

حلزون أرخميدس

الحسن وعزار

أستاذ (متقاعد) بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

elhacene.ouazar@g.ens-kouba.dz

1. إنجازات أرخميدس

يُعدّ أرخميدس Archimedes (212-287 ق. م) أحد أشهر علماء القرن الثالث قبل الميلاد. له إنجازات في الرياضيات وفي الفيزياء، من أهمها تعريف وتقريب العدد π الذي يمثل نسبة محيط دائرة إلى قطرها، وقد قدّره بـ

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

و π هو عدد حقيقي غير ناطق وغير معروفة قيمته حتى الآن، ولكن نعرف 5000000000000 رقمًا بعد الفاصلة (3.14.....). وأوّل من رمز بـ π لتلك النسبة هو الرياضي **ويليام أوتريد** William Oughtred (1574-1660) الذي أخذه من الكلمة περίμετρος التي تعني المحيط باللغة اليونانية.

كما حسب أرخميدس حجم ومساحة كرة، وهو أوّل من حسب مساحة مقطع من قطع مكافئ، ثم مساحة دورة ممّا يسمى بـ "حلزون أرخميدس" الذي هو موضوع مقالتنا هذه.

ويُمثّل هذا جزءًا يسيرًا من أعمال أرخميدس في الرياضيات، كما يمكن أن نذكر بعض إنجازاته في الفيزياء والميكانيكا، مثل ما يعرف بقوة دفع أرخميدس، وصنع البرغي غير المتناهي (Archimedes' screw) الذي استعمله المصريون لجلب الماء من نهر النيل، وصنع مقعّر لإشعال النيران في بواخر الغزاة على السواحل اليونانية، وكتابة دراسات حول مركز ثقل الأجسام، إلخ.

ونشير إلى أنه في عصر أرخميدس كانت النظريات والمسائل والبراهين تُكتب كلها صياغة لغوية دون استعمال الرموز. فعلى سبيل المثال (بعد الترجمة):

محيط كل دائرة يساوي ثلاثة أضعاف قطرها مضافاً إليه كمّية محصورة بين عشرة أجزاء من واحد وسبعين جزءاً من القطر وسبع القطر.

ملاحظة

لتكن C_1 و C_2 دائرتين كيفيتين، ونصفي قطريهما D_1 و D_2 على الترتيب. يمكن أن نبرهن بسهولة أن

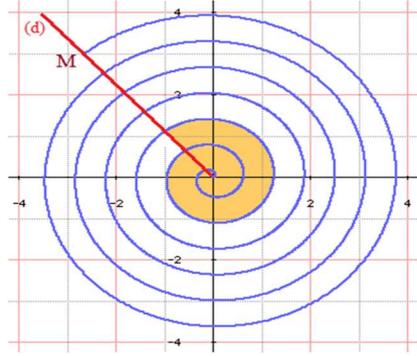
$$\text{محيط}(C_1) / D_1 = \text{محيط}(C_2) / D_2 = \text{ثابت}$$

ونرمز لهذا الثابت بـ π .

2. حلزون أرخميدس

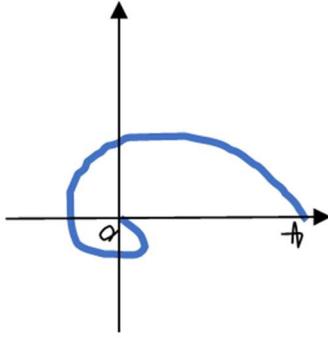
تعريف حلزون أرخميدس (انظر الشكل أسفله).

هو مسار نقطة تتحرك بسرعة منتظمة على نصف مستقيم يدور بسرعة زاوية منتظمة حول نقطة طرفه الثابت.

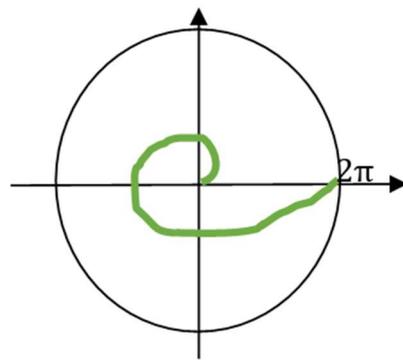


الشكل 1: نفس المسافة بين جميع الحلقات

- نسمي المقطع الأول من حلزون أرخميدس المنطقة المحددة بمنحنى حلزون أرخميدس خلال دورة كاملة للمستقيم.
- إذا كانت النقطة تسير على نصف المستقيم OA انطلاقاً من المبدأ O في اتجاه النقطة A ، وكان المستقيم يدور حول المبدأ في اتجاه عكس عقارب الساعة، فإننا نحصل على المنحنى الأخضر (الحلقة الأولى من حلزون أرخميدس).
 - وإذا كانت النقطة تسير على نصف المستقيم OA انطلاقاً من النقطة A في اتجاه المبدأ O ، وكان المستقيم يدور حول المبدأ في اتجاه عكس عقارب الساعة، فإننا نحصل على المنحنى الأزرق.



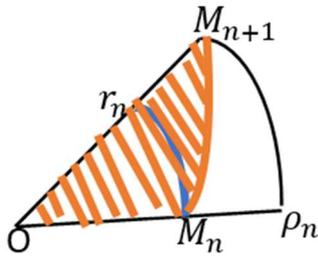
الشكل 3



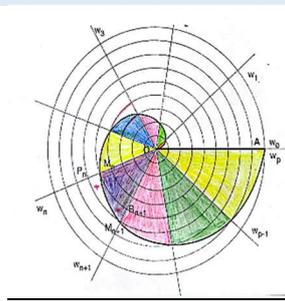
الشكل 2

قضية (أرخميدس)

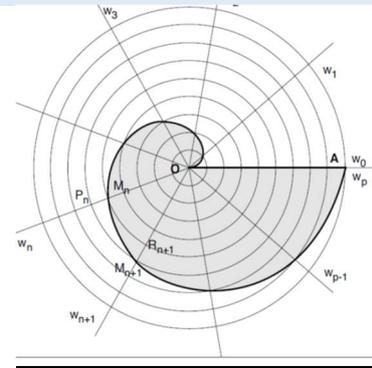
مساحة الحلقة الأولى من حلزون أرخميدس (المنطقة الداكنة من الشكل 4) تساوي ثلث مساحة القرص الذي مركزه نقطة المبدأ ونصف قطره يساوي المسافة التي تقطعها النقطة بعد دورة كاملة للمستقيم حول نقطة المبدأ (انظر الشكل 4).



الشكل 6



الشكل 5

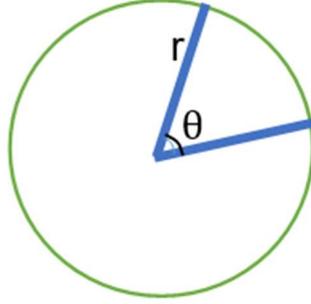


الشكل 4

يُمثل الشكل 6 شكل أي قطعة من القطع الملونة في الشكل 5.

ملاحظة

مساحة القطعة من القرص المحددة بالزاوية θ تعطى بـ $\frac{1}{2}r^2 \times \theta$



الشكل 7

في الشكل 4، نفترض أن لدينا المقطع الأول من حلزون أرخميدس (الخط المنحني الخشن الأسود الذي يحد المنطقة الداكنة)، ونريد حساب مساحة تلك المنطقة التي تشكل القطعة المستقيمة OW_0 جزءاً من حافتها. يقسم أرخميدس القطعة OA إلى p قطعة متساوية الطول، ويرسم دائرة p مراكزها المبدأ O (النقطة التي يدور حولها المستقيم المعني) وأنصاف أقطارها:

$$\frac{2\pi}{p}, 2 \times \frac{2\pi}{p}, 3 \times \frac{2\pi}{p}, \dots, 2\pi.$$

ونرسم أنصاف مستقيمت $OW_1, OW_2, \dots, OW_{p-1}$ بحيث يشكل كل اثنين متتاليين نفس الزاوية $\frac{2\pi}{p}$. طول القطعة OM_n التي قطعها النقطة M على المستقيم أثناء دورانه حول طرفه المثبت O ، يساوي (حسب خواص حلزون أرخميدس) قياس الزاوية التي دارها المستقيم من الموضع OW_0 إلى الموضع OW_n (بالراديان) (انظر الشكل 4). ولدينا

$$\frac{4\pi^3 n^2}{p^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{p} \times n \right)^2 \times \frac{2\pi}{p} = \text{مساحة } (OM_n r_n O)$$

مع $\frac{2\pi}{p} = \widehat{M_n O r_n}, \frac{2\pi}{p} \times (n+1) = OM_{n+1}, \frac{2\pi}{p} \times n = OM_n$

ولدينا

$$\frac{4\pi^3 (n+1)^2}{p^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{p} \times (n+1) \right)^2 \times \frac{2\pi}{p} = \text{مساحة } (O\rho_n M_{n+1} O)$$

ولدينا كذلك مساحة $(OM_n r_n O) > \text{مساحة } (OM_n M_{n+1} O) > \text{مساحة } (O\rho_n M_{n+1} O)$ ، أي

$$\frac{4\pi^3 (n+1)^2}{p^3} > \text{مساحة } (OM_n M_{n+1} O) > \frac{4\pi^3 n^2}{p^3}$$

مساحة $(OM_n M_{n+1} O)$ هي مساحة المنطقة المخططة باللون البرتقالي (انظر الشكل 6).

ومنه مساحة المنطقة الداكنة التي سنرمز لها بـ (\mathcal{H}) تحقق

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{4\pi^3 (n+1)^2}{p^3} > \text{مساحة } (\mathcal{H}) > \sum_{n=1}^{p-1} \frac{4\pi^3 n^2}{p^3}$$

أي

$$4\pi^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p^2} \right) > \text{مساحة } (\mathcal{H}) > 4\pi^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p^2} \right) \quad (1)$$

في زمان أرخميدس لم يكن مفهوم النهايات معروفًا، حتى لو كان ذلك واضحًا في ذهن أرخميدس لأنه كان يجيد طريقة الاستنفاد التي يستخدمها للإثبات بالنقيض، إذ يبين أن القيمة **لـ** التي نقرب منها عندما نزيد في دقة التقريبات هي القيمة **ط** المطلوب حسابها.

وفيما يخص مسألتنا يثبت أرخميدس اعتمادًا على العلاقة (1) والوضع الهندسي أن القيمة **لـ** التي نقرب إليها بهذه التقريبات نشك أن تكون هي $\frac{4\pi^3}{3}$ (عندما نزيد في عدد الدوائر وعدد المستقيمات (OW_k)). فيثبت أن

$$\frac{4\pi^3}{3} \not\approx \text{مساحة}(\mathcal{H}) \not\approx \frac{4\pi^3}{3}.$$

ملاحظة

واضح أنه لما يؤول p إلى لا نهاية نحصل على مساحة $(\mathcal{H}) = \frac{4\pi^3}{3}$ = ثلث مساحة الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها يساوي 2π . هنا يُمثل π طول القطعة التي تقطعها النقطة على نصف المستقيم خلال دورة كاملة للمستقيم OA ، ولكن في ذلك الزمان لم يكن، كما أشرنا إليه أعلاه، مفهوم النهايات ونظريات التقارب معروفين، لذلك أثبت أرخميدس بالنقيض أن

$$\frac{4\pi^3}{3} = |\mathcal{H}| \frac{4\pi^3}{3} \not\approx \text{مساحة}(\mathcal{H}) \not\approx \frac{4\pi^3}{3}$$

أي

نفترض أن $|\mathcal{H}| < \frac{4\pi^3}{3}$ ونضع $\varepsilon = \frac{4\pi^3}{3} - |\mathcal{H}|$ نستعمل العلاقة $\frac{4\pi^3}{3} - \varepsilon < |\mathcal{H}|$ لنجد

$$|\mathcal{H}| + \varepsilon - \frac{4\pi^3}{2p} + \frac{4\pi^3}{6p^2} < |\mathcal{H}|$$

ويمكن أن نزيد في دقة التقسيم، أي نرفع قيمة p فيصغر الحد $-\frac{4\pi^3}{2p} + \frac{4\pi^3}{6p^2}$ لنحصل على

$$|\mathcal{H}| + \varepsilon' < |\mathcal{H}| \text{ وهذا مستحيل. ومنه } |\mathcal{H}| \text{ ليس أقل تمامًا من } \frac{4\pi^3}{3}.$$

بنفس الطريقة يبرهن أرخميدس أن $|\mathcal{H}|$ ليس أكبر تمامًا من $\frac{4\pi^3}{3}$.

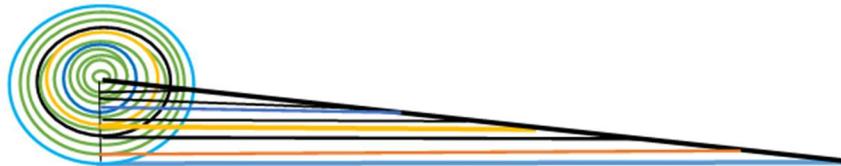
هكذا يبنى أرخميدس حساب مساحة المقطع الأول أي

$$\frac{4\pi^3}{3} = \text{مساحة}(\mathcal{H})$$

وكان ذلك هو المطلوب.

3. طريقة كافاليري

تستخدم طريقة **كافاليري** (Cavalieri) للمقاطع غير القابلة للتجزئة (خطوط أو صفائح)، واستعمالها يتطلب حذرًا كبيرًا، إذ يمكن أن تؤدي إلى نتائج خاطئة. أول استعمال لهذه الطريقة هو من أجل إثبات مساواة مساحة دائرة بمساحة مثلث.

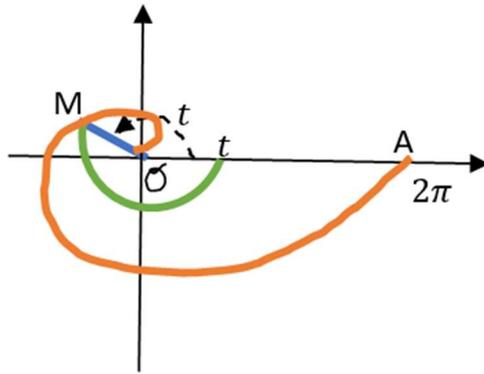


الشكل 8

طريقة كفاليري لحساب مساحة المقطع الأول لحلزون أرخميدس

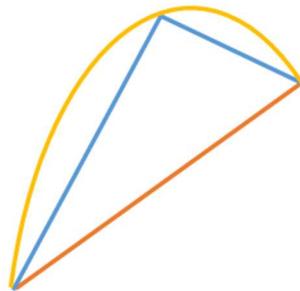
في هذه الطريقة يستغل كفاليري أقواس "دوائر أرخميدس" الواقعة في المنطقة الداكنة من الشكل 4 أعلاه، أي الأقواس الموجودة داخل المنطقة الداكنة من الشكل 4، ثم يفترض أن في كل نقطة من القطعة OA تمر دائرة مركزها O ، ما يجعل مجموعة أقواسها الموجودة داخل الحلزون تملأ قطعة الحلزون بكاملها. كما لاحظ أنه لو نقوم شاقوليًا هذه الأقواس المختلفة الأطوال (الموجودة داخل الحلزون)، كل واحد من منشئه، نجد أنها تملأ منطقة على شكل مساحة قطع مكافئ (انظر الأشكال 11-14). ومعادلته يمكن أن نستنتجها كما يلي:

الزاوية التي تحدد القوس الأخضر هي $2\pi - t$ ، ونصف قطر القوس هو القوس الأخضر وهو قوس من الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها t ، وهو متمم القوس من نفس الدائرة والمحدد بالزاوية $t = \theta$ راديان. t هي المسافة التي قطعها النقطة على القطعة المستقيمة، وهي كذلك قياس الزاوية (بالراديان) التي دارتها القطعة المستقيمة حول المبدأ بعد وصول النقطة M إلى موضعها الحالي.



الشكل 9: طول OM يساوي قياس الزاوية \widehat{AOM} .

حسب تعريف "حلزون أرخميدس"، فإن طول القطعة OM هي المسافة التي قطعها النقطة M المذكورة في تعريف حلزون أرخميدس، لما تكون القطعة المستقيمة OA قد دارت بالزاوية \widehat{AOM} . ومنه، حسب نفس التعريف، فإن طول $(OM) =$ قياس (\widehat{AOM}) بالراديان t .
ومنه طول القوس الأخضر يساوي $t(2\pi - t)$.
إذن أطوال أقواس الدوائر التي رسمناها تساوي $t(2\pi - t)$ حسب قيمة t التي تمثل المسافة التي قطعها النقطة M على القطعة المستقيمة OA .



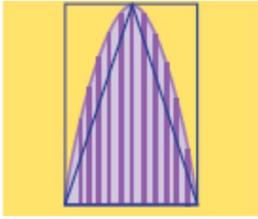
الشكل 10

ومنه، بتقويم هذه الأقواس شاقوليًا من منشئها، نلاحظ أن أطرافها تقع على قطع مكافئ معادلته $y = 2\pi x - x^2$.

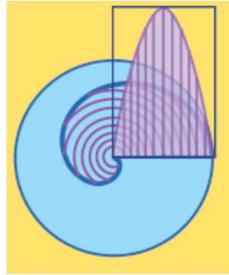
وحسب ما كان معروفًا حتى في عهد أرخميدس، فإن مساحة مقطع من سطح قطع مكافئ تساوي $\frac{4}{3}$ مساحة المثلث الذي قاعدته هي قاعدة المقطع المعني، ورأسه يقع على منحنى القطع المكافئ، بحيث يكون المستقيم النازل من هذا الرأس، والموازي لمحور القطع المكافئ، منصفًا للقاعدة.

في مسألتنا هذه، كما يوضحه الشكل 14، فإن مساحة الشكل المكافئ الذي تملؤه مجموعة الأقواس المقوّمة تساوي $\frac{4}{3}$ من مساحة المثلث الذي طول قاعدته 2π وارتفاعه π^2 (وهذا حسب المعادلة $y = 2\pi x - x^2$). إذن مساحة المقطع هي

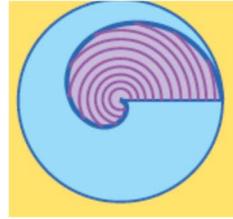
$$\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \times 2\pi \times \pi^2 \right) = \frac{4\pi^3}{3}.$$



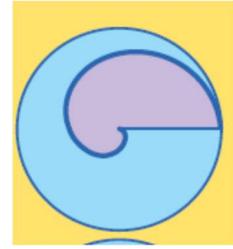
الشكل 14



الشكل 13



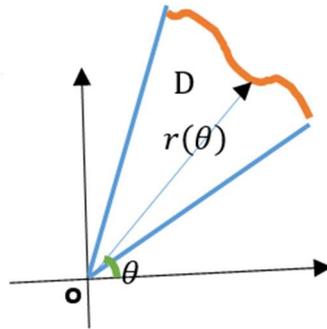
الشكل 12



الشكل 11

أما حاليًا، ومنذ القرن الثامن عشر، يمكن أن نحسب تلك المساحة بعدة طرق مختلفة:

طريقة 1 -



الشكل 15

إذا رمزنا بـ D للمنطقة المبيّنة في الشكل 15، وهي المنطقة المحددة بالمستقيمين الأزرقين والمنحنى الأحمر الذي يعطى وسيطيًا بـ:

$$\left\{ (x, y); \begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta; \theta \in [\theta_0, \theta_1] \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \right\}$$

حيث $r(\theta)$ هو تابع مستمر يمثّل مسافة نقطة من على المنحنى الأحمر إلى المبدأ O ، فإن

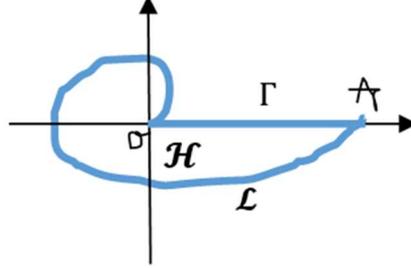
$$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r(\theta)^2 d\theta = \text{مساحة}(D). \quad (2)$$

بالنسبة لحلزون أرخميدس لدينا $r(\theta) = \theta$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ومنه

$$\frac{4\pi^3}{3} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \text{مساحة } (\mathcal{H}).$$

- طريقة 2 (باستخدام صيغة غرين-ريمان)



الشكل 16

$$\Gamma \cup \mathcal{L} = \partial\mathcal{H} = \text{حافة } (\mathcal{H})$$

$$\mathcal{L} = \{(\theta \cos(\theta), \theta \sin(\theta)); \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Gamma = \{(t, 0); t \in [0, 2\pi]\}$$

حسب نظرية غرين-ريمان (Green-Riemann)، فإن المنطقة \mathcal{H} المراد حساب مساحتها، تتكون حافتها من جزئين: منحنى أرخميدس، رمزنا له بـ \mathcal{L} ، وقطعة مستقيمة OA ، رمزنا لها بـ Γ . ونعرف أن مساحة منطقة ما يمكن حسابها بالتكامل على حافتها اعتماداً على صيغة غرين-ريمان.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx &= \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{H}} xdy - ydx = \text{مساحة } (\mathcal{H}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(\theta)d(y(\theta)) - y(\theta)d(x(\theta)) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t d0 - 0 dt. \end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\theta \cos(\theta)(\sin\theta + \theta \cos\theta) - \theta \sin(\theta)(\cos\theta - \theta \sin\theta)) d\theta + 0 &= \text{مساحة } (\mathcal{H}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{4\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

- طريقة 3

كما يمكن حساب تلك المساحة بالاعتماد على نظرية تغيير المتحول في التكاملات الثنائية:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \iint_{G'} f(\varphi(u, v)) |J_{\varphi}(u, v)| du dv. \\ \iint_{G'} |J_{\varphi}(r, \theta)| dr d\theta &= \iint_{G=\varphi(G')} 1 dx dy = \text{مساحة } (G) \text{ من } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

$$J_{\varphi}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \cdot G = \varphi(G')$$

في حالتنا

$$G = (\mathcal{H}) = \{(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta); 0 \leq r \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$= \varphi \underbrace{\{(r, \theta); 0 \leq r \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}}_{G'}$$

$$G' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\varphi: G' \rightarrow G = \mathcal{H}; \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

إذ أن

$$J_{\varphi}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} (r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

وبالتالي

$$\frac{4\pi^3}{3} = \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta} r dr \right) d\theta = \iint_{D'} |J_{\varphi}(r, \theta)| dr d\theta = \iint_{(\mathcal{H})} dx dy = (\mathcal{H}) \text{مساحة}.$$

مراجع

- [1] Archimède, Les œuvres complètes d'Archimède,
https://abel.math.harvard.edu/archive/archimedes09/pdf/VerEecke_DC.pdf
- [2] Bettinelli, B., Le trésor d'Archimède, Irem de Besançon, 1988.
<https://bibnum.publimath.fr/IBC/IBC88001.pdf>
- [3] Bettinelli, B., Intuition et démonstration chez Archimède, Irem de Besançon, 1991.
https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr91006_1702752434314-pdf
- [4] Edwards, C. H., The Historical Development of the Calculus, Springer, 1979.
- [5] Fray, M., Etude d'antennes large bande miniatures à spirale d'Archimède, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, 2019.
https://theses.hal.science/tel-02938043v1/file/These-2019-MATHSTIC-Electronique-FRAY_Mickael.pdf
- [6] Cabeza-Orcel Paloma et Leauva Daëna, Etude de la quadrature de la spirale d'Archimède, Projet de géométrie, Master 1, 2010/2011, Université Paris-Sud 11.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Projet-geometrie/Daena-Paloma.pdf>
- [7] Stoll, A., Les spirales (1 partie), Irem de Strasbourg, 1999.
<https://bibnum.publimath.fr/IST/IST99071.pdf>
- [8] Stoll, A., Les spirales, Irem de Strasbourg, 2000.
<https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR00019.pdf>
- [9] https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature_de_la_parabole
- [10] <https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.s/spirarchimede.html>
- [11] <https://www.mathweb.fr/euclide/2018/08/28/lexistence-de-pi/>
- [12] https://fr.wikipedia.org/wiki/Spirale_d%27Archim%C3%A8de
- [13] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookXII/propXII15.html>