دراسة مختصرة حول الاشتقاق كسري الرتبة من نمط ريمان – ليوفيل

عبد الرشيد سعدي
أستاذ بالمدرسة الوطنية العليا في الرياضيات، الجزائر
abderachid.saadi@nhsm.edu.dz

1. تمهيد

أصل تسمية "المشتق كسري الرتبة" يعود إلى السؤال التاريخي الذي طرحه لوبيتال (l'Hôpital) على لايبنتز (Leibniz)، والذي يدور حول إمكانية تعميم الاشتقاق من الرتب الصحيحة إلى الرتب غير الصحيحة، وطرح الرتبة ½ على سبيل المثال، ثم صاغه أويلر (Euler) بنصٍ صريح على الرتبة الكسرية. لكن الأبحاث توالت، وتم تعميم الاشتقاق إلى رتب غير كسرية، بل امتد ذلك إلى رتب عقدية ورتب تابعية. ومع ذلك، بقي محتفظًا بالاسم التاريخي، وهو أمر دأب عليه الرياضياتيون في تسمية المفاهيم بما اشتهرت به أول الأمر، وإن كانت لا تعبّر عنها في السياق المعاصر، مثل تسمية العدد i بالعدد التخيلي، لأنه حين اقتُرح أول مرة لم يكن يعبّر عن معنى مألوف، ومثل ذلك العلاقة المسماة بعلاقة فيثاغورس (Pythagoras)، ونحوها من المفاهيم والعلاقات.

إن مفهوم الاشتقاق كسري الرتبة، بهذا الاعتبار، مفهوم قديم، لكن بالنظر إلى تباطؤ الأبحاث فيه منذ طرح السؤال إلى الربع الأخير من القرن الماضي، فإنه يُعتبر موضوعًا حديثًا، بل صار من أكثر المفاهيم التي تُنشر الأبحاث فيها في الوقت الراهن، فلا تكاد تُحصى الأعمال المنشورة والملتقيات المخصصة، ناهيك عن مذكرات التخرج وأطروحات الدكتوراه.

ومع ذلك، فهناك من لم يقتنع بهذا المفهوم، أو ربما لم يقتنع بالتسمية. بل إن بعضهم إذا ذكرت له أنك تشتغل في أبحاثك على المشتقات كسرية الرتبة، ينظر إليك في أسًى نظرة الأستاذ إلى طالب بائس، وبعضهم يلوي شدقه مغمغمًا بعبارات من نحو: "اختاروا السهولة، تبعوا التيار ...". حتى إنه في أحد المقالات وردت العبارة التالية: "بل إن بعض الباحثين يشككون في أي من هذه التعريفات يمكن اعتباره مشتقًا كسريًا حقيقيًا". طبعًا لا يمكن قبول هذه الانتقادات هكذا على عواهنها ما لم تكن مؤيّدة بالحجج اللازمة التي لا يكاد يختلف فيها الرياضياتيون.

ومع أنه لا ينبغي الاستشهاد بالكثرة على الصحة، إلا أن القبول العام للأبحاث في هذا الميدان، وفي مجلات محكمة، ومنها ما له سمعةٌ وصيت، يجعلنا نطمئن إلى أن الأسس التي قام عليها هذا العلم ليست هشة. كيف لا، وفيها إسهامات رياضياتيين كبار مثل: لاكروا (Lacroix)، وَفورييه (Fourier)، وَليوفيل (Liouville)، وَريمان (Riemann)، وَهادامارد (Hadamard)، وغيرهم. بل إن جمعية الرياضيات الأمريكية (AMS) قد حجزت له جملة من الرموز الدالة على اختصاصات دقيقة:

- 26A33: الاشتقاقات والتكاملات كسرية الرتبة.
- 34A08: المعادلات التفاضلية والاحتواءات كسرية الرتبة.
- 34K37: المعادلات التفاضلية الدالية كسرية الرتبة.
- 35R11: المعادلات ذات المشتقات الجزئية كسرية الرتبة.
- 44-XX: التحويلات التكاملية الموجهة للاشتقاقات كسرية الرتبة.
- 74S40: تطبيقات الحساب كسري الرتبة على ميكانيك الأجسام الصلبة.
- 60G22: المتغيرات العشوائية الكسرية، وتشمل الحركات البراونية الكسرية.

كما أننا نجد جملة من المجلات المتخصصة فيه، مثل:

- مجلة *Fractional Calculus & Applied Analysis* المصنفة ضمن قاعدة بيانات Scopus وClarivate.
- مجلة *Fractal and Fractional* المصنفة ضمن قاعدة بيانات Clarivate.
- مجلة *Progress in Fractional Differentiation and Applications* المصنفة ضمن قاعدة بيانات Scopus.
- مجلة *Fractional Differential Calculus* المصنفة ضمن قاعدة بيانات Scopus.

فضلًا عن المجلات التي تقبل الأبحاث في هذا المجال، وهي كثيرة لا يمكن إحصاؤها، ومنها ما هو مصنّف تصنيفات مرموقة.

2. مقاربة ريمان - ليوفيل

رغم تعدّد تعاريف المشتقات كسرية الرتبة، إلا أن أشهر مقاربة تم العمل عليها هي مقاربة ريمان–ليوفيل ومقاربة رايز (Riesz potential). فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن ما قام هادامارد ومن بعده من تعميم إلى تكاملات ذات دوال ثقالية يمكن ضمه في مقاربة واحدة نسميها "مقاربة من نمط ريمان–ليوفيل"، فإنه حينئذ تصير هذه المقاربة مسيطرة على حصة الأسد من الأبحاث التي تم نشرها خلال ربع القرن الأخير.

تقوم مقاربة ريمان–ليوفيل على تعميم الخاصية التالية المحققة من أجل عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt \end{aligned}$$

حيث يتم تعويض العدد الطبيعي n بعدد مركب α جزؤه الحقيقي موجب تمامًا، لنحصل في الأخير على المشتق من اليسار ومن اليمين:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha,RL} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \\ D_{b-}^{\alpha,RL} f(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}f(t)dt. \end{aligned}$$

يرمز $(n-1)$ إلى الجزء الصحيح لـ $\mathrm{Re}\,\alpha$، بينما يرمز a وb إلى طرفي المجال المراد الاشتقاق عليه (والذي قد يكون $-\infty$ أو $+\infty$). وتسمى هذه المقاربة بمقاربة ليوفيل.

يُعتبر الفضاء $L^p(a,b)$، حيث $p>1$، هو الفضاء الأمثل لتطبيق مؤثر تكامل ريمان–ليوفيل. أما عند تطبيق مؤثر اشتقاق ريمان–ليوفيل، فنحتاج إلى فضاء الدوال القابلة للاشتقاق n مرة، بحيث يكون مشتقها النوني منتميًا للفضاء $L^p(a,b)$، وهو ما نُعبّر عنه اختصارًا بالفضاء $AC^{n,p}(a,b)$ (يُعتبر فضاء الدوال المستمرة مطلقًا $AC^{1,p}(a,b)=AC^p(a,b)$ حالة خاصة من هذه الفضاءات).

كما يمكن بناء مقاربات مستخرجة من هاتين المقاربتين، باعتماد دالة ثقل موجبة، تكون مشتقة لدالة ψ على المجال (a,b)، فنحصل على التعاريف التالية:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha,\psi} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{(n)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}f(t)\psi'(t)dt, \\ D_{b-}^{\alpha,\psi} f(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{(n)}\int_x^b (\psi(t)-\psi(x))^{n-\alpha-1}f(t)\psi'(t)dt. \end{aligned}$$

تُعد مقاربتا هادامارد وكاتيغامبولا (Katugampola) حالتين خاصتين من هذه المقاربة:

- في الأولى نفترض أن $\psi = ln$،
- أما في الثانية، فنضع $\psi = \frac{x^{\rho}}{\rho}$، حيث ρ عدد حقيقي موجب تمامًا.

ومما يجدر التنبيه إليه أن كثيرًا من الباحثين صاروا يتفنّنون في استخراج تعاريف جديدة للمشتقات كسرية الرتبة، وإعطاء خصائص لها، ومن ثم تبدأ من جديد حلول المعادلات التفاضلية الكسرية والمسائل ذات القيم الابتدائية والحدية المتعلقة بهذا المشتق أو ذاك. وتقذف المجلات كل يوم بالعديد من المقالات التي تتناول هذه المسائل، حتى أضحى من الصعب تتبّع هذه التعاريف، فضلًا عن المسائل المتعلقة بها، والتي عادة ما تكون محاكاة لمسائل تمّ حلها في النمط العادي من المشتقات.

3. معايير تم اقتراحها لمحاكمة المشتقات الكسرية

إنّ أيّ تمديد لتعريف من التعاريف الرياضية لا بدّ له من أن يحافظ على هيكل عام وبعض الخصائص التي تُعتبر أساسية، وإلا سيفقد التعريف ما أُنشئ من أجله، ويصبح عصيًا على الفهم. وحيث إن للمشتقات الكسرية كلمتين مفتاحيتين هما: "مشتق" و"كسري"، فإننا لا بدّ لنا من النظر في دلالة هاتين الكلمتين وما يمكن أن تتمتع بهما من خصائص.

إن كلمة "كسري" تُعتبر سياقًا تاريخيًا لا نستطيع أن نحصل منه على كبير فائدة، لذا ينبغي التركيز على مصطلح "مشتق"، الذي له دلالة معروفة في التحليل الرياضي.

في سنة 1975، نشر روس (B. Ross) مقالًا بعنوان "عرض وموجز تاريخي للنظرية الأساسية في الحساب الكسري"، اقترح فيه معايير للاشتقاق كسري الرتبة، تم تعديلها من طرف أورتيغيرا (M. D. Ortigueira) وزملاؤه في بحث نُشر سنة 2015:

أ- مؤثر الاشتقاق كسري الرتبة يلزم أن يكون خطيًا.

ب- المشتق الكسري من الدرجة صفر لدالة ما هو الدالة ذاتها.

ج- إذا اعتبرنا دالةً f ومشتقها الكسري $D^{\alpha} f$، فإنه بأخذ α عددًا طبيعيًا، لا بد من الرجوع إلى المشتق العادي للدالة f من الرتبة α.

د- إذا كانت f دالة تحليلية، فإن المشتق الكسري لها $D^{\alpha} f$ هو أيضًا دالة تحليلية.

هـ- مؤثر الاشتقاق يحقق الخاصية التالية: $D^{\alpha}\, D^{\beta}\, f \;=\; D^{\alpha+\beta}\, f$.

و- مؤثر الاشتقاق يحقق قانون لايبنتز الشهير المتعلق بمشتق جداء دالتين، والذي تم تقديمه في صيغ مختلفة.

إن مقاربة ريمان–ليوفيل تحقق الشروط الثلاثة الأولى بسهولة، بينما الشروط الثلاثة الأخيرة تحتاج إلى تفاصيل يمكن تقديمها كما يلي:

- تكاملات الدوال التحليلية هي دوال تحليلية، بينما مشتقات الدوال التحليلية ليست دومًا دوالًا تحليلية. فعلى سبيل المثال، المشتق من نمط ريمان–ليوفيل للدالة الثابتة لا يعطي الدالة المعدومة، بل يعطي دالة قوة. هذا الأمر يقودنا إلى إمكانية نشر الدالة المشتقة من نمط ريمان–ليوفيل وفق صيغة لورنتز (Lorentz).
- أما المعيار الخامس فهو غير متحقق سوى تحت بعض الشروط، ووفق صيغة منسجمة مع النمط غير المحلي لهذه المقاربة.
- أما صيغة لايبنتز، فتوجد منها نسخ متعددة تعمم الصيغة العادية، وفقًا لرتبة الاشتقاق.

إن تحقيق مقاربة ريمان–ليوفيل للمعايير الثلاثة الأولى يجعلنا نعتقد أنها من أجدر المقاربات التي قد تكون إجابة لتساؤل لايبنتز.

4. بعض الأعمال البحثية المبكرة

لقد مرّت الأبحاث على المشتقات كسرية الرتبة بصورة بطيئة منذ بداية التساؤل، وقد كانت محاولات من قِبل رياضياتيين يُشار إليهم بالبَنان، مثل أويلر وفورييه ولاكروا وغيرهم، إلى أن قُدّمت مقاربة ريمان–ليوفيل ومقاربة غرينولد–ليتنيكوف (Grünwald-Letnikov). وفيما يلي نقدّم جردًا مختصرا لباكورة الأعمال التي تم تقديمها منذ أن تبلورت فكرة المؤثرات الكسرية.

في سنة 1949، نشر رايز مقالًا طويلًا (في نحو 200 صفحة) باللغة الفرنسية، عنوانه: "تكامل ريمان–ليوفيل ومسألة كوشي"، قدّم فيه مقاربة ريمان–ليوفيل، كما قدّم مقاربته الخاصة (Riesz potential) على فضاء أقليدي، مع بعض التطبيقات على مسائل فيزيائية.

منذ سبعينيات القرن الماضي، أصبح حساب التفاضل والتكامل الكسري موضوعًا لمؤتمرات ورسائل متخصصة. وبالنسبة للمؤتمر الأول، يعود الفضل إلى روس، الذي نظّم –بعد فترة وجيزة من أطروحته للدكتوراه في حساب التفاضل والتكامل الكسري– المؤتمر الأول حول حساب التفاضل والتكامل الكسري وتطبيقاته، وذلك في جامعة نيو هافن في جوان 1974. كما قام أولدهام (K.B. Oldham) وَسبانير (J. Spanier)، بتعاون مشترك، بإصدار كتاب مُخصص للحساب التفاضلي الكسري عام 1974. وقد جسّد هذا التعاون بين الكيميائي أولدهام والرياضي سبانير في معالجة مسائل انتقال الكتلة والحرارة من حيث ما يُسمى بالمشتقات والتكاملات شبه الكاملة، بزوغ عصر جديد لحساب الكسور، قائم على الحدس الفيزيائي والتنوع الرياضي.

في عام 1987، ظهر الكتاب الضخم لسامكو (S. Samko)، وَكيلباس (A. A. Kilbas)، وَماريتشيف (O. Marichev)، والذي يُشار إليه الآن باسم "موسوعة التفاضل والتكامل"، باللغة الروسية أولًا، ثم بطبعة إنكليزية عام 1993.

ومن المؤلفين الذين تناولوا هذا الموضوع: دزهرباشيان (M.M. Dzherbashyan) سنة 1966، وَماثاي (A.M. Mathai) وَساكسينا (R.K. Saxena) سنتي 1973 و1978، وَسريفاستافا (H.M. Srivastava) وَجوبتا (K.C. Gupta) وَغويال (S.P. Goyal) سنة 1982، وَسريفاستافا وَكاشياب (B.R.K. Kashyap) سنة 1982، وَبرودنيكوف (A. Prudnikov) وَيو. بريتشكوف (Yu. Brychkov) وَماريتشيف (O. Marichev) سنتي 1986 و1990، وَكيلباس وَسايغو (M. Saigo) سنة 2004، وَكيلباس وَسريفاستافا وَتروخيو (J. Trujillo) سنة 2006، وَماثاي (A.M. Mathai) وَهاوبولد (H. Haubold) سنة 2008، وَماثاي وَساكسينا وَهاوبولد سنة 2010، إلخ.

واليوم، تضم سلسلة الكتب والمجلات والنصوص المخصصة لحساب التفاضل والتكامل الكسور وتطبيقاته عشرات العناوين، ومن المتوقع أن تتوسع هذه القائمة أكثر في السنوات القادمة.

ومن المعترف به اليوم أن استخدام المشتقات الكسرية يُظهر فائدةً واضحةً من خلال العدد المتزايد من الأوراق البحثية والأعداد الخاصة في المجلات. وفي العقود الأخيرة، استقطب مجال حساب التفاضل والتكامل الكسري اهتمام الباحثين في مجالاتٍ عديدة، بما في ذلك الرياضيات والفيزياء والكيمياء والهندسة، وحتى العلوم المالية والاجتماعية.

نذكر على سبيل المثال أن أعدادًا قد خُصّصت في مجلات للحساب التفاضلي الكسري، منها:

- عدد خاص بوقائع المؤتمر الثالث حول طرائق التحويل والدوال الخاصة، نشر سنة 1999 في مجلة *Fractional Calculus and Applied Analysis*.
- عدد خاص بأنظمة الحساب كسري الرتبة، نُشر سنة 2002 في مجلة *Nonlinear Dynamics*.
- عدد خاص بمعالجة الإشارات الكسرية وتطبيقاتها، نُشر سنة 2003 في مجلة *Signal Processing*.

- عدد خاص بوقائع المؤتمر الرابع حول طرائق التحويل والدوال الخاصة، نشر سنة 2004 في مجلة *Mathematica Balkanica (J. Math. Soc. S-E Europe)*.
- عدد خاص بالمشتقات الكسرية وتطبيقاتها، نُشر سنة 2004 في مجلة Signal Processing.
- عدد خاص بالحساب الكسري وتطبيقاته على أنظمة الإشارات، نُشر سنة 2004 في مجلة *Signal Processing*.
- عدد خاص بالمشتقات الكسرية وتطبيقاتها، نُشر سنة 2004 في مجلة *Nonlinear Dynamics*.
- عدد خاص بالمسائل التطورية، نُشر سنة 2007 في مجلة *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- عدد خاص بالتفاضليات الكسرية وتطبيقاتها، نُشر سنة 2008 في مجلة *Journal of Vibration and Control*.
- عدد خاص بالأنظمة الديناميكية المتقطعة والكسرية، نُشر سنة 2008 في مجلة *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*.
- عدد خاص بالأنظمة كسرية الرتبة: تطبيقات في النمذجة والتحديد والتحكم، نُشر سنة 2008 في مجلة *Journal Européen des Systèmes Automatisés*.
- عدد خاص بالتفاضليات الكسرية وتطبيقاتها، نُشر سنة 2009 في مجلة *Physica Scripta*.
- عدد خاص بالأساليب المبتكرة لحل المشكلات التطورية، نُشر سنة 2009 في مجلة *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- عدد خاص بالتطورات في المعادلات التفاضلية كسرية الرتبة، نُشر سنة 2010 في مجلة *Computers and Mathematics with Applications*.
- عدد خاص بالتفاضليات الكسرية وتطبيقاتها، نُشر سنة 2010 في مجلة *Computers and* Mathematics *with Applications*.
- عدد خاص بالتطورات في الإشارات والأنظمة الكسرية، نُشر سنة 2010 في مجلة *Signal Processing* .

تجدر الإشارة إلى أنه في العقدين الأخيرين، انتشرت العديد من الأبحاث حول هذا الموضوع بشكل لا يمكن حصره. كما أن بعض المجلات صارت تعلن عن أعداد خاصة متعلقة بالحساب التفاضلي كسري الرتبة، وذلك بصفة دورية مثل: Axioms، Mathematics، Fractal and fractional.

5. الاشتقاق الكسري بمفهوم التوزيعات وفضاءات سوبولاف الكسرية

من المعلوم أن الاشتقاق الضعيف وفضاءات سوبولاف (Sobolev) يلعبان دورًا مهمًا في حل مسائل القيم الحدية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية والمعادلات ذات المشتقات الجزئية. ولما كان الاشتقاق الكسري تعميمًا للاشتقاق العادي فإنه من الطبيعي التفكير في فضاءات مماثلة تُوفر إطارًا مناسبًا لهذا النوع الجديد من المعادلات المتعلقة بالمشتقات كسرية الرتبة، وبالتالي التفكير في المشتق الكسري الضعيف وبمفهوم التوزيعات.

في سنة 2011 وما بعدها، استخدم باحثون الطريقة التغايرية لإثبات وجود حلول لمسائل ذات قيم حدية لديريخليه (Dirichlet) غير الخطية من نوع ريمان–ليوفيل على مجال حقيقي محدود. ولهذا الغرض، تم استحداث فضاء جديد يُرمز له بـ $E_0^{\alpha,p}$، والذي يُعرّف بأنه ملاصقة فضاء التوابع (الدوال الاختبارية) وفقًا لنظيم مختار بعناية، يُمثّل مجموع النظيمين للدالة ومشتقتها الكسرية اليسرى من نمط ريمان–ليوفيل ومن رتبة حقيقية α، حيث $0 < \alpha < 1$،

في الفضاء L^p، حيث يُمثّل p عددًا حقيقيًا أكبر من 1. إن هذا التعريف يُذكّرنا بالتعريف الكلاسيكي للفضاء $W_0^{1,p}$. وقد قدّم المؤلفون بعض الخصائص لهذا الفضاء، المتناسبة مع مسألتهم المراد حلها.

في سنة 2013، قدّم إيدتشاك (D. Idczak) وآخرون تعريفًا شاملًا لفضاءات سوبولاف الكسرية من نوع ريمان-ليوفيل، ويُرمز لها بالرمز $W^{\alpha,p}$، وذلك باتباع الطريقة ذاتها المُستخدمة لتعريف فضاءات سوبولاف العادية. وقد تم إثبات أنها فضاءات نظيمية وفقًا لنظيمين متكافئين، وأنها انعكاسية، وقابلة للفصل، في ظل الشروط ذاتها التي يحققها p في الفضاءات العادية. كما قُدّمت مجموعة من التباينات (embeddings) في الفضاءات L^q، منها ما كانت مستمرة، ومنها ما كانت متراصة لهذه الفضاءات. وفيما بعد، تم إثبات مجموعة من التباينات مشابهة إلى حد بعيد لتلك التي تم تناولها في فضاءات سوبولاف ذات المشتقات العادية.

أثبت سيزار لوديسما (C. E. T Ledesma) ومن معه، في بحث نُشر سنة 2021، أن فضاء سوبولاف الكسري المعروف H^α يختلف عن فضاء سوبولاف الكسري من نوع ريمان–ليوفيل. وما تزال الأبحاث جارية في هذا المجال، جنبًا إلى جنب مع دراسة الحلول الضعيفة لمختلف مسائل القيم الحدية ذات المشتقات كسرية الرتبة.

وقد قام سامكو ومن معه (1993) بتقديم مجموعة من الأفكار الأولية التي تُعرّف المشتق كسري الرتبة بمفهوم التوزيعات. تقوم بعض هذه الأفكار على أن تعريف المشتق بمفهوم ريمان–ليوفيل إنما يقوم على جداء تزاوج بين دالة قوة والدالة المراد حساب الاشتقاق عليها، فإذا استطعنا تعميم جداء التزاوج هذا، فإننا سننجح في تعريف الاشتقاق الكسري بمفهوم التوزيع، وهو ما تم العمل عليه في الفترة الأخيرة. كما تم أيضًا تعريف المشتق كسري الرتبة بالنسبة للتوزيعات ذات الحوامل المتراصة، وهكذا ظهرت مشتقات كسرية لتوزيع ديراك وغيره من التوزيعات متراصة الحامل، وذلك بطريقة مستقلة عن استخدام جداء التزاوج.

6. آفاق البحث في هذا الفرع

عند النظر إلى تعريف الاشتقاق من نمط ريمان–ليوفيل وخصائصه، يمكن للباحث أن يتوقع مدى ضخامة المسائل التي تنتظر الدراسة، ومنها المعادلات التفاضلية ومسائل القيم الحدية، وغيرها.

وبما أن الاشتقاق بمفهوم ريمان–ليوفيل معرّف على مستقيم الأعداد الحقيقية، فإنه من الطبيعي ظهور أبحاث تتعلق بالمعادلات التفاضلية كسرية الرتبة. وحيث إن المشتق الضعيف ما يزال محدود التناول، فإن نسبة ضخمة من الأبحاث توجهت نحو الحلول القوية للمعادات التفاضلية والمسائل ذات القيم الحدية الكسرية، والتي تعتمد في معظمها على مختلف الصيغ الخاصة بمبرهنات النقطة الصامدة.

أما الأبحاث الخاصة بالحلول الضعيفة، فإنها ما تزال تسير بطريقة محتشمة، خصوصًا وأن خصائص فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة لم تُبلور بعد.

تم تقديم المشتقات الجزئية كسرية الرتبة في حالات خاصة تُمثل البلاطات متعددة الوجوه، حيث يمكن تقديم المشتقات فيها بسهولة تامة، بينما لم يتم تناول الحالات العامة إلا في مجموعة قليلة من الأبحاث. وهذا يقودنا إلى سلسلة طويلة من المسائل، التي لو تم حلها، لفتحت لنا آفاقًا جديدة في هذا الفرع. من بين هذه المسائل نجد:

- تعميم الاشتقاق كسري الرتبة إلى الفضاء متعدد الأبعاد وفي ميادين عامة، وذلك اعتمادًا على نظرية فوبيني (Fubini) بالنظر إلى أن المشتق الكسري معرف استنادًا إلى تكامل.
- تعميم المؤثرات الاشتقاقية الشهيرة (التدرج grad، التفرق div، الدوار rot، لابلاس Δ) لتصبح مؤثرات كسرية الرتبة.

- تعميم النظريات والدساتير الشهيرة مثل: صيغة غرين (Green) وَستوكس (Stockes) ومتباينة بوانكاريه (Poincaré).
- فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة ذات متغيرات متعددة.

وبهذا يمكننا الولوج إلى مسائل ذات قيم حدية مرتبطة بمشتقات كسرية الرتبة.

وهكذا، نجد أن الأبحاث في هذا الميدان ما تزال في بداياتها، وأنه ينتظرنا الكثير من الجهد والوقت للوصول بها إلى مستوى البداية التي كانت عليه أيام ريمان وَبوانكاريه وَهيلبرت (Hilbert)، فضلًا عن ليري (Leray) وَشوارتز (Schwartz) وسوبولاف.

مراجع

[1] Kilbas, A. A., Marichev, O. I. and Samko, S. G., Fractional Integrals and Derivative : Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
[2] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 2006.
[3] Riesz, M., L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Mathematica, 81(1), (1949), 1–222.
[4] Ross, B., A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus. In Fractional Calculus and Its Applications, edited by B. Ross, 1–36. Lecture Notes in Mathematics 57, Springer, Berlin, 1975.

غوتفريد لايبنتز

غيوم لوبيتال