكذا دواليك. واعتباره في العلاقة (16)، يفضي للنتيجة

$$(H_x + H_y + H_z)\varphi_\alpha = E_\alpha \varphi_\alpha \tag{21}$$

ما دام مؤثر الطاقة على صورة مجموع فنلتمس الدالة على شكل مضروب (وهي قاعدة)، على الصورة

$$\varphi_\alpha(\vec{r}) = \varphi_\alpha(x,y,z) = \varphi_{\alpha x}(x)\varphi_{\alpha y}(y)\varphi_{\alpha z}(z) \tag{22}$$

إدخال ذلك في العلاقة (22)، يفضي للنتيجة

$$\varphi_{\alpha y}\varphi_{\alpha z}H_x\varphi_{\alpha x} + \varphi_{\alpha x}\varphi_{\alpha z}H_y\varphi_{\alpha y} + \varphi_{\alpha x}\varphi_{\alpha y}H_z\varphi_{\alpha z} = E_\alpha\varphi_{\alpha x}\varphi_{\alpha y}\varphi_{\alpha z} \tag{23}$$

وقسمة العلاقة (23) على الدالة (22) يفضي للعلاقة التالية

$$\frac{H_x\varphi_{\alpha x}}{\varphi_{\alpha x}} + \frac{H_{\alpha y}\varphi_y}{\varphi_{\alpha y}} + \frac{H_z\varphi_{\alpha z}}{\varphi_{\alpha z}} = E_\alpha \tag{24}$$

يمكن ترتيب العلاقة (24) وعرضها على الصورة

$$\frac{H_x\varphi_{\alpha x}}{\varphi_{\alpha x}} = E_\alpha - \frac{H_{\alpha y}\varphi_y}{\varphi_{\alpha y}} - \frac{H_z\varphi_{\alpha z}}{\varphi_{\alpha z}}$$

الطرف الأيمن يتعلق بـ $(y,z)$ والطرف الأيسر يتعلق بـ $x$، وهما متساويان مهما كانت $(x,y,z)$. وهذا لا يتأتى إلا إذا كان الطرفان يساويان ثابتًا، وليكن $E_{\alpha x}$. من ثم

$$\frac{H_x\varphi_{\alpha x}}{\varphi_{\alpha x}} = E_{\alpha x} \text{ ، وبنفس المنطق نجد } \frac{H_y\varphi_{\alpha y}}{\varphi_{\alpha y}} = E_{\alpha y} \text{ و } \frac{H_z\varphi_{\alpha z}}{\varphi_{\alpha z}} = E_{\alpha z} \tag{25}$$

حيث $E_{\alpha x} + E_{\alpha y} + E_{\alpha z} = E_\alpha$. العلاقات (25) تغدو العلاقات

$$H_x\varphi_{\alpha x} = E_{\alpha x}\varphi_{\alpha x} \quad ، \quad H_y\varphi_{\alpha y} = E_{\alpha y}\varphi_{\alpha y} \quad ، \quad H_z\varphi_{\alpha z} = E_{\alpha z}\varphi_{\alpha z} \tag{26}$$

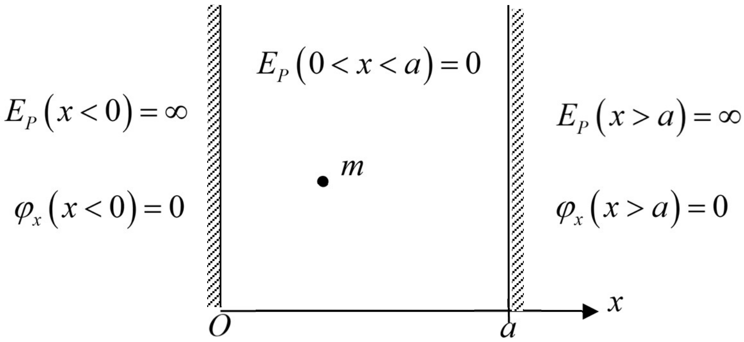
العلاقات (26) ما هي إلا تحليل المعادلة (16) على ثلاثة أبعاد. نكتفي بحل واحدة منها لتشابهها. فنهتم بحل المعادلة وفق $x$، ونكتبها على الصورة

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_{\alpha x}}{dx^2}=E_{\alpha x}\varphi_{\alpha x} \qquad (27)$$

ثم تهيئتها للحل يستدعي وضعها على الصورة

$$\frac{d^2\varphi_{\alpha x}}{dx^2}+k_{\alpha x}^2\varphi_{\alpha x}=0 \qquad (28)$$

حيث العدد الموج وفق $x$ هو $k_{\alpha x}\equiv\sqrt{\frac{2mE_{\alpha x}}{\hbar^2}}$.




الشكل 4: يبين الشروط الحدودية وفق المحور $x$


الشكل 5: يبين رابطة كيميائية.

إن حركة جسم في علبة وفق محور يشبه حرك إلكترون في رابطة كيميائية؛ على سبيل المثال حركة إلكترون بين ذرتي الكربون أحادي الرابطة، كما يبين الشكل 5. للعلم ذرة الكربون أثقل من الإلكترون بـ 22022 مرة. لذلك عندما يتحرك الإلكترون في الرابطة ويصل أحد الذرتين يكون حاله كحال كرة وصلت جدارًا فيردها بنفس طاقة الحركة التي وردت بها، لثقله على مثل ذلك يرتد الإلكترون. فيظل الإلكترون غاديًا وجائيًا بين الذرتين كما يتحرك جسم في علبة على أحد المحاور. نذكر بأن بعد ذرتين في بلورة الكربون هو $1.5\ 10^{-10}$ م. انظر كيف فسرت حركة جسم في علبة رابطة كيميائية، وعلم الروابط في الكيمياء والفيزياء واسع لا حصر له.

الحل العام للمعادلة التفاضلية (28) هو

$$\varphi_{\alpha x}(x)=A\sin k_{\alpha x}x+A\cos k_{\alpha x}x \qquad (29)$$

والشروط الحدودية مبينة على الشكل 4، وهي $\varphi_{\alpha x}(0)=\varphi_{\alpha x}(a)=0$ ، لأن الجسم محصور في العلبة ولا يكون خارجها أبدًا كما أسلفنا الذِكر، من ثم

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha x}(0)&=A\sin k_{\alpha x}0+B\cos k_{\alpha x}0=0\\ \varphi_{\alpha x}(a)&=A\sin k_{\alpha x}a+B\cos k_{\alpha x}a=0\end{aligned} \qquad (30)$$

تفيد المعادلة الأولى من العلاقة (30) أنه يلزم إعدام المعامل $B$ ؛ $B=0$ وتفيد المعادلة الثانية بأن يتحقق الشرط

$$k_x a=\pi n_x \text{ ، حيث } n_x=0\text{، }1\text{، }2\text{،}\ldots \qquad (31)$$

من ثم الأعداد الموجية المتاحة للحركة قيد الدرس هي

$$k_x=\frac{\pi}{a}n_x \qquad (32)$$

وعليه القيم الخاصة المتاحة لـ $H_x$ هي

$$E_{n_x}=\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}=\frac{\hbar^2\pi^2n_x^2}{2ma^2} \qquad (33)$$

والدوال الخاصة لـ $H_x$ الموافقة للقيم الخاصة $E_{n_x}$ هي

$$\varphi_x(x)=\varphi_{n_x}(x)=A\sin k_x x=A\sin\frac{n_x\pi}{a}x \qquad (34)$$

لاحظ أن العدد الموج $k_x$ والدفع الخطي $p_x=\hbar k_x$ وطاقة الجسم $E_x=E_{n_x}=p_x^2/2m$ وطول الموجة $\lambda_x=2\pi/k_x$ كلها صارت مكممة، وتبدو على الصورة:

$$k_x:0,\ \frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a},...,\ \frac{n_x\pi}{a},... \qquad (35)$$

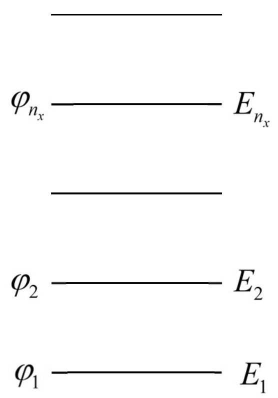
$$\lambda_x:\infty\ ,\ 2a\ ,\ a\ ,\ \frac{2a}{n_x}\ ,\ ... \qquad (36)$$

$$p_x:0,\ \frac{\pi\hbar}{a},\ \frac{2\pi\hbar}{a},\frac{3\pi\hbar}{a},...,\frac{n_x\pi\hbar}{a},... \qquad (37)$$

$$E_{n_x}:0,\ \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\ \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\ \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\ ...,\ \frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},... \qquad (38)$$

$$\varphi_{n_x}:0,\sin\frac{\pi x}{a},\sin\frac{2\pi x}{a},\sin\frac{3\pi x}{a},...,\sin\frac{n_x\pi x}{a},... \qquad (39)$$

يُظهر الشكل 6 الدوال الخاصة $\varphi_{n_x}$ لـ $H_x$ الموافقة لقيمه الخاصة $E_{n_x}$ (وليست دوالًا خاصة لـ $p_x$ أو $k_x$ أو...). أليس ذلك ما نصت عليه المسلّمة الأولى حرفيا؟ بلى، تُعدّ هذه النتيجة شاهدة على صحة المسلّمة الأولى ومنسجمة مع المسلّمة الرابعة.




الشكل 6: يبين طيف $H_x$ ، وقيمه الخاصة

**نتيجة:** العملية التي كممت الكميات الفيزيائية ( $E$ ، $p$ ، $L$ ...) هي عملية حصر الجسم من الجهتين، كما هو الحال في العلاقة (30). هذا دأب كل المسائل.

### 4. نفي الحل الموافقة لـ $n_x=0$

إن الدفع الخطي للجسم وطاقته الموافقتين للحالة $n_x=0$ هما $p_x=0$ و $E_0=0$ . من وجهة نظر المفهوم التقليدي يقول إن حالة الجسم هي السكون، لا حركة له. ومن وجهة نظر المفهوم الكمي (المسلّمات) يقول إن الدالة التي تصف حركة الجسم معدومة.

$$\psi_0(x,t)=\varphi_0(x)e^{-iE_0t/\hbar}=\varphi_0(x)=0 \qquad (40)$$

وحسب بورن احتمال وجود الجسم عند $x$ في $dx$ حول $x$ في اللحظة $t$ هو

$$dx\,p_0(x,t)=dx\left|\psi_0(x,t)\right|^2=dx\left|\varphi_0(x)\right|^2=0 \qquad (41)$$

**قراءتها:** لا أمل في وجود الجسم على المحور $x$ البتة. هذا نفي واضح لوجود الجسم بالطاقة $E_0 = 0$. وعليه الحالة $n_x = 0$ منفية كميًا، لا وجود لها. واضح أن المفهوم الكمي نفى حالة السكون التقليدية. يمكننا اختبار ذلك من خلال علاقة عدم التحديد. فنسألها عن وجود الحالة $n_x = 0$ لجسم في علبة عرضها $a$ ؟ الجواب: ينبغي أن تتحقق العلاقة

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

حيث $\Delta x = a$ لأن الجسم كائن في المجال $[0,a]$ و $\Delta p_x = \frac{n_x \pi \hbar}{a}$. من ثم

$$(a)\left(\frac{n_x \pi \hbar}{a}\right) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{42}$$

، يعني $\pi n_x \geq \frac{1}{2}$ ، $n_x \geq \frac{1}{2\pi} > 0$ ، يعني لا بُدّ من $n_x > 0$ .

ها هي علاقة عدم التحديد نفت وجود الحالة $n_x = 0$ (حالة السكون في المنظور التقليدي) لجسم في علبة. فالجانب النظري في الكم منسجم ويختلف عن التقليد.

## 5. نظم الدالة $\varphi_{n_x}(x)$

إن سياق بورن يقضي بأن تحقق الدوال التي تصف أحوال الجسم $\psi_{n_x}(x,t)$ العلاقة

$$\int dx \left|\psi_{n_x}(x,t)\right|^2 = 1 \tag{43}$$

من ثم

$$\int_0^a dx \left|\varphi_{n_x}(x)\right|^2 = |A|^2 \int_0^a dx\, sin^2\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right) = 1$$

والتحول إلى ضعف الزاوية $2\sin^2 u = 1 - \cos 2u$ ، يؤدي إلى العلاقة

$$\frac{1}{2}|A|^2 \int_0^a dx\;\; 2sin^2\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right) = \frac{1}{2}|A|^2 \int_0^a dx \left(1 - \cos\frac{2\pi n_x x}{a}\right) = 1$$

تكامل دالة جيب التمام هو الجيب، وهو معدوم عند $x = 0$ وعند $x = a$ من ثم

$$\frac{1}{2}|A|^2\, a = 1 \quad ، \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{44}$$

من ثم الدالة الخاصة لـ $H_x$ المنظمة الموافقة لـ $E_{n_x}$ هي

$$\varphi_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi n_x x}{a} \tag{45}$$

## 6. تعامد الأساس المنبثق عن $H_x$ ، $\{\varphi_{n_x}\}$

زعمت المسلّمة الأولى بأن مجموعة الدوال $\{\varphi_{n_x}\}$ متعامدة ومتجانسة وتشكل أساسًا تامًا في فضاء هلبرت $\mathcal{H}$.

لنختبر صحة ذلك. فتعريف الجداء السلمي في فضاء هلبرت للدوال (45) يعطى بالعلاقة

$$\left(\varphi_{n_x}, \varphi_{n'_x}\right) = \int dx\;\; \varphi^*_{n_x} \varphi_{n'_x} \tag{46}$$

من ثم

$$\left(\varphi_{n_x}, \varphi_{n'_x}\right) = \int dx\;\; \varphi^*_{n_x} \varphi_{n'_x} = \frac{2}{a}\int_0^a dx \sin\frac{\pi n_x x}{a} \sin\frac{\pi n'_x x}{a}$$

استخدام العلاقة المثلثية $2\sin u \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v)$ ، يفضي إلى العلاقة

$$\left(\varphi_{n_x},\varphi_{n'_x}\right)=\int dx\,\varphi^*_{n_x}\varphi_{n'_x}=\frac{1}{a}\int_0^a dx\left[\cos\pi\left(n_x-n'_x\right)\frac{x}{a}-\cos\pi\left(n_x+n'_x\right)\frac{x}{a}\right]$$

وإجراء التكامل يقود للعلاقة

$$\int_0^a dx\,\varphi^*_{n_x}\left(x\right)\varphi_{n'_x}\left(x\right)=\frac{1}{a}\left\{\frac{\sin\left(n_x-n_x'\right)\frac{\pi x}{a}}{\left(n_x-n_x'\right)\frac{\pi}{a}}+\frac{\sin\left(n_x+n_x'\right)\frac{\pi x}{a}}{\left(n_x+n_x'\right)\frac{\pi}{a}}\right\}_0^a=\frac{\sin\left(n_x-n_x'\right)\pi}{\left(n_x-n_x'\right)\pi}+\frac{\sin\left(n_x+n_x'\right)\pi}{\left(n_x+n_x'\right)\pi}$$

واضح أنه إذا كان $n_x\neq n'_x$، فإن $\sin\pi\left(n_x\pm n'_x\right)=0$، وبالتالي الجداء السلمي للتابعين $\varphi_{n_x}$ و $\varphi_{n'_x}$ معدوم. وإذا سعى $n_x\leftarrow n'_x$ فإن $\sin\pi\left(n_x+n'_x\right)=0$ و $\sin\pi\left(n_x-n'_x\right)\to\pi\left(n_x-n'_x\right)$. من ثم فإن جداءهما السلمي يساوي واحد.

$$\int_0^a dx\,\varphi^*_{n_x}\left(x\right)\varphi_{n'_x}\left(x\right)=\begin{cases}0\,,\ for\ \ n_x\neq n'_x\\1\,,\ for\ \ n_x=n'_x\end{cases}\qquad(47)$$

بلفظ أخرى

$$\int dx\,\varphi^*_{n_x}\left(x\right)\varphi_{n'_x}\left(x\right)=\delta_{n_x,n'_x}$$

صدقت المسلّمة الأولى، الأساس $\left\{\varphi_{n_x}\right\}$ المنبثق عن مؤثر الطاقة متعامد ومتجانس. لاحظ وجه التشابه بين الأساسين $\left\{\varphi_{n_x}\right\}$ و $\left\{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right\}=\left\{\vec{e}_\alpha\right\}$

$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\delta_{\alpha,\beta}\ \text{، حيث}\ \ \alpha,\beta=x,y,z\qquad(48)$$

## 7. الدوال التي تصف حركة الجسم في العلبة

فالدوال المنظمة التي تصف حركة جسم كتلته $m$ في المجال $\left[0,a\right]$ وفق $x$ هي

$$\psi_{n_x}\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n_x x}{a}e^{-iE_{n_x}t/\hbar}\qquad(49)$$

الموافقة للقيم الخاصة $E_{n_x}=\dfrac{\hbar^2k_x^2}{2m}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n_x^2$

بالمثل الدوال المنظمة التي تصف حركة جسم كتلته $m$ في المجال $\left[0,b\right]$ وفق $y$ هي

$$\psi_{n_y}\left(y,t\right)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi n_y y}{b}e^{-iE_{n_y}t/\hbar}\qquad(50)$$

الموافقة للقيم الخاصة $E_{n_y}=\dfrac{\hbar^2k_y^2}{2m}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2}n_y^2$

بالمثل الدوال المنظمة التي تصف حركة جسم كتلته $m$ في المجال $\left[0,c\right]$ وفق $z$ هي

$$\psi_{n_z}\left(z,t\right)=\sqrt{\frac{2}{c}}\sin\frac{\pi n_z z}{c}e^{-iE_{n_z}t/\hbar}\qquad(51)$$

الموافقة للقيم الخاصة $E_{n_z}=\dfrac{\hbar^2k_z^2}{2m}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mc^2}n_z^2$

من ثم الدالة المنظمة التي تصف حركة الجسم في العلبة هي

$$\psi_{n_xn_yn_z}\left(x,y,z\right)=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi n_z z}{c}\right)e^{-iE_{n_xn_yn_z}t/\hbar}\qquad(52)$$

حيث طاقة الجسم الموافقة

$$E_{n_xn_yn_z}=E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right) \quad (53)$$

## 8. الموجة المنتشرة والو اقفة

استبدل دالة الجيب في العلاقة (49) بالدالة الأس

$$\sin\frac{\pi n_x x}{a}=\sin k_x x\equiv\frac{1}{2i}\left(e^{ik_xx}-e^{-ik_xx}\right)$$

فتغدو العلاقة

$$\psi_{n_x}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}e^{-iE_{n_x}t/\hbar}\sin\frac{n_x\pi x}{a}=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{a}}e^{-iE_{n_x}t/\hbar}\left(e^{ik_xx}-e^{-ik_xx}\right)=\psi_{n_x}^{+}+\psi_{n_x}^{-} \quad (54)$$

حيث $\psi_{n_x}^{+}$ و $\psi_{n_x}^{-}$ هما

$$\psi_{n_x}^{-}=-\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{a}}e^{-i(p_xx+E_xt)/\hbar}=Be^{-i(k_xx+\omega_xt)} \quad ، \quad \psi_{n_x}^{+}=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{a}}e^{i\left(p_xx-E_{n_x}t\right)/\hbar}=Ae^{i(k_xx-\omega_xt)} \quad (55)$$

الدالة $\psi_{n_x}^{+}$ هي دالة خاصة لمؤثر الطاقة $H_x=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2x}$ ولمؤثر الدفع الخطي:

$$\vec{p}=-i\hbar\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

في وقت واحد.

$$H_x\psi_{n_x}^{+}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Ae^{i(k_xx-\omega_xt)}=-\frac{\hbar^2}{2m}(ik_x)^2\psi_{n_x}^{+}=E_{n_x}\psi_{n_x}^{+}$$

$$\vec{p}\psi_{n_x}^{+}=\left(-i\hbar\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)Ae^{i(k_xx-\omega_xt)}=-i\hbar\vec{e}_x(ik_x)\psi_{n_x}^{+}=\hbar k_x\vec{e}_x\psi_{n_x}^{+}$$

فالدالة $\psi_{n_x}^{+}$ تصف حركة جسم ينتشر وفق $x$ بدفع خطي $\hbar k_x\vec{e}_x$ وبطاقة $E_{n_x}$.

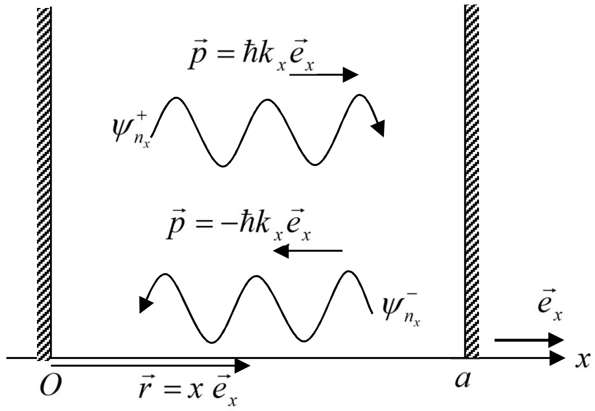
كما أن الدالة $\psi_{n_x}^{-}$ هي دالة خاصة لمؤثر الطاقة $H_x=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2x}$ ولمؤثر الدفع الخطي $\vec{p}$:

$$H_x\psi_{n_x}^{+}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Be^{-i(k_xx+\omega_xt)}=-\frac{\hbar^2}{2m}(-ik_x)^2\psi_{n_x}^{-}=E_{n_x}\psi_{n_x}^{-}$$

$$\vec{p}\psi_{n_x}^{+}=\left(-i\hbar\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)Be^{-i(k_xx+\omega_xt)}=-i\hbar\vec{e}_x(-ik_x)\psi_{n_x}^{-}=-\hbar k_x\vec{e}_x\psi_{n_x}^{-}$$

والدالة $\psi_{n_x}^{-}$ تصف حركة جسم ينتشر وفق $x$ بدفع خطي $-\hbar k_x\vec{e}_x$ وبطاقة $E_{n_x}$. يوضح الشكل 7 الموجة $\psi_{n_x}^{+}$ تنتشر وفق $x$ بدفع خطي في اتجاه الموجب $x$: $\hbar k_x\vec{e}_x$. بينما تنتشر الموجة $\psi_{n_x}^{-}$ وفق $x$ في اتجاه السالب بدفع خطي $-\hbar k_x\vec{e}_x$.
واضح أن الموجتين $\psi_{n_x}^{+}$ و $\psi_{n_x}^{-}$ تنتشران، لكن الموجة $\psi_{n_x}(x)$ ليست دالة خاصة للدفع الخطي، إذًا ليس لها عدد موجي، إذًا هي موجة واقفة.

$$\psi_{n_x}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n_x\pi x}{a}e^{-iE_{n_x}t/\hbar}$$




الشكل7: يبين $\psi_{n_x}^+$ و $\psi_{n_x}^-$، الأولى تنتشر في اتجاه $\vec{e}_x$ والثانية تنتشر عكسه

**مثال:** عيّن الطاقة التي ينبغي أن يتحرك بها إلكترون في علبة عرضها $5.29\ 10^{-11}$ م، وأخرى عرضها $5.29\ 10^{-8}$ م. اعط خلاصة للنتيجة.

**الحل:** معلوم أن طاقة الجسم الذي يشغل الحالة الأساسية في العلبة، ويتحرك وفق $x$ حسب طيف $H_x$ هي

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

إذا كانت $a = a_0 = 5.29\ 10^{-11} m$

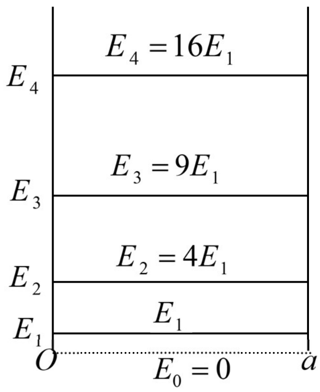
$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2(\hbar c)^2}{2mc^2a^2} = \frac{\pi^2\times(1.98)^2\,10^{-14}}{2\times 511\,10^3\times(5.29)^2\,10^{-22}} = 135.29\ eV$$

وإذا كان عرض العلبة $a = a_0 = 5.29\ 10^{-8} m$، فإن

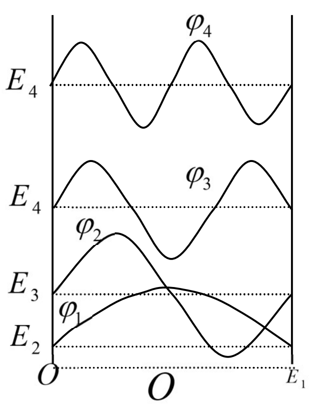
$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2(\hbar c)^2}{2mc^2a^2} = \frac{\pi^2\times(1.98)^2\,10^{-14}}{2\times 511\,10^3\times(5.29)^2\,10^{-16}} = \frac{\pi^2\times(1.98)^2}{20\times 511\times(5.29)^2} = 1.35\ 10^{-4}\ eV$$

يُستفاد من المثال أن الأجسام المحصورة في العلب الضيّقة تحتاج إلى طاقة أعلى من الأجسام المحصورة في العلب الواسعة. على سبيل المثال الإلكترونات في الذرة طاقتها أعلى من الإلكترونات في الجزيء.

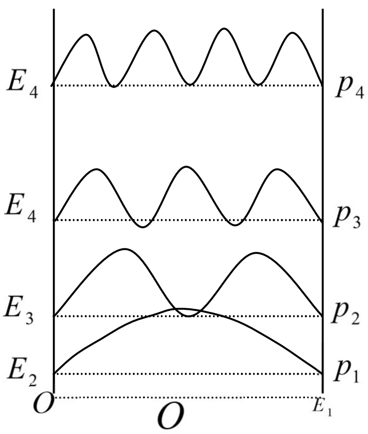
عرضنا في الأشكال 8 و9 و10 بعض القيم الخاصة لـ $H_x$ ومنحنيات بعض دواله الخاصة الموافقة وبعض كثافات احتمال الموافقة.




الشكل8: يبين القيم الخاصة لمؤثر الطاقة $H_x$: $E_1$ و $E_2$ و $E_3$ و $E_4$.




الشكل9: يبين القيم الخاصة لـ $H_x$ والدوال الموافقة $\varphi_1$ و $\varphi_2$ و $\varphi_3$ و $\varphi_4$.




الشكل10: يبين كثافات احتمال وجود الجسم عند $x$، $p_1$ و $p_2$ و $p_3$ و $p_4$.

### 9. حركة جسم في مكعب ضلعه $L$

نود أن نبرز بعض القيم الخاصة والدوال الخاصة الموافقة لمؤثر طاقة الجسم في العلبة $H$. المتمثلة في العلاقتين (52) و (53) مع اعتبار العلبة عبارة عن مكعب ضلعه $a=b=c=L$ لتبسيط المسألة.

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{L^3}}\sin\left(\frac{\pi n_x x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n_y y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n_z z}{L}\right)e^{-iE_{n_x n_y n_z}t/\hbar} \qquad (56)$$

حيث

$$E_{n_x n_y n_z}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2=\mathcal{E}\,n^2 \text{ ، هنا } \mathcal{E}\equiv\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (57)$$

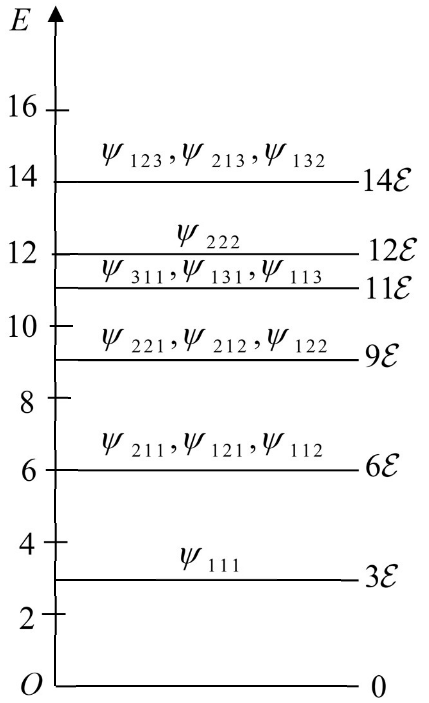
يبين الجدول المرافق القيم الخاصة الأولى لمؤثر الطاقة $H=\left(p^2/2m\right)$ ودواله الخاصة الموافقة (يعني الطاقات المتاحة للجسم في العلبة والدوال الموافقة).

الجدول 1: يبين الطاقات المتاحة لجسم في العلبة والدوال الموافقة.

| درجة انحلال الحالة | الدوال التي تصف الحركة | الطاقة المتاحة | $n_z$ | $n_y$ | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\psi_{111}$ | $E=3\mathcal{E}$ | 1 | 1 | 1 |
| 3 | $\psi_{112}$ | $E=6\mathcal{E}$ | 2 | 1 | 1 |
| | $\psi_{121}$ | | 1 | 2 | 1 |
| | $\psi_{211}$ | | 1 | 1 | 2 |
| 3 | $\psi_{221}$ | $E=9\mathcal{E}$ | 1 | 2 | 2 |
| | $\psi_{212}$ | | 2 | 1 | 2 |
| | $\psi_{122}$ | | 2 | 2 | 1 |
| 1 | $\psi_{222}$ | $E=12\mathcal{E}$ | 2 | 2 | 2 |
| 3 | $\psi_{113}$ | $E=11\mathcal{E}$ | 3 | 1 | 1 |
| | $\psi_{131}$ | | 1 | 3 | 1 |
| | $\psi_{311}$ | | 1 | 1 | 3 |
| 3 | $\psi_{123}$ | $E=14\mathcal{E}$ | 3 | 2 | 1 |
| | $\psi_{312}$ | | 2 | 1 | 3 |
| | $\psi_{231}$ | | 1 | 3 | 2 |

#### الحالات المنحلة

ظهرت في طيف مؤثر طاقة الجسم في العلبة (الجدول 1 والشكل 11) حالات توافق الطاقة الواحدة أكثر من دالة، مثل الطاقة $6\mathcal{E}$ والطاقة $9\mathcal{E}$...، وأخرى توافق طاقة الواحدة دالة واحدة، مثل $3\mathcal{E}$ و $12\mathcal{E}$ ... الحالات التي توافق الطاقة الواحدة أكثر من دالة خاصة تسمى منحلة، ودرجة انحلالها هو عدد الدوال الموافقة. كما يلاحظ أن طاقة جسم في العلبة مكممة، يعني على شكل قيم منفصلة تسمى الطاقات المتاحة لجسم في العلبة. وهي على شكل سويات أو طرائق طاقاتها $3\mathcal{E}$ و $6\mathcal{E}$ و $9\mathcal{E}$... كما أشارت المسلمة الأولى.




الشكل 11: يبين طيف $H$ لجسم في العلبة

**تمرين:**

ناقش آثار أبعاد العلبة على فواصل سويات طيف مؤثر الطاقة. نلفت الانتباه إلى وجه تشابه حصر جسم بعلبة وحصر إلكترون برابطة كيماوية وبحصره بذرة وبحصره بجزيء وحصر نكليون بنواة ...

**الحل:** إن القيمة الخاصة لمؤثر طاقة جسم في علبة مكعبة ضلعها $L$ تعطى بالعلاقة (49).

$$E = E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} \equiv n^2\mathcal{E} \quad \text{،} \quad \text{حيث} \quad n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \tag{57}$$

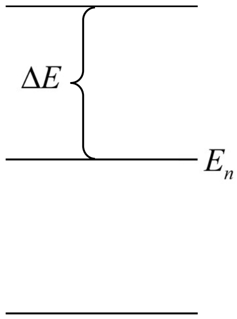
والفاصلة بين سويتين متتاليتين هي

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 (n+1)^2}{2mL^2} - \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} \equiv (n+1)^2\mathcal{E} - n^2\mathcal{E}$$

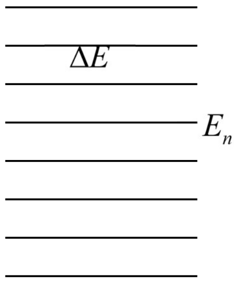
$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (2n+1)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = (2n+1)\mathcal{E} \tag{58}$$

يتضح من العلاقة (58) أن تعلق فاصلة سويتين متتاليتين تتناسب مع مقلوب مربع بعد العلبة. من ثم النتيجة الهامة:

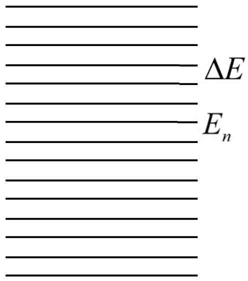
**نتيجة:** فاصلة سويتين متتاليتين من طيف مؤثر طاقة جسم في علبة تتناسب مع مقلوب مربع بعد العلبة. بناء عليه، إذا تغيرت أبعاد العلبة يتغير طيف مؤثر طاقة الجسم، فكلما ضيقت العلبة على الجسم تباعدت سويات مؤثر طاقة الجسم، والعكس صحيح. كما يبدو في الأطياف المبينة في الأشكال 12، 13، 14، 15. أمثال في الطبيعة على ذلك، على الترتيب، نكليون بنواة، وإلكترون برابطة كيماوية، وإلكترون مقيد بذلة، وإلكترون مقيد بجزيء، وذرة بجزيء، وجسم بعلبة أبعادها متفاوتة الكبر...



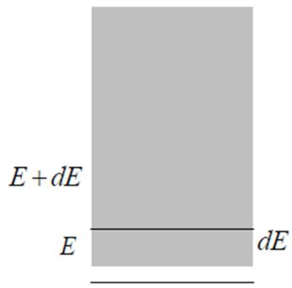

الشكل 13: يبين طيف جسم في علبة ضيقة مثل طيف النواة.




الشكل 14: يبين طيف جسم في علبة معتدل مثل طيف الذرة.




الشكل 15: يبين طيف جسم في علبة عريضة مثل طيف الجزيء.



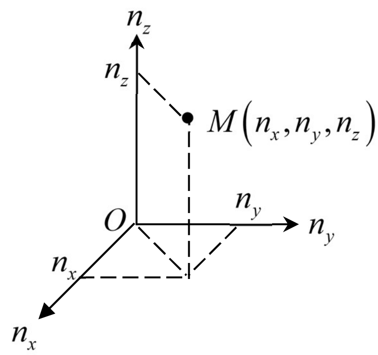

الشكل 16: يبين طيف جسم في علبة عرضها متفاوت الكبر طيف متصل

## 10.عدد الحالات الكمية لوحدة الطاقة

كل ثلاثة أعداد $(n_x,n_y,n_z)$ تحدد قيمة خاصة لـ $H$ والدالة الخاصة التي توافقها $(E_{n_x,n_y,n_z},\varphi_{n_x,n_y,n_z})$. بلفظ آخر تحدد حالة، وتحدد أيضًا نقطة من فضاء إحداثيات نقطة وهي $(n_x,n_y,n_z)$، $M(n_x,n_y,n_z)$، كما يوضح الشكل 16. الفضاء الذي إحداثيات نقطة منه $(n_x,n_y,n_z)$ يسمى فضاء الحالات الكميّة لجملة. كل نقطة منه تمثل حالة للجملة. الأعداد $n_x>0$ و $n_y>0$ و $n_z>0$ هي موجبة.

إن عنصر حجم من فضاء الحالات يمثل عدد الحالات الكمية عند $n=n(n_x,n_y,n_z)$، وهو

$$dN=dn_xdn_ydn_z=d^3n \tag{59}$$




الشكل 17: يبين نقطة من فضاء الحالات الكمية.

وعلم أن $n_x$ و $n_y$ و $n_z$ في المسألة قيد الدرس موجبة، لذلك عنصر الحجم في العلاقة (59) هو عنصر حجم من ثمن فضاء الحالات. وعليه عدد الحالات الكمية في عنصر الحجم من فضاء الحالات هو

$$dN=\frac{1}{8}dn_xdn_ydn_z \tag{60}$$

وعنصر عدد الحالات الكمية المتاحة لجسم في علبة في مقلوب هو

$$dN=\frac{1}{8}dn_xdn_ydn_z=\frac{1}{8}\left(\frac{Ldk_x}{\pi}\right)\left(\frac{Ldk_y}{\pi}\right)\left(\frac{Ldk_z}{\pi}\right)=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3dk_xdk_ydk_z=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3d^3k \tag{61}$$

وعدد الحالات الكمية المتاحة لجسم في علبة بدلالة الإحداثيات الكروية هو

$$dN=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3k=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk d\Omega_k \qquad (62)$$

ومعلوم أن العلاقة بين $k$ وطاقة الجسم هي $E=\left(\hbar^2k^2/2m\right)$، من ثم عدد الحالات الكمية بدلالة طاقة الجسم هي

$$dN=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk d\Omega_k=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{2mE}{\hbar^2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{dE}{2\sqrt{E}}d\Omega_k=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{2\hbar^3}dE d\Omega_k$$

وعدد الحالات الكمية في وحدة الحجم ذات الطاقة $E$ في $dE$، مهما كانت الزوايا هو

$$dN=2\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{\hbar^3}dE \qquad (63)$$

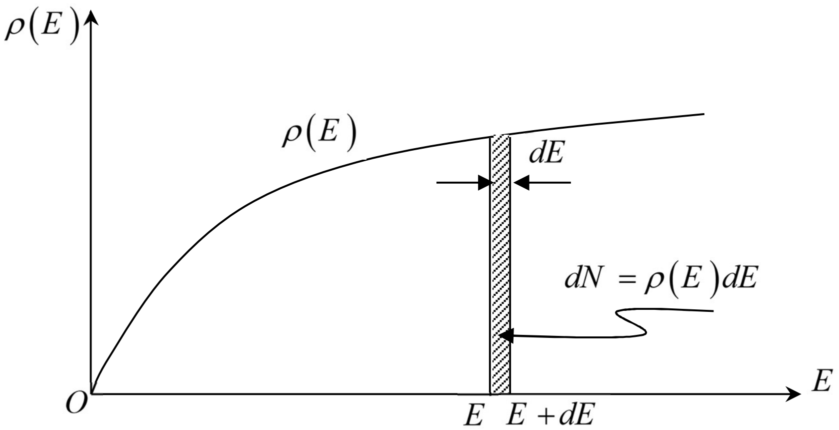
والكثافة الحجمية للحالات الكمية التي طاقتها عند $E$ في $dE$ هي

$$dn=\frac{dN}{V}=2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{\hbar^3}dE=\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{4\pi^2\hbar^3}dE=\rho(E)dE \qquad (64)$$

حيث $\rho(E)$ هي عدد الحالات الكمية لوحدة الحجم ولوحدة الطاقة

$$\rho(E)=\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{4\pi^2\hbar^3}\quad J^{-1}L^{-3} \qquad (65)$$

يبين الشكل 17 منحنى العلاقة (65).




الشكل 17: يبين منحنى كثافة عدد الحالات الكمية لوحدة الطاقة لجسم في العلبة.

وعدد الحالات الكمية لوحدة الحجم التي طاقتها اقل من $E$ هي

$$n(E)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}\int_0^E dE\sqrt{E}=\frac{1}{2\pi^2}\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}\frac{E^{3/2}}{3}=\frac{1}{6\pi^2}\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}E^{3/2} \qquad (66)$$

## 11. طاقة فيرمي

توجد أجسام في الطبيعة تتميز بخاصية كمية تختلف عن الأجسام أخرى. فالإلكترونات والبروتونات والنيوترونات وغيرها، أجسام تتميز عن غيرها بلف يساوي مضاعفات نصف $\hbar$. وتخضع لإحصاء فرمي (Fermi)، فسُمّيت باسمه تخليدًا له. أيضًا تخضع لمبدأ التفرّد لباولي (Pauli) الذي مفاده: "لا يتبوأ فرميين متماثلين حالة كمية واحدة أبدًا".
اعتبر غازًا عدد أجسامه $N$ من فئة الفرميات، على سبيل المثال غازًا إلكترونيًا، ثم نملأ به الحالات الكمية لجسم في علبة. ننبّه إلى أن كل حالة جسم في علبة طاقتها $E_{n_x,n_y,n_z}$ يمكن أن يتبوأها إلكترونان لا غير، أحدهما لفه إلى الأعلى،

$(\uparrow)$، والأخر لفه إلى الأسفل، $(\downarrow)$. لذلك عدد الحالات الكمية التي سيشغلها الغاز الإلكتروني هو $\frac{1}{2}N$، فارضين أن $N$ زوجي.

اصطلح على تسمية طاقة أعلى حالة مشغولة من حالة جسم في العلبة بطاقة فرمي للغاز $E_F$. فاعتمادًا على العلاقة (66)، عبارة طاقة فيرمي بدلالة عدد أجسام الغاز $N$ هي

$$\frac{N}{2L^3}=\frac{1}{6\pi^2}\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}E_F^{3/2}$$

من ثم طاقة فرمي للغاز تعطى بالعلاقة

$$E_F=\frac{\hbar^2\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}{2m} \tag{67}$$

واضح أن العدد الموجي لفرمي هو

$$k_F=\left(3\pi^2 n\right)^{1/3} \tag{68}$$

والدفع الخطي لفيرمي للغاز هو

$$p_F=\hbar k_F=\hbar\left(3\pi^2 n\right)^{1/3} \tag{69}$$

فتكتب طاقة فرمي للغاز بدلالة $k_F$ و $p_F$ على الصورة

$$E_F=\frac{\hbar^2\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}{2m_e}=\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}=\frac{p_F^2}{2m_e} \tag{70}$$

## 12. نظم الموجة المستوية بالعلبة

توجد أمواج تصف جملًا فيزيائية وعصية عن النظم. أحد هذه الأمواج الموجة المستوية

$$\psi(\vec{r},t)=\varphi_{\vec{k}}(\vec{r})e^{-iE_k t/\hbar}=Ce^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \tag{71}$$

تصف حركة جسم طليق، حيث $C$ ثابت نظْم، ولا يتعين إلا بالنظْم. فنظمها من المفروض يساوي واحد كي تحمل في طياتها صفة الاحتمال، لكن العكس هو الذي يحدث

$$\int d^3r\,\psi^*\psi=\int d^3r\,\varphi_{\vec{k}}^*\varphi_{\vec{k}}=|C|^2\int d^3r\;=|C|^2(\infty)$$

واضح أنها عصية عن النظم. بذلك لم نتمكن من إعطائها صبغة الإحصاء.

حل هذه القضية هو اعتبار الجملة الفيزيائية قيد الدرس موجودة في علبة كيفما اتفق. ثم تطبيق الشروط الحدودية على الأمواج عند حدودها. من ثم يمكن نظمها إلى الوحدة لإعطائها الصبغة الإحصاء على النحو

$$\int_V d^3r\,\psi^*\psi=1$$

حيث $V$ حجم العلبة. هناك ضرورة لفرض الشروط الحدودية عند جدران العلبة. وهناك أكثر من أسلوب لتطبيق الشروط الحدودية، والأكثر استخدامًا هي المسماة بالشروط الحدودية الدورية. وهي تساوي الدالة عند الوجوه المتقابلة للعلبة

$$\varphi_{n_x}(x)=\varphi_{n_x}(x+L_x)\quad ،\quad \varphi_{n_y}(y)=\varphi_{n_y}(y+L_y)\quad ،\quad \varphi_{n_z}(z)=\varphi_{n_z}(z+L_z)$$

عندئذ، العلاقات التالية محققة

$$\varphi_{k_x}(x)=e^{ik_x x} \text{ ، } k_{n_x}=\frac{2\pi}{L_x}n_x \text{ حيث } n_x=0 \text{ ، } \pm1 \text{ ، } \pm2 \text{ ، } \dots$$

$$\varphi_{k_y}(y)=e^{ik_y y} \text{ ، } k_{n_y}=\frac{2\pi}{L_y}n_y \text{ حيث } n_y=0 \text{ ، } \pm1 \text{ ، } \pm2 \text{ ، } \dots \qquad (72)$$

$$\varphi_{k_z}(z)=e^{ik_z z} \text{ ، } k_{n_z}=\frac{2\pi}{L_z}n_z \text{ حيث } n_z=0 \text{ ، } \pm1 \text{ ، } \pm2 \text{ ، } \dots$$

**تمرين:** نظم الموجة المستوية في علبة مكعبة الشكل

$$\int d^2r\, \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{r})\varphi_{\vec{k}}(\vec{r})=|C|^2\int_{-L/2}^{+L/2}dx\, \varphi_{k_x}^*(x)\varphi_{k_x}(x)\int_{-L/2}^{+L/2}dy\, \varphi_{k_y}^*(y)\varphi_{k_y}(y)\int_{-L/2}^{+L/2}dz\, \varphi_{k_z}^*(z)\varphi_{k_z}(z)=|C|^2L^3=1$$

من ثم الدوال الخاصة لمؤثر طاقة جسم طليق في علبة مكعبة الشكل هي

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r})=\frac{1}{L^{3/2}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (73)$$

هذه دالة معروفة وتستخدم في مجالات عديدة.

*****