الرياضيات التعليمية: ما هي الرياضيات التي تُدرَّس؟
الجزء الثالث: الحقيقة في المنطق الرياضياتي الكلاسيكي و اتساق النظرية ZF

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

هذا المقال مهدى إلى أستاذة الرياضيات السابقة بالمدرسة الأساسية، الطور الثاني، داودي فاطنة

1. مقدمة

أذكّر في البداية ببتين من الشعر للإمام الشافعي رحمه الله، مفيدين لأي طالب علم:

أخي لن تنال العلم إلا بستةٍ ... سأنبيك عن تفصيلها ببيانِ
ذكاءٌ وحرصٌ واجتهادٌ وبُلغةٌ ... وصحبةُ أستاذٍ وطـول زمانِ

تنفق جميع الدول في العالم أموالًا لتدريس الرياضيات لأجيالها الناشئة، وتكمن وراء ذلك بالتأكيد أسباب معينة. ولذلك، يحق للمرء التفكير في أسئلة من قبيل: ما هي الأسباب التي تجعل تدريس الرياضيات مشروعًا مجتمعيًا ضروريًا؟ وما هي الرياضيات التي تُدرّس للناشئة؟ وبالأحرى، ما هي الرياضيات التعليمية؟

فيما يتعلق بالسؤال الأول، يمكن القول عمومًا إن تدريس الرياضيات يستمد مشروعيته المجتمعية من سببين رئيسيين، هما:

أ- تطوير وتنمية المهارات العقلية الاستنباطية لدى الناشئ، وذلك لكون الرياضيات تمثل النموذج الأكثر وضوحًا وحضورًا للتفكر البشري الاستنباطي الضروري لحياة الأفراد ولحياة المجتمع. ويمكن الزعم، دون مبالغة، بأن تعلّم الرياضيات هو تعلّم حِرفة البرهان، أو أيضًا فن البرهان.

ب- الرياضيات علم ضروري لفهم وتطوير واستخدام الكثير من المعارف البشرية، مثل العلوم الدقيقة كالفيزياء والكيمياء، وعلوم المهندسين مثل الإعلام الآلي والإلكترونيك والآلية، وغيرها.

ويجب لفت انتباه مُدرّسي الرياضيات بالمدارس الابتدائية والمتوسطة والثانوية، وحتى في الجامعات، إلى ضرورة وضع الهدف الأول المرجو من تدريس الرياضيات نصب أعينهم، وذلك لكي يعطوا أولًا فرصًا أكبر للشباب الناشئ لتحقيق أهدافه المشروعة في الحياة، وثانيًا، لكي يمنحوا نشاطاتهم التعليمية معان حقيقية جادة وخالية من العبث.

يمكن القول إن الرياضيات التعليمية هي الرياضيات الكانتورية، أي الرياضيات المؤسَّسة على نظرية المجموعات لكانتور (Cantor) وعلى المنطق الرياضي الكلاسيكي. بناءً على هذا، ينبغي على مُدرّسي الرياضيات الجادين الإلمام بالمبادئ الأساسية لهذه النظرية، والاطلاع اطلاعًا كاملًا على المبادئ الأولية للمنطق الكلاسيكي، مثل المعرفة الكاملة بمعاني الروابط المنطقية في إطار هذا المنطق، والمعرفة المقبولة بالمسلمات المنطقية، وبمبادئ الاستنباط الأكثر شهرة واستخدامًا.

حدّد علماء الرياضيات عشر مسلّمات تُؤسِّس لنظرية المجموعات، والمعروفة في أبجديات الرياضيات باسم "مسلّمات زرميلو وفرانكل + مسلّمة الاختيار". ومن جانبهم، اعتمد خبراء التعليم ومؤلّفو كتب الرياضيات هذه المسلّمات كأهداف تعليمية قاعدية في عملية تدريس الرياضيات. وينبغي، كما أُشير إلى ذلك آنفًا، أن يُلّم مدرّسو الرياضيات الجادّون بهذه المسلمات، وربما تكفيهم مبدئيًا معرفة خمس منها، والتي سنتحدث عنها في هذا الجزء. ولمساعدة القارئ الكريم على

الاطلاع عليها سريعًا، نورد اسمها بالإنكليزية: "Zermelo-Fraenkel Axioms + Axiom of choice"، وكثيرًا ما يُشار في الكتب اختصارًا إلى نظرية المجموعات المستخدمة في الرياضيات التعليمية بالاسم ZFC.

من الأمور الأساسية أيضًا أن يعرف مدرس الرياضيات لغة نظرية المجموعات، حتى يصير بمقدوره معرفة طريقة تكوين الصيغ الرياضياتية معرفة كاملة.

لقد أُعدَّ هذا المقال حول الرياضيات التعليمية تحديدًا لتحقق الهدفين المشار إليهما، وبذلك يصير عونًا وسندًا لجميع مُدرّسي الرياضيات في المدارس الثانوية، ولمدرّسي الرياضيات في السنوات الجامعية الأولى.

يعرض المقال لغة نظرية المجموعات، وهي اللغة الرياضياتية العالمية الضرورية لكتابة كل قضايا الرياضيات رمزيًا، والمبادئ الأولية للمنطق الرياضي الكلاسيكي الأولي المعتمَد في تدريس هذه الرياضيات. يُقدّم المقال واحدًا من أبسط نُظم الاستدلال الرياضياتي وأكثرها ألفة واستخدامًا في البراهين الرياضياتية. كما تم تضمينه الطريقة الصحيحة، التي يُفترض أن يتبنّاها مُدرّسو المنطق في إعداد دروسهم، لتعريف الصيغ والمبادئ الصحيحة. إحدى الغايات من هذا التضمين هي تبيان الهدف الحقيقي من تدريس جداول الصحة في برامج المنطق، وهو الهدف الذي لا يُقدّم أيّة خدمة لتعلم حرفة البرهان الرياضياتي، علمًا بأن المنطق أُسّس تحديدًا من أجل ترسيخ هذه الحرفة في الأذهان.

يتبنّى المقال وجهة النظر التي اتفق عليها غالبية علماء الرياضيات في بداية القرن العشرين، وهي عرض هذا العلم في إطار نظرية المجموعات، وبواسطة لغة رياضياتية عالمية هي لغة هذه النظرية. ولا يحتوي على أمور جديدة حول المنطق الرياضياتي الكلاسيكي والرياضيات، وإنما تكمن أهميته في أنه، بحسب المؤلف، لا توجد نصوص عربية تتناول موضوع الرياضيات التعليمية بالطريقة ذاتها، اللهم باستثناء النص المعروض في كتاب "الجبر" للأستاذ الفرنسي روجي غودمان (Roger Godement)، والذي قام الأساتذة مختار عبيد وأبو بكر خالد سعد الله ويوسف عتيق بتعريبه. جميع الكتب المصاغة بالعربية، التي تتناول جانبًا من المنطق الأولي، سواء كانت محلية أو قادمة من مصر أو سوريا، والتي قام المؤلف بمعاينتها، لا تتناول سوى جداول الحقيقة، وهذا يعني أنها لا تتناول المنطق كما ينبغي، وإنما تتناول بالأحرى موضوعًا آخر يتعلق بجبور بول (Boole). وهذا، في نظر المؤلف، أعاق فهم المنطق الأولي على الرغم من بساطته، ومن ثمة أضرّ بعملية تدريس الرياضيات الأولية.

يتضمن المقال أيضًا نصًّا قصيرًا، ولكنه دقيق جدًا، حول الصورنة والرياضيات الصورية، التي طالب هيلبرت (Hilbert) بتأسيسها في بداية القرن العشرين. ويمكن لطلاب فلسفة العلوم استخدامه في مقالاتهم والاستفادة منه ونشره لديهم.

يُعنى الجزء الثالث بالحديث عن معنى الحقيقة في المنطق الرياضياتي الكلاسيكي وعن اتساق نظرية المجموعات المنقوصة مسلمة الاختيار.

2. الحقيقة في CML

نُسمّي نظرية رياضياتية كلاسيكية مؤسسة (أو مبنية) على اللغة $\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}$ كل ثلاثية من الشكل $\mathrm{Th} = (\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}, \mathrm{CML}, \Gamma)$، حيث $\mathrm{For}(\mathfrak{L}_1\mathrm{Set}) \supseteq \Gamma$. تُدعى Γ بمجموعة المسلّمات غير المنطقية للنظرية Th، وتُدعى Thm_Γ بمجموعة صيغها القابلة للبرهان (الصحيحة). وعلى هذا الأساس توصف أية صيغة $\mathrm{Thm}_\Gamma \ni P$ بأنها صحيحة في النظرية Th.

تُوصَف النظرية Th بأنها كلاسيكية، لأن المنطق المستخدَم في براهين صيغها الصحيحة هو المنطق الرياضياتي الكلاسيكي. وغالبًا ما يطابق مؤلفو الكتب الرياضياتية بين Th ومجموعة مسلّماتها غير المنطقية Γ، فبدلًا من أن يقال "النظرية Th تحقق كذا وكذا"، يقال "النظرية Γ تحقق كذا وكذا"، وهلمّ جرّا. وهذا ما سنتبناه فيما يلي.

نظرية المجموعات ZFC ما هي في الحقيقة سوى الثلاثية $(\mathfrak{L}_1\text{Set}, \text{CML}, \text{ZFC})$. ونذكر أن مجموعة المسلّمات غير المنطقية لكل نظرية في الرياضيات التعليمية تحتوي بالضرورة على مجموعة المسلّمات ZFC.

بما أن المنطق CML هو النموذج الأكثر شهرة واستخدامًا من بين جميع أنواع المنطق الاستنباطي الأخرى، فالحقيقة فيه تُعدّ قرينة للبرهان. وعلى هذا الأساس لدينا ما يلي:

- نقول إن P صحيحة "P is true" في النظرية Γ، إذا كانت قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، أي إذا كان $P \in \text{Thm}_\Gamma$ أو $\Gamma \vdash P$. وبحسب مبدأ الثالث المرفوع، "كل صيغة قابلة للبرهان أو غير قابلة للبرهان في النظرية Γ"، أو أيضًا: "كل صيغة صحيحة أو غير قابلة للبرهان في النظرية Γ". ويمكن صياغة القضية "الصيغة P غير قابلة للبرهان في النظرية Γ" كما يلي "الصيغة P غير صحيحة في النظرية Γ"، ولكن يجب توخي الحذر الشديد في هذه الحالة، إذ لا ينبغي الخلط بين "عدم الصحة" و"الخطأ"، الذي نعرفه فيما يلي:
- نقول إن P خاطئة "P is false" في النظرية Γ إذا كانت $\neg P$ صحيحة في النظرية Γ. ويمكن تعويض الجملة "$\neg P$ غير قابلة للبرهان في النظرية Γ" بالجملة "P غير خاطئة في النظرية Γ". ولذلك، حسب مبدأ الثالث المرفوع، "كل صيغة خاطئة أو غير خاطئة في النظرية Γ".

لاحظوا جيدًا أن القضية "P خاطئة في النظرية Γ" ليست هي ذاتها القضية "P غير قابلة للبرهان في النظرية Γ" (النفي المنطقي للقضية "P صحيحة في النظرية Γ"). وعلى هذا الأساس، لا يحق لنا تطبيق مبدأ الثالث المرفوع للقول إن القضية "كل صيغة صحيحة أو خاطئة في النظرية Γ" صحيحة. بل على العكس، هذه القصية غير صحيحة عمومًا، إذ إن غالبية النظريات الرياضياتية المؤسسة على اللغة $\mathfrak{L}_1\text{Set}$ تحتوي على عدد لانهائي من الصيغ غير الصحيحة وغير الخاطئة، وهي ما يُعرف بالصيغ غير القابلة للإقرار. توصف هذه النظريات بأنها غير مكتملة.

في المنطق التجريبي العادي، المسيطر على عقول الجميع، وكذلك في المنطق التجريبي الفيزيائي، يتم المطابقة بين الخطأ وعدم الصحة، لأن البشر يعتبرون تلقائيًا هذا المنطق مكتملًا. ويُقدّم الفيزيائيون حججًا كثيرة للتأكيد على أن منطقهم التجريبي مكتمل. في المقابل، أثبت غودل (Gödel) أن المنطق الرياضياتي الكلاسيكي غير مكتمل.

مبرهنة 4. في أيّة نظرية مؤسّسة على اللغة $\mathfrak{L}_1\text{Set}$، لا توجد صيغة تكون صحيحة وخاطئة في آن معًا، وبتعبير آخر، كل صيغة خاطئة هي حتمًا غير صحيحة.

البرهان. لنستخدم مبدأ برهان الخطأ بالتناقض. وعليه، لتكن $\Gamma \subseteq \text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$، ولنفرض جدلًا أنه توجد صيغة P صحيحة وخاطئة معًا في النظرية Γ. في هذه الحالة، يمكننا أن نكتب ما يلي:

1. $\Gamma \vdash P$ (فرضية)
2. $\Gamma \vdash \neg P$ (فرضية)
3. $P, \neg P \vdash P \wedge \neg P$ (حسب مبدأ إدخال الرابط $\wedge$)
4. $\Gamma \vdash P \wedge \neg P$ (حسب **1** وَ**2** وَ**3**)
5. $P \wedge \neg P \vdash Q$ (حسب مبدأ Ex Falso Quodlibet)، حيث $Q \in \text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$
6. $\Gamma \vdash Q$ (حسب **4** وَ**5**)
7. $\text{Thm}_\Gamma = \text{For}(\mathfrak{L}_1\text{Set})$، لأن الصيغة Q كيفية.

من **7** ندرك أن النظرية Γ متناقضة. هذا الوضع لا يجب أن نصل إليه أبدًا، وعلينا التخلص من كل الفرضيات مؤدية إليه. وعلى هذا الأساس لا توجد صيغة P تحقق **1** وَ**2**. انتهى البرهان.■

تُستخدم حجّة شائعة بكثرة في المنطق التجريبي العادي، وذلك لأننا نفترض تلقائيًا أنه يحقق ما يُسميه علماء المنطق بخاصية الانفصال، بيد أنها خاطئة تمامًا في المنطق CML، لأنه بكل بساطة لا يحقق خاصية الانفصال المشار إليها.

هذه الحجة تتمثل تحديدًا في التكافؤ التالي:

الصيغة P صحيحة أو الصيغة Q صحيحة $\Leftrightarrow$ الصيغة $P \vee Q$ صحيحة (*)

وهو تكافؤ صحيح في جميع أنواع المنطق التجريبي، لكنه خاطئ في المنطق CML، ويجب استبداله بالاستلزام التالي، الذي يُعدّ صحيحًا في CML:

الصيغة P صحيحة أو الصيغة Q صحيحة $\Leftarrow$ الصيغة $P \vee Q$ صحيحة

أعرض هنا مبدأين شهيرين غير قابلين للإقرار في نظرية ZFC، وهما:

فرض المستمر CH لكانتور. لا توجد مجموعة جزئية وغير منتهية X في $\mathbb{R}$ بحيث

$$\aleph_0 = \mathrm{card}\mathbb{N} < \mathrm{card}X < \mathfrak{c} = \mathrm{card}\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}.$$

مسألة سوسلين (Suslin) SP. لتكن $(X, \leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبًا كليًا، وتحقق الشروط التالية:

1. $(X, \leq)$ تامة؛ بمعنى أن كل مجموعة جزئية غير خالية ومحدودة في X تملك حدًا أعلى؛
2. $(X, \leq)$ كثيفة؛ بمعنى أنه من أجل كل $x \in X$ وكل $y \in X$ يحققان $x < y$، يوجد $z \in X$ بحيث $x < z < y$؛
3. $(X, \leq)$ غير محدودة؛ بمعنى أن العنصرين الأكبر والأصغر في X غير موجودين؛
4. $(X, \leq)$ تحقق شرط السلسلة القابلة للعد؛ بمعنى أن كل عائلة مجالات منفصلة مثنى مثنى في X قابلة للعد،

في هذه الحالة يوجد تشاكل مجموعات مرتبة بين $(X, \leq)$ وَ $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$.

وهكذا، فعلماء الرياضيات أحرار تمامًا في مواقفهم حيال هذين المبدأين؛ فلكلٍّ منهم أن يسلِّم بصحة أحدهما، أو بنفيه المنطقي، أو أن يهمله ببساطة.

لاحظوا أن CH وَSP لا صحيحان ولا خاطئان في ZFC، ومع ذلك فإن الصيغتين $\mathrm{CH} \vee \neg\mathrm{CH}$ وَ$\mathrm{SP} \vee \neg\mathrm{SP}$ صحيحتان في ZFC حسب مبدأ الثالث المرفوع. وهذا يخالف بوضوح التكافؤ (*).

في إطار العمل ضمن نظرية Γ، الجملة "نفرض أن P" تعني تحديدًا إضافة P كمسلمة غير منطقية جديدة إلى Γ، أما الجملة "نفرض أن P صحيحة" فتعني "نفرض أن P قابلة للبرهان في النظرية Γ"، بينما الجملة "نفرض أن P خاطئة" تعني "نفرض أن $\neg P$ قابلة للبرهان في النظرية Γ".

3. اتساق نظرية المجموعات المنقوصة مسلمة الاختيار

لقد أدّت المحاولات الرامية إلى بناء التحليل الرياضياتي على أسس صلبة إلى إدخال نظرية المجموعات وتطويرها من قِبل كانتور في نهاية القرن التاسع عشر. وقد ارتبط هذا الإنجاز الاستثنائي ارتباطًا وثيقًا بافتراض وجود مجموعات غير منتهية عصية على الفهم والاستيعاب. ومن هنا، لم يكن مستغربًا أن تنشأ في هذه النظرية الجديدة مفارقات تتعلق بمعنى "الوجود" في الرياضيات. ولعل أشهر هذه المفارقات مفارقة راسل (Russell)، ذات الطابع المنطقي المحض، والتي نشأت عن افتراض وجود مجموعة عناصرها هي على وجه التحديد تلك المجموعات التي لا تحتوي على نفسها كعنصر.

ولتجاوز الشكوك المثارة حول نظرية المجموعات والمفارقات المرتبطة بها، دعا هيلبرت إلى تأسيس الرياضيات على أسس جديدة صلبة، مقترحًا في الوقت ذاته نظريته للبرهان وسيلةً لتحقيق ذلك. من جانبه طالب براوير (Brouwer)، وللغاية عينها، ببناء الرياضيات على أسس المذهب الحدسي، الذي كان يؤمن به.

اقترح هيلبرت، الذي كان أشد تأثيرًا من براوير في أوساط علماء الرياضيات، أن تؤخذ كموضوعات للنظر الفكري ليس الأشياء الرياضياتية في حد ذاتها، وإنما العبارات حول هذه الأشياء. وهكذا ينبغي أن تكون موضوعات النظر الفكري المركزية جُملًا تُمثّل عبارات رياضياتية معينة. فعلى سبيل المثال، عند النظر في العبارة التي تقول إن "بعض الأشياء A ذات الخصائص المعطاة موجودة"، فلا نأخذ في عين الاعتبار الأشياء A التي تؤكد هذه الجملة وجودها، بل الجملة نفسها المكتوبة على هيئة تسلسل منته (كلمة) من حروف أبجدية لغة رياضياتية، والتي يفترض غالبًا أن تكون منتهية. وتُطبق طرق الاستدلال في المنطق على مثل هذه الجمل. ولا ينبغي أثناء هذه التطبيقات، النظر إلى محتوى الجمل، وإنما إلى بنيتها النحوية فقط. أخيرًا، يجب اعتبار مجموعة معينة من الجمل متسقة إذا لم يكن من الممكن أن نستنتج منها بواسطة طرق الاستدلال جملتين متناقضتين، الواحدة منهما هي نقيض الأخرى. يُعرف هذا المقترح في أبجديات أسس الرياضيات بمبدأ الصورنة أو الشكلنة (Formalism) الذي يُنسب إلى هيلبرت، ويُشكّل أساس الرياضيات الصورية (Formal mathematics).

وتجدر الإشارة هنا إلى رؤية جديدة ترافق ظهورها مع مقترح هيلبرت، مفادها أنه عندما يتمكّن أحدهم من إثبات اتساق مجموعة جمل تتضمن كائنات رياضياتية عصية على التصور الحدسي، مثل المجموعات غير المنتهية، أو تؤدي إلى وجودها، فإنه لا يثبت وجود هذه الكائنات على نحو ما يُفهم في مذهب المُثل الأفلاطوني، وإنما يثبت، بالأحرى، إمكانية التعامل مع الجمل الواصفة لهذه الكائنات دون أن يحدث ذلك ضررًا وتناقضًا في الفكر. وتُظهر هذه الرؤية الفرق الرئيس بين الصورنة والأفلاطونية.

كانت إحدى النقاط الأساسية في برنامج هيلبرت لتأسيس الرياضيات الصورية، إعلانه عن الوسائل المسموح باستخدامها في إثبات اتساق مجموعات المسلّمات المختلفة. فقد طالب باعتماد طرق معينة دون غيرها، أطلق عليها اسم "طرق الاستدلال الانتهائية"، وطالب، كما أُشير إليه آنفًا، باعتبار "مجموعات المسلّمات" و"مجموعات الاستنتاجات" المستندة إليها بمثابة "مجموعات كلمات" مصاغة بأبجدية منتهية. وقد استغرق هيلبرت وتلاميذه عشر سنوات كاملة، هي عقد العشرينيات من القرن العشرين (1920-1930)، لتأسيس النظرية الانتهائية، والتي اعتبرها أساسية لبناء ليس الرياضيات فحسب، بل وكل علم دقيق.

ولكي تستوعب الرياضيات الصورية كل الرياضيات العادية، ضمن هيلبرت برنامجه النقاط التالية:

1- تطوير ودراسة اللغات الرياضياتية القادرة على وصف كل مواضيع الرياضيات العادية،
2- تطوير ودراسة نظم البرهان في الرياضيات، وبخاصة المكتملة منها،
3- تطوير جمل مسلّمات مكتملة للرياضيات،
4- إثبات اتساق الرياضيات المنشأة بالخطوات الثلاث السابقة.

أما الشرط الصارم الذي طالب هيلبرت بضرورة مراعاته -وقد أشير إليه جزئيًا سابقًا- فهو أن تكون أبجديات اللغات الرياضياتية ونظم الاستدلال الرياضياتي وجمل المسلّمات كلها مجموعات تراجعية أو مجموعات قابلة للتحديد خوارزميًا أو مجموعات قابلة للإقرار خوارزميًا (أُثبت لاحقًا في نظرية التراجع أن هذه المجموعات الثلاث تُمثل مفهومًا واحدًا). كما اشترط أن تعتمد براهين الاتساق على الطرق الانتهائية وحدها.

لقد أُنجزت المهمة 1 الأولى بسهولة، حيث تم تطوير لغات نظرية المجموعات القادرة على وصف محتوى الرياضيات العادية، ومنها اللغة $\mathfrak{L}_1$Set التي أوردناها هنا. كما أثبت غودل أن جميع نظم الاستدلال الهيلبرتية HK مكتملة

دلاليًا، وهو ما مَثّل نجاح إنجاز المهمة **2**. نتيجة غودل في هذا الشأن تُدعى في أبجديات الرياضيات بمبرهنة الاكتمال الدلالي لغودل. من ناحية أخرى، بيّن غودل من خلال تقديمه لمبرهنتي عدم الاكتمال الأولى والثانية استحالة إنجاز المهمتين **3** وَ **4**، الأمر الذي أدى، فيما يقال، إلى إصابته وهيلبرت بالإحباط الشديد.

تُعدّ مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل مبرهنة استثنائية في الرياضيات، إذ لم تزعزع أسس الفكر الرياضياتي فحسب، بل مست أيضًا ركائز الفكر الغربي بأسره. وسنعرض فيما يلي نص المبرهنة في إطار النظرية ZF، وهي نظرية المجموعات المنقوصة مسلمة الاختيار.

لتكن $\Gamma \supseteq For(\mathfrak{L}_1 Set)$ مجموعة صيغ تراجعية ومحتوية على مجموعة المسلّمات ZF، ولنرمز بالرمز Con_Γ إلى القضية "النظرية Γ متسقة". لا تبدو Con_Γ ظاهريًا منتمية إلى المجموعة $For(\mathfrak{L}_1 Set)$، بيد أنها تبدو بوضوح منتمية إلى صيغ لغة المراقب. ومع ذلك استطاع غودل، وهذه إحدى براعاته، أن يُعبّر عن Con_Γ بواسطة صيغة منتمية إلى $For(\mathfrak{L}_1 Set)$. وعلى هذا الأساس يمكننا أن نكتب $Con_\Gamma \in For(\mathfrak{L}_1 Set)$.

مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل. إذا كانت Γ متسقة، فالصيغة Con_Γ غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، وبعبارة أخرى، $Con \notin Thm_\Gamma$ أو $\neg(\Gamma \vdash Con_\Gamma)$. وكحالة خاصة، $\neg(ZF \vdash Con_{ZF})$.

يمكن التعبير على نتيجة مبرهنة غودل بالصيغة

$$Con_\Gamma \Longrightarrow \neg(\Gamma \vdash Con_\Gamma)$$

والتي تكافئ، حسب مبدأ عكس النقيض، الصيغة

$$"\Gamma \vdash Con_\Gamma" \Longrightarrow "\Gamma \vdash \neg Con_\Gamma".$$

تُقرأ الصيغة الأولى لغويًا على النحو الآتي "إذا كانت النظرية Γ متسقة، فلا يمكن إثبات ذلك انطلاقًا من مسلّماتها"، وبالتالي "إذا تم إثبات اتساق النظرية Γ انطلاقًا من مسلّماتها، فهي حتمًا غير متسقة". بينما تقرأ الصيغة الثانية لغويًا كما يلي "إذا تم إثبات اتساق النظرية Γ انطلاقًا من مسلماتها، فيمكن أيضًا إثبات عدم اتساقها انطلاقًا من المسلّمات ذاتها". بمقدور القارئ المهتم بهذه المبرهنة وتاريخها العودة إلى المرجع [9].

لدينا كحالة خاصة

$$Con_{ZF} \Longrightarrow \neg(\Gamma \vdash Con_{ZF})$$

وهو الأمر الذي يهمنا هنا. وهكذا، لا يمكن إثبات اتساق النظرية ZF انطلاقًا من مسلّماتها، وهذا يُحزن بشدة علماء الرياضيات الراسخين في فهم أسس الرياضيات للسببين التاليين:

- إذا كانت النظرية ZF متسقة، فجميع نظريات الجبر والهندسة والتحليل المؤسسة بشكل سليم، وتستثنى منها تلك المعروضة في المجلات والكتب المشبوهة، تكون متسقة. وهذا يكشف عن الأهمية القصوى لقضية اتساق ZF.
- إذا كانت النظرية ZF متسقة، فنظرية المجموعات المطعّمة بمسلّمة الاختيار ZFC أيضًا متسقة. وقد شجعت هذه النتيجة، التي أثبتها غودل، علماء الرياضيات على استخدام مسلّمة الاختيار في أعمالهم.

ما يشكل عزاءً لعلماء الرياضيات هو أن مسلّمات النظرية ZF صحيحة استنادًا إلى المنطق التجريبي العادي؛ بمعنى أنها مستخلصة من مقولات فيزيائية واصفة لأحداث فيزيائية حقيقية. ويقول علماء الفيزياء إنه لا يمكن أن تنشأ عن مقولات فيزيائية صحيحة مقولات متناقضة، ذلك أنها تصبح والحالة هذه محل شك حقيقي، لأن الكون حسب رأيهم خال تماما من الأحداث الفيزيائية المتناقضة والمتضاربة. ووفقًا لهذا التبرير، يتوقع علماء الرياضيات أن تكون النظرية ZF متسقة.

يرى عدد كبير من علماء رياضيات في مبرهنة الاتساق المصاغة بلغة المراقب دليلًا على اتساق النظرية ZF. بيد أن آخرين يرون أن هذه الحجة صالحة لجميع النظريات الرياضياتية باستثناء النظرية ZF، ذلك لأنه في الحالة الأخيرة تصير الحجة المشار إليها محتوية على عملية تفكير دائرية غير مقبولة. وفي جميع الحالات، يأمل علماء الرياضيات أن تحل هذه

المعضلة عن طريق ابتكار نظم برهان أكثر قوة من نظم البرهان المعهودة HK، LK، ND، TS، KE، DP (للاطلاع على هذه النظم يُرجى الرجوع إلى المرجع [5])، أو عن طريق بناء نموذج للنظرية ZF في إطار الرياضيات غير الكانتورية التي يجري تأسيسها في الوقت الحالي.

رابط الجزء الأول من المقال: https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n15/article15-3.pdf

رابط الجزء الثاني من المقال: https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n16/article16-6.pdf

مراجع

[1] J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, Studies in Logic, vol. 90, North Holland, 1977.

[2] A. Church, Introduction to Mathematical Logic, vol. 1. Princeton University Press, 1956.

[3] M. Foreman and A. Kanamori, Handbook of Set Theory, Springer, 2010.

[4] H. Herrlich, Axiom of Choice, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.

[5] A. Indrzejczak, Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics, Springer, 2010.

[6] T. Jech, Set Theory, The Third Millenium Edition, revised and expanded, Springer, 2003.

[7] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, North Holland/Van Nostrand, Amsterdam, New York. 1952.

[8] Yu. I. Manin, A Course in Mathematical Logic for Mathematicians, Springer, 2010.

[9] E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015.

[10] J. R. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison-Wesley Pub., 1967.

[11] G. Tourlakis, Lectures in Logic and Set Theory, Vol. 1: Mathematical Logic, Cambridge University Press, 2003.

[12] G. Tourlakis, Lectures in Logic and Set Theory, Vol. 2: Set Theory, Cambridge University Press, 2003.

[13] R. L. Vaught, Set Theory :An Introduction, Birkhäuser, Boston, 1995.