ثنائية النظام والفوضى الحتمية في مجموعات فاتووَجوليا

سكينة عثماني
أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
sakina.othmani@g.ens-kouba.dz

"في مجموعة ماندلبروت، توفر لنا الطبيعة (أم هي الرياضيات؟) نظيرًا بصريًا قويًا للفكرة الموسيقية المتمثلة في "الموضوع والتباين". تتكرر الأشكال نفسها في كل مكان، لكن كل تكرار يحمل اختلافًا طفيفًا عن سابقه. ما كان لمثل هذه الخاصية التكرارية المدهشة أن تُكتشف لو اقتصرنا على الحساب اليدوي، بل أعتقد أنه ما كان لأي عقل، مهما بلغت براعته أو إبداعه، أن "يبتكر" هذا الموضوع الغني والمعقد مع تنويعاته التي لا تحصى.
هذه البنية لا تترك مجالًا للملل، لأن عناصر جديدة تظهر باستمرار، ولا تتيح مجالًا للتيه، لأن الأنماط المألوفة تعود إلينا مرارًا وتكرارًا. ونظرًا لهذه الحداثة المستمرة، فإن هذه المجموعة لا تعتبر كسورية بالمعنى الدقيق لمعظم التعريفات؛ بل يمكننا أن نسميها "كسورًا حديًا"، كسورًا يحتوي في داخله على كسوريات لا حصر لها. فمقارنة بالكسوريات المعروفة، فإن هياكلها أكثر تنوعًا، وتناغماتها الهندسية أكثر ثراءً، ومفاجآتها أكثر إثارة للدهشة."

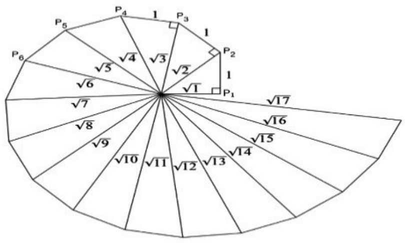
بينوا ماندلبروت (Benoît Mandelbrot)

1. شجرة فيثاغورس

كما سبق لنا الذكر في مقال الهندسة الكسورية: عالم من التعقيد والجمال (1)، فيثاغورس (Pythagoras) شخصية بارزة في الفلسفة والرياضيات، عُرف بين معاصريه كمؤسس لأخوية دينية وتعليمية في جنوب إيطاليا، وتحديدًا في مدينة كروتوني. على الرغم من أن مبرهنة فيثاغورس كانت معروفة قبل زمنه بفترة طويلة، إلا أن مدرسته أسهمت في توسيع فهمها وإثباتها بأسلوب أكثر منهجية. ومن بين أبرز الاكتشافات المنسوبة إليه أو إلى أتباعه، إثبات عدم التناسب بين ضلع المربع وقطره، وهو اكتشاف ثوري آنذاك، حيث كشف أن النسبة بين قطر المربع وضلعه عدد غير نسبي، أي أنه لا يمكن التعبير عنه كنسبة عددين صحيحين. شكّل هذا الاكتشاف تحديًا للمفهوم السائد في ذلك الوقت بأن جميع الأعداد يمكن تمثيلها كنسب بين أعداد صحيحة، مما أدى إلى ظهور مفاهيم جديدة في الرياضيات.

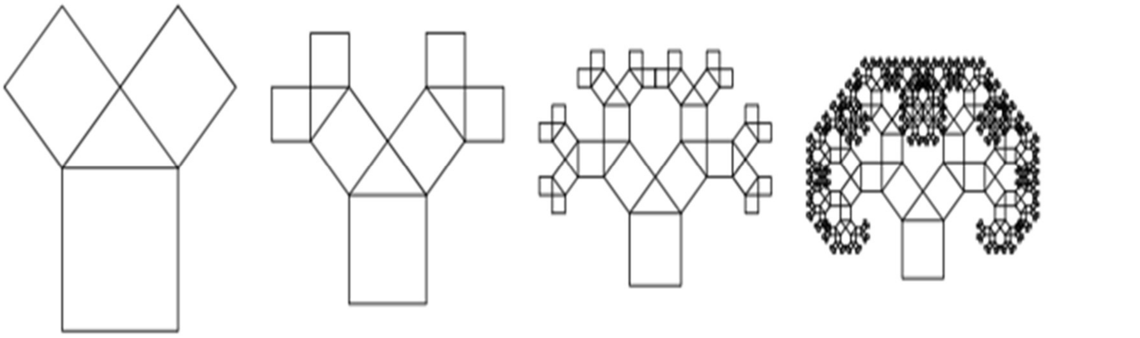
فيثاغورس الساموسي

ألهم حساب الجذور التربيعية علماء الرياضيات لاكتشاف بعض التركيبات الهندسية الرائعة. أحدها يسمح لنا بتشكيل $\sqrt{n}$ لأي عدد صحيح n . يمكن تسميته بحلزونية الجذر التربيعي، وهو عبارة عن متتالية هندسية تراجعية.



الشكل 1. حلزونية فيثاغورس

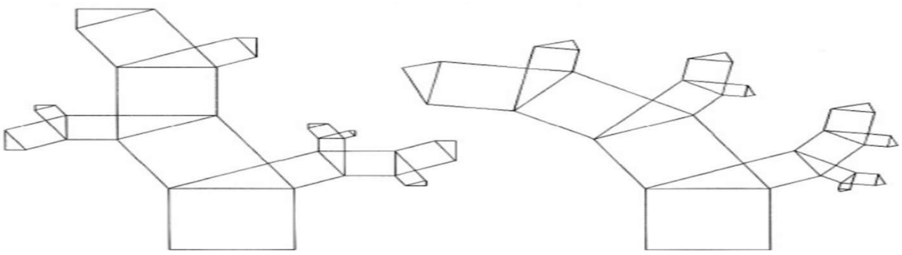
تدخل هذه الحلزونية كلبنة أساسية في تركيب أشجار فيثاغورس وشبيهاتها. لبناء هذه الأخيرة، نبدأ برسم مربع، ثم نضيف إليه مثلثًا قائمًا ومتساوي الساقين على أحد أضلاعه، بحيث يكون هذا الضلع هو الوتر. في الخطوة التالية، نرسم مربعين على امتداد الضلعين الآخرين للمثلث، مع إضافة مثلثين قائمين على كل مربع. في الخطوة الثالثة، نضيف أربعة مربعات متصلة بأربعة مثلثات قائمة، ثم نواصل تكرار هذه العملية بالنمط ذاته، مما يؤدي إلى إنشاء التركيب الهندسي الموضح في الشكل التالي.



الشكل 2. مراحل تشكيل شجرة فيثاغورس بمثلثات قائمة

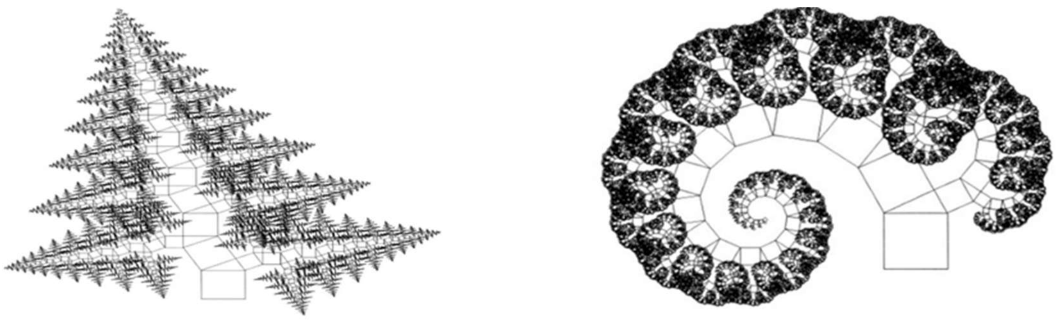
بمجرد أن نفهم هذا البناء الأساسي، يمكننا تعديله بطرق مختلفة. على سبيل المثال، ليس من الضروري أن تكون المثلثات قائمة الزاوية المرفقة في العملية مثلثات متساوية الساقين؛ إذ يمكن أن تكون أي مثلث قائم الزاوية.

يمكن إرفاق المثلثات قائمة الزاوية في الاتجاه ذاته دائمًا، أو قد نقلب اتجاهها بعد كل خطوة. يوضح الشكل أدناه الاحتمالين.



الشكل 3. أنماط شجرة فيثاغورس بمثلثات متساوية الساقين

بعد حوالي خمسين خطوة، ينتج لنا هذان التركيبان:

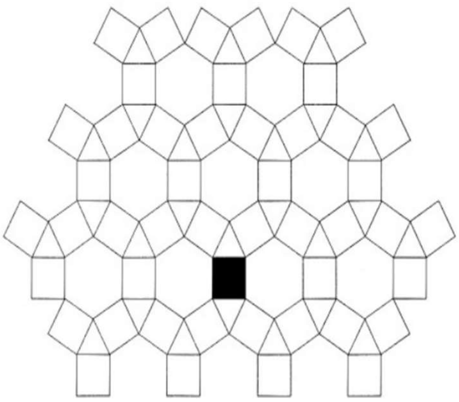


(أ) (ب)

الشكل 4. التركيب الحلزوني والشجيري لشجرة فيثاغورس

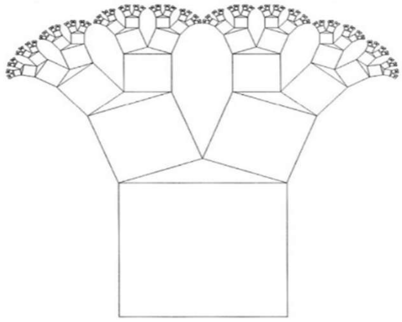
من اللافت للنظر أن التغيير الوحيد هو اتجاه المثلثات وليس حجمها. ومع ذلك، فإنّ النتائج تبدو متفاوتة للغاية. في الحالة (أ) للشكل 4، نرى نوعًا من أوراق الشجر الحلزونية، بينما نلمس في الحالة (ب) للشكل ذاته نوعًا من أوراق نبات السرخس أو شجرة الصنوبر. في التركيب (ب) نرى جذعًا رئيسيًا تتفرع منه فروع تتشعب بنمط يمين ثم يسار ثم يمين ثم يسار، إلخ. يبدو هذا مختلفًا تمامًا في البناء (أ)، حيث نلاحظ جذعًا رئيسيًا يتجعد ويتفرّع منه تفرّعٌ في جانب واحد فقط. للوهلة الأولى يبدو لنا أن كلا النباتين ينتميان إلى عائلتين مختلفتين تمامًا. إذ من المستبعد التخمين أن كلاهما مستمد من مبدأ التغذية الراجعة ذاته. يتضح ذلك عند تحليل عمليات البناء، وهي إحدى الطرق التي قد تساعد الكسوريات في إدخال أدوات جديدة في علم النبات.

من خلال مواصلة النظر في هذه التركيبات البدائية والمذهلة، وإجراء بعض التعديلات عبر استخدام أنواع مختلفة من المثلثات، يفتح هذا أمامنا مجالًا واسعًا لاستكشاف مجموعة متنوعة من الأشكال الرائعة المشابهة للنباتات. بإرفاق مثلثات متساوية الأضلاع في التركيبات السابقة، نحصل على البناء الدوري الموضح في الشكل 5.



الشكل 5. البناء المتناظر لشجرة فيثاغورس بمثلثات متساوية الاضلاع

وبالانتقال من المثلثات المتساوية الأضلاع إلى المثلثات متساوية الساقين ذات الزوايا المنفرجة، تنتج لنا مفاجأة هندسية أخرى: بناء تكرار يشبه البروكلي كما هو موضح في الشكل 6 [2]، [8]، [14].



الشكل 6. تركيب شجرة فيثاغورس باستخدام مثلثات متساوية الساقين ذات زوايا منفرجة

2. الكون في معادلة

يمكن تصنيف الكسوريات بناءً على آليات توليدها، إلى ثلاثة أنماط أساسية:

- **الكسوريات الحتمية** التي تُبنى عبر خوارزميات رياضية قابلة للتكرار بدقة، مثل مجموعة كانتور ومثلث سيربنسكي؛
- **الكسوريات الاحتمالية** التي تُولّد من عمليات عشوائية موجّهة بقواعد إحصائية، وتُستخدم غالبًا لنمذجة الظواهر الطبيعية؛
- **الكسوريات الديناميكية** التي تُمثل حالة خاصة تجمع بين الحتمية والتعقيد غير الخطي، وأبرز أمثلتها مجموعات فاتو وجوليا ومجموعة ماندلبروت.

تكشف هذه المجموعات عن بنىً كسورية بالغة الإثراء. يوضح هذا التطور كيف انتقل مفهوم الكسوريات من هياكل هندسية بسيطة تُبنى يدويًا إلى أنظمة ديناميكية معقدة تنبثق تلقائيًا من قواعد رياضية أولية، مما يوسع فهمنا لكيفية ظهور التعقيد اللانهائي في الطبيعة والرياضيات على حدٍ سواء.

1.2. مجموعة فاتو وَجوليا: الثنائية الأساسية بين الاستقرار الديناميكي والفوضى الحتمية

تندرج مجموعات جوليا ضمن أكثر الكسوريات المصورة التي تجمع بين الجمالية والواقعية في آنٍ واحد. تعود نشأة هذه الثنائية إلى الأعمال الرائدة التي قام بها العالمان الفرنسيان غاستون جوليا Gaston Julia (1893–1978) وَبيير فاتو Pierre Fatou (1878–1929) في مجال التكرار والديناميكية في المستوى العقدي مطلع القرن العشرين.

فقَدَ جوليا أنفه خلال الحرب العالمية الأولى، الأمر الذي أدى إلى ارتدائه حزامًا جلديًا أسود يغطي الجزء السفلي من وجهه لبقية حياته.

بيير فاتو

غاستون جوليا

1.1.2. أصول مجموعة جوليا

تتأصل الفكرة الجوهرية لمجموعات جوليا في تاريخ الرياضيات أبعد مما قد يبدو للوهلة الأولى، حيث تمتد جذورها إلى القرن السابع عشر. لم يكتفِ اسحاق نيوتن Isaac Newton (1642–1727) بإرساء قواعد الميكانيكا الكلاسيكية والبصريات والحساب التفاضلي، بل ابتكر أيضًا أدوات رياضية عملية لا تزال تستخدم على نطاق واسع حتى يومنا هذا. وأبرز هذه الأدوات هي خوارزمية نيوتن (المعروفة بطريقة نيوتن-رافسون) لإيجاد جذور المعادلة

$$f(x) = 0.$$

تعتمد هذه الطريقة على عملية تكرارية ديناميكية تبدأ بتخمين أولي x_0، ومعرفة بالعلاقة التراجعية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

حيث تتقارب هذه المتتالية، تحت شروط مناسبة، نحو أحد جذور المعادلة. تُمثّل هذه الخوارزمية مثالًا مبكرًا على نظام ديناميكي حتمي يمكن أن يؤدي سلوكه، عند تعميمه على المستوى العقدي، إلى ظهور هياكل معقدة وغير متوقعة، وهي الفكرة التي ستمهّد الطريق لاكتشاف المجموعات الكسورية لاحقًا [11].

انبثق من هذه الخوارزمية البسيطة تساؤل رياضي عميق: ما هي الحدود الحقيقية لنفوذ كل جذر؟ أو بعبارة أدق، إلى أي مدى يمتد حوض الجذب الخاص بكل جذر، وكيف تبدو الحدود الفاصلة بين هذه الأحواض؟

أول من واجه هذا التساؤل بجدية علمية، كان عالم الرياضيات البريطاني اللورد آرثر كايلي Arthur Cayley (1821–1895). ففي عام 1879، نشر بحثًا بعنوان "المشكلة التخيلية لنيوتن-فوريبه" [3]، اختار فيه معادلةً بسيطةً في الظاهر، هي

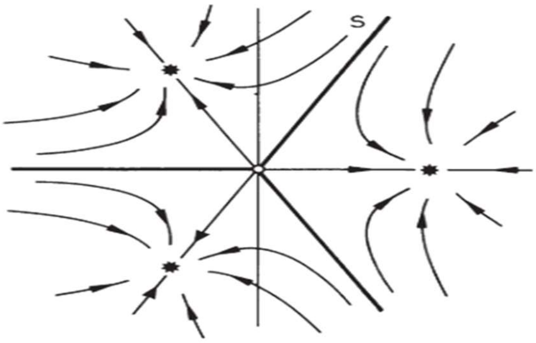
$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

التي لها ثلاثة جذور متناظرة

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = e^{\frac{2\pi}{3}},\ \alpha_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

طبّق كايلي هذه الخوارزمية المعممة على المستوى العقدي كأداة استكشافية بهدف تتبّع تقارب أي نقطة ابتدائية z_0. وبناءً على ذلك، توصل نظريًا إلى أن المستوى العقدي مقسم إلى ثلاثة أحواض جذب متمايزة وموضحة في الشكل 7، تعرف بالمجموعة

$$\left\{ z_0 \in \mathbb{C} :\ \lim_{n\to+\infty} z_n = \alpha_i,\ i = 1,2,3 \right\}.$$



الشكل7. أحواض الجذب الثلاثة

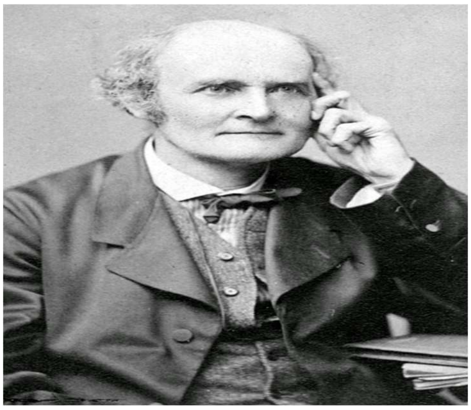
بهذا الاستنتاج، لم يُجِب كايلي عن سؤال "إلى أين تتقارب؟" فحسب، بل وضع الإطار لسؤال أكثر تعقيدًا: كيف تبدو هندسة هذه الأحواض وحدودها؟ وهو التساؤل الذي سيقود لاحقًا إلى اكتشاف التعقيد الكسوري الفريد لمجموعات جوليا. إدراك كايلي للتعقيد المتأصل في تلك الحدود كان أكثر أهمية من الاستنتاج النظري للأحواض نفسها. فقد اكتشف

أن الخطوط الفاصلة بين الأحواض بعيدة كل البعد عن البساطة أو الانتظام. بدلًا من حدود منتظمة يمكن وصفها هندسيًا، وجد أنها غير مستقرة بشكل أساسي، لدرجة أن نقطتين متجاورتين بشدة قد تتقاربان نحو جذرين مختلفين تمامًا.

هذه الحساسية المفرطة للشرط الابتدائي، وهي السمة المميزة لما يُسمّى اليوم بـ "الفوضى الحتمية"، جعلت من المستحيل رسم أو وصف هذه الحدود باستخدام الأدوات الهندسية التقليدية. كانت هذه لحظة فارقة في تاريخ الرياضيات: كشفت أن وراء الخوارزمية البسيطة يختبئ عالم من التعقيد غير الخطي الذي لا يمكن اختزاله إلى هندسة مألوفة [4]، [12].

على مدى العقود التالية، حاول علماء رياضيات بارزون البناء على عمل كايلي، لكنهم فشلوا في وضع نظرية عامة تشرح هذا السلوك المعقد. لم يكن هذا الفشل بسبب قصور فيهم، بل لأن الإطار الرياضي الكلاسيكي كان عاجزًا عن وصف هذه الظاهرة التي تطلبت لغة رياضية جديدة متمثلة في الهندسة الكسورية، التي لم تكن قد وُلدت بعد. كانت عين الرياضيات ترى الظاهرة، لكنها تفتقر إلى المفردات لوصفها.

اسحاق نيوتن



اللورد آرثر كايلي

2.1.2. بصمة جوليا وَفاتو في حل هذه المعضلة

في عام 1915، أعلنت الأكاديمية الفرنسية للعلوم أنها ستمنح جائزتها الكبرى في الرياضيات لمن يتمكن من تطوير نظرية شاملة للديناميكيات التكرارية في المستوى العقدي. وكانت المفاجأة أنه في عام 1918، فاز بالجائزة عالمِا الرياضيات الفرنسيان غاستون جوليا وبيير فاتو بشكل مستقل تقريبًا، حيث قدّما معًا أُسس الإطار النظري الحديث لما يعرف اليوم بالديناميكيات العقدية. وقد توصلا إلى أن المستوى العقدي ينقسم إلى منطقتين متكاملتين:

- **مجموعة فاتو**: وهي مناطق الاستقرار، حيث تتقارب التكرارات بشكل منظّم نحو مناطق جاذبة (مثل الأحواض التي درسها كايلي).
- **مجموعة جوليا**: وهي الحدود الفاصلة بين هذه المناطق، والتي تُمثّل مناطق الفوضى الحتمية.

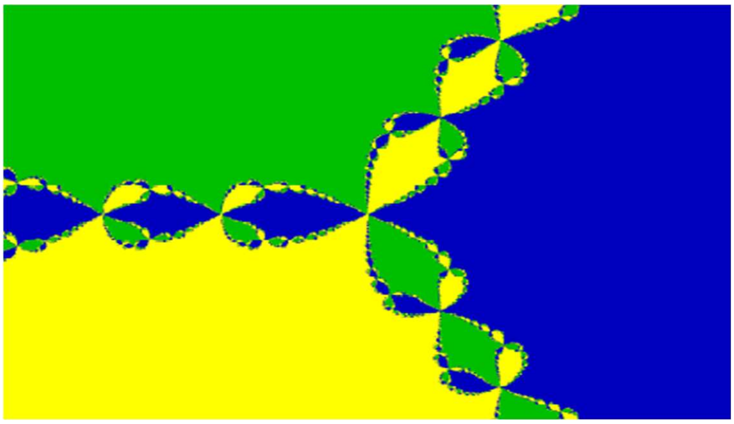
فهم جوليا بشكل خاص أن الأحواض الثلاثة في حالة كايلي تشترك في حدود مشتركة ومعقدة. أية نقطة على هذه الحدود تشبه تقاطع حدود ثلاث دول؛ ففي أي محيط صغير حولها، يمكن العثور على نقاط تنتمي إلى كل أحواض الجذب الثلاثة. هذا المفهوم أصبح التعريف الأساسي لمجموعة جوليا: هي الحدود المشتركة لجميع أحواض الجذب في النظام التكراري [1]، [6]، [7]، [9].

الخاصية الأكثر إذهالًا التي اكتشفاها هي أن مجموعة جوليا مختلطة تمامًا مع جميع أحواض الجذب؛ فهي ليست خطًا فاصلًا بسيطًا، بل كيان ذو بنية كسورية معقدة، حيث يتشابك النظام والفوضى بشكل لا يمكن فصله. بينما تمثل مجموعة فاتو جزُر الاستقرار والنظام في محيط هذه الفوضى المنظمة.

وهكذا، قدّم جوليا وَفاتو الثنائية الأساسية التي تشرح لغز كايلي: الاستقرار في مجموعة فاتو، والفوضى الحتمية في مجموعة جوليا.

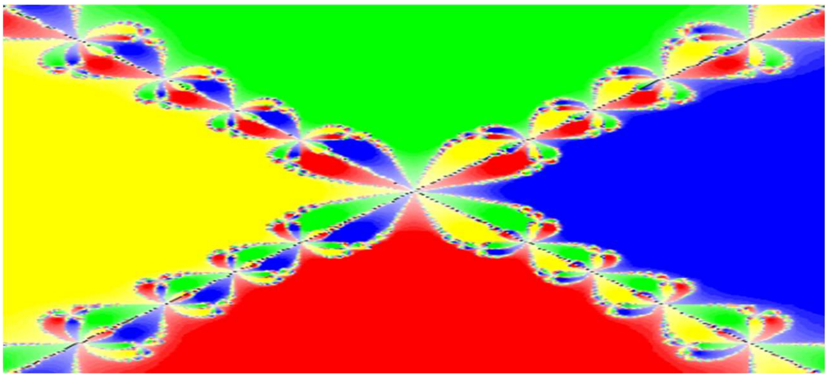
يوضح الشكل 8 أحواض الجذب للجذور α_1 ، α_2 و α_3 ملونة باللون الأزرق والأخضروالأصفر على التوالي. ما يلفت النظر في هذا التمثيل هو أن الحدود الفاصلة بين هذه الأحواض ليست خطوطًا عادية، بل هي بالضبط مجموعة جوليا للنظام التكراري المعرّف بالمعادلة $z^3 - 1 = 0$. هذه الحدود رغم دقتها الرياضية المتناهية تظهر بنية كسورية معقدة: إذ كل جزء صغير منها يكرر تعقيد البنية الكلية. وهي تعبّر عن تجسيد مرئي لحساسية الشروط الابتدائية، حيث أن أدنى انزياح عبر هذا الحد قد يغير تقارب النقطة من جذر إلى آخر.

وبهذا، لا يقتصر الشكل على عرض أحواض الجذب فحسب، بل يقدّم أيضًا تصويرًا مباشرًا للثنائية الأساسية في الديناميكيات المركبة: مناطق الاستقرار (مجموعة فاتو) الملونة، وحدود الفوضى المنظمة (مجموعة جوليا) التي تفصل بينها كشبكة معقدة لا نهائية.



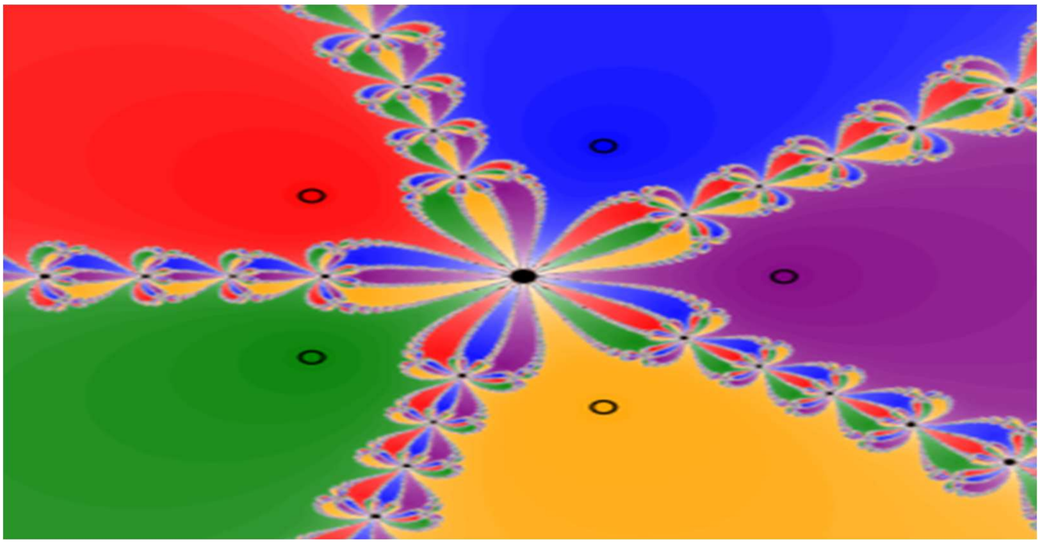
الشكل 8. ثنائية الاستقرار والفوضى الحتمية للمعادلة التكعيبية في المستوى المركب

بطريقة مماثلة، يمكن إيجاد أحواض الجذب لجذور المعادلة $f(z) = z^4 - 1 = 0$ وكذلك $f(z) = z^5 - 1 = 0$. تُمثّل المناطق الملونة في كل حالة أحواض الجذب المتناظرة هندسيًا لجذور هاتين المعادلتين. بالنسبة للمعادلة $z^4 - 1 = 0$، الجذور هي $\{-i, i, -1, 1\}$، وكل حوض يجذب النقاط نحو أحد هذه الجذور الأربعة كما هو موضح في الشكل أدناه.



الشكل 9. استقرار وفوضى الأحواض الأربعة

أما بالنسبة للمعادلة $z^5 - 1 = 0$، فالجذور هي $\left\{e^{\frac{8\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{2\pi i}{5}}, 1\right\}$. وكل حوض في الشكل 10 يجذب النقاط نحو أحد هذه الجذور الخمسة. تظهر الأحواض الخمسة بتناظر دائري مثالي، حيث تُشكّل أذرعًا كسورية متداخلة ومتشابكة، وكأنها بتلات لزهرة. الحدود بين هذه الأحواض، رغم كونها تفصل بين خمس مناطق مستقرة، تحتفظ تمامًا بنفس الطبيعة الكسورية الفوضوية التي ظهرت في حالة الجذور الأربعة والثلاثة، مما يؤكد أن طابع الفوضى الحتمية في هذه الحدود هو سمة عامة لا تتأثر بتغيّر عدد الجذور أو شكل المعادلة المدروسة [5]، [10]، [12]، [13].



الشكل 10. مجموعة فاتو مجموعة جوليا للأحواض الخمسة

3.1.2. سحر التربيع: رحلة الأعداد العقدية بين النظام والفوضى

تسمح العائلة البسيطة من الدوال التربيعية $f_c(z) = z^2 + c$ بالدخول إلى عالم مذهل من مجموعات جوليا الكسورية. كحالة خاصة نأخذ $c = 0$ ونقطة ابتدائية z_0 اعتباطية من $\mathbb{C}$. عندئذ يمكن تصنيف نقاط المستوى العقدي إلى ثلاث مجموعات أساسية:

- **مجموعة النقاط الهاربة (Escape Set):**

$$E_0 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\}.$$

- **مجموعة فاتو أو النقاط السجينة (Fatou /Prisoner Set):**

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}.$$

- **مجموعة جوليا (Julia Set):**

$$J_0 = \partial E_0 = \partial P_0 = \{ z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

في جميع الحالات، نلاحظ أن التكرارات تدور في مدار حول المركز، لكن المصير الحاسم يعتمد كليًا على النقطة الابتدائية: أي نقطة من P_0 تولّد متتالية تتقارب نحو المركز، كل نقطة من J_0 تؤدي إلى متتالية تبقى على الدائرة، أما النقط من E_0 فتنشأ عنها متتالية متباعدة. يقودنا هذا إلى ثنائية ديناميكية مهمة، حيث يتم تقسيم المستوى العقدي إلى المجموعتين المتمايزتين E_0 و P_0، تفصل بينهما حدود واضحة هي مجموعة جوليا J_0 [5]، [10]، [14].

4.1.2. تأثير المعامل c على مجموعة جوليا: من الحلقات إلى الغبار

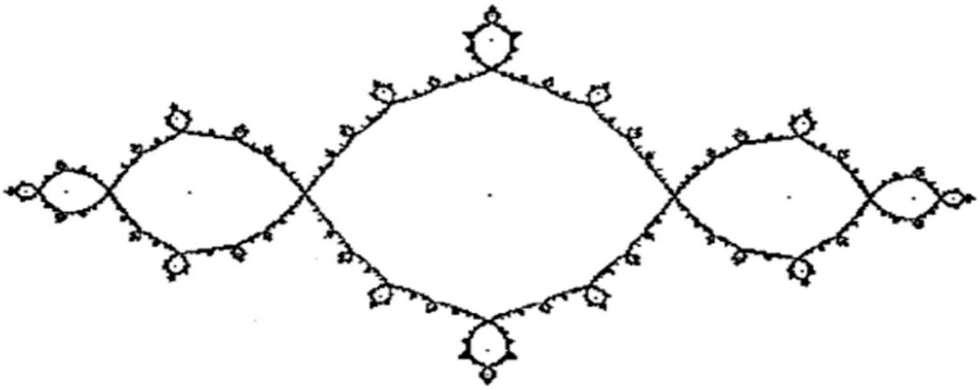
من الجدير بالذكر أن دراسة الحالة الخاصة $f_c(z) = z^2 + c$ قد توحي بأن مجموعات جوليا هي كيانات هندسية ناعمة ومنتظمة (كالدائرة). لكن الواقع أكثر إثمارًا وإدهاشًا؛ فالتغيير الطفيف في المعامل ينتج عالمًا كاملًا من

الأشكال الكسورية المتنوعة والمذهلة، بعضها على شكل سحابة كثيفة، وبعضها الآخر على شكل شجيرة نحيفة من العليق، وبعضها يشبه الشرر المتطاير في الهواء، والكثير منها على شكل ذيل حصان البحر [10]، [13]، [14].

نستعرض فيما يلي بعض الحالات المهمة للمعامل c:

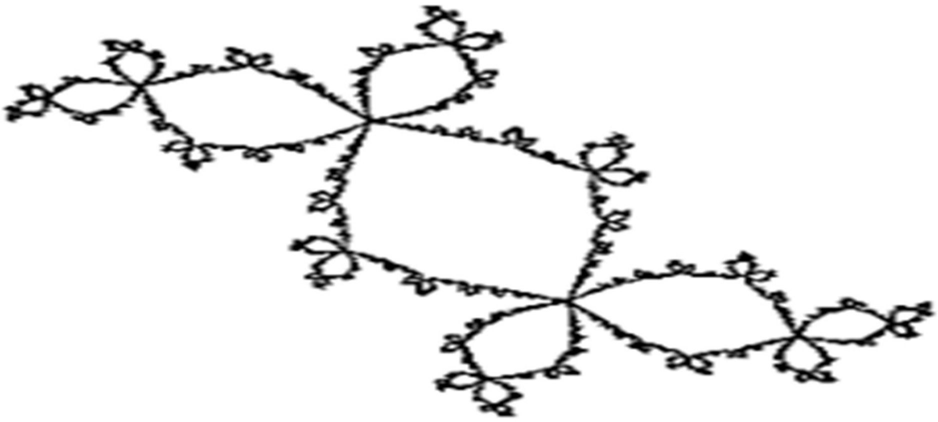
أ) **منطقة الاستقرار ($|c| < 0.25$)**: يؤدي تغيير قيمة c إلى تحول جذري في شكل مجموعة جوليا. في هذه الحالة، تظل شبيهة بالدائرة أو تأخذ شكل حلقة مُعقَّدة قليلًا، وتحتفظ ببنية متصلة وناعمة نسبيًا. مما يفسر بداية ظهور ملامح التعقيد الكسوري على حواف الدائرة، وكأنها تتنبأ بالتحولات العنيفة التي ستحدث عندما نبتعد عن هذه المنطقة المستقرة.

ب) **التشوه إلى حلقات**: بمجرد زيادة مقدار c، يصبح الجزء المتغير من الدالة مهمًّا، وتصبح صورتها غريبة. على سبيل المثال، تتكون مجموعة جوليا لقيمة المعامل $c = -1$ من حلقة مركزية محاطة بالعديد من الحلقات الأصغر المتلامسة، والتي بدورها محاطة بحلقات أصغر، وهكذا في عملية تكرارية لا نهائية (انظر الشكل 11).



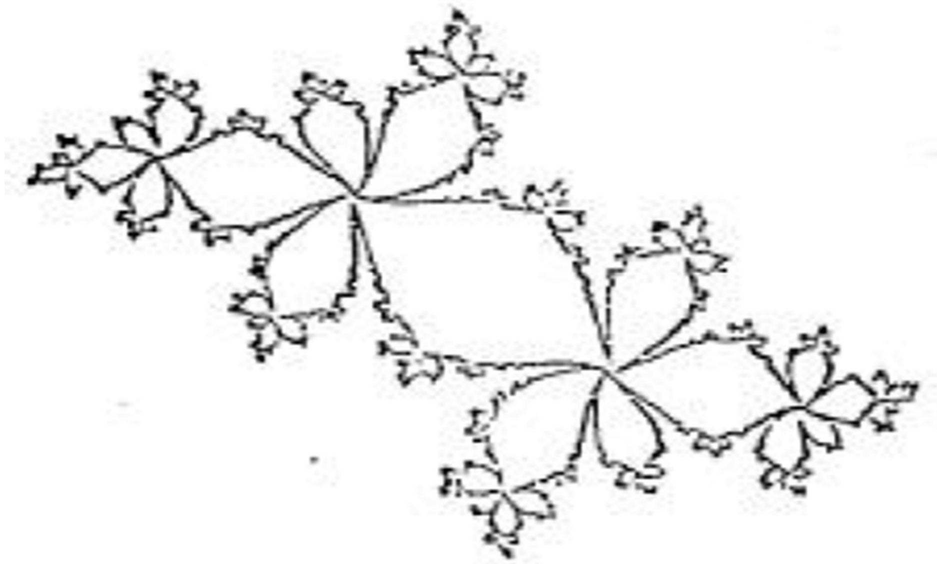
الشكل 11. التسلسل الهرمي لحلقات متداخلة

تنتج المجموعات الخاصة بقيم المعاملات الأخرى المزيد من المفاجآت. بالنسبة لقيمة c القريبة من $-0.123 + 0.745i$، تتكون مجموعة جوليا مرة أخرى من تسلسل هرمي من الحلقات، تلتقي كل ثلاث حلقات في نقطة واحدة كما هو موضح في الشكل 12. في هذه الحالة، يكون لـ f_c مدار جاذب بدورة ثلاثية يخلق نمطًا متناظرًا ثلاثيًا.



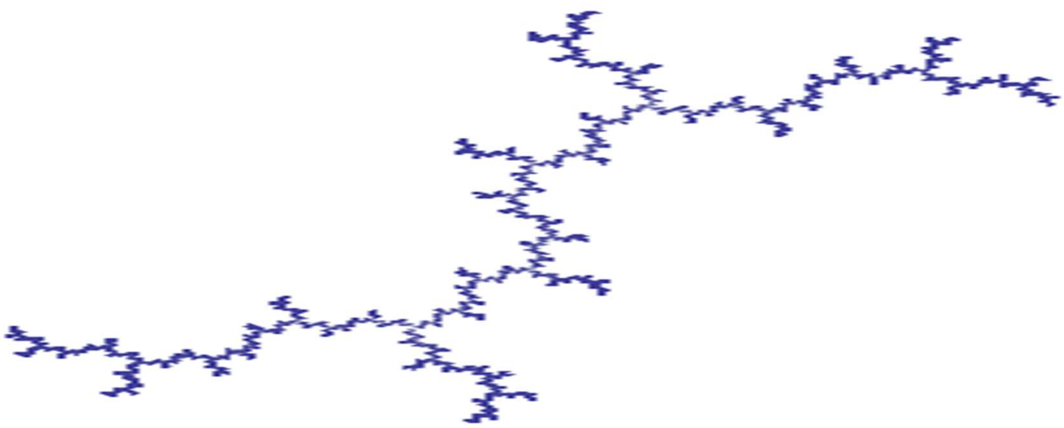
الشكل 12. التسلسل الهرمي لحلقات ثلاثية التناظر

عند زيادة قيمة c لتقترب من $-0.5 + 0.55i$، تظهر ظاهرة هندسية أكثر تعقيدًا: تتلاقى خمس حلقات في نقطة واحدة، كما يوضح الشكل 13. يعود هذا النمط الخماسي المذهل إلى وجود مدار جاذب بدورة خماسية في النظام الديناميكي لـ f_c. هذا يعني أن الدالة تدور بين خمس نقاط محددة بدقة، مما يخلق بنية جذب مركزية ذات تناظر خماسي.



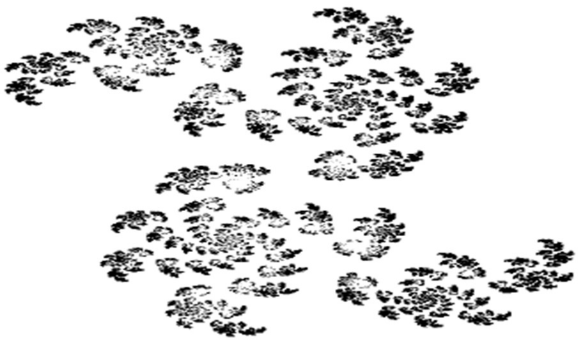
الشكل 13. التسلسل الهرمي لحلقات خماسية التناظر

ت) الشجيرة الكسورية: عند اختيار $c = -i$، يحدث تحول مدهش: تنهار الحلقات، وتأخذ مجموعة جوليا شكل شجيرة كسورية دقيقة التشعب تشبه غصن شجرة متجرد (الشكل 14). هذا التشكل يُمثّل حالة حرجة فاصلة بين نمطين أساسيين؛ فهو يقع على الحد الفاصل بين مجموعات جوليا المتصلة (ذات الطبيعة الحلقية) والمجموعات المنفصلة تمامًا (المعروفة بالغبار الكسوري).



الشكل 14. غصن كسوري

ث) الغبار الكسوري: مع ابتعاد قيمة الثابت c عن منطقة المجموعات المتصلة، تخضع مجموعة جوليا لتحوّل جذري في طبيعتها. خذ، على سبيل المثال، $c = 0.4 + 0.3i$ (كما في الشكل 15)، حيث تتفكك البنية تمامًا، ويتحول التجمع إلى سحابة من النقاط المنفصلة المعزولة. تُعرف هذه الحالة باسم "الغبار الكسوري"، وتُمثّل الطرف النقيض للبنى المتصلة.



الشكل 15. غبار كسوري

هذه الحالة توضح النهاية المنطقية لمسار تطور مجموعات جوليا: من النظام الكامل (الدائرة)، إلى الفوضى المنظمة (الشجيرة)، إلى الفوضى المجزأة (الغبار). رحلة تكشف كيف أن البساطة الرياضية يمكن أن تولد سلسلة متصلة من التعقيد: من الجمال الهندسي إلى الغموض الوجودي.

المراجع

[1] M. Audin, *Fatou, Julia, Montel: The Great Prize of Mathematical Sciences of 1918, and Beyond*, Springer, Berlin, 2011.

[2] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1993.

[3] A. Cayley, *The Newton-Fourier Imaginary Problem*, American Journal of Mathematics, 2(1), (1879) 97–102.

[4] A. Cayley, *Application of the Newton-Fourier Method to an Imaginary Root of an Equation*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 16, (1879), 179–185.

[5] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 2014.

[6] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles: Premier mémoire*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 47, (1919) 161–271.

[7] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles: Deuxième mémoire*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 48, (1920) 33–94.

[8] J. Feder, *Fractals*, Springer Science & Business Media, New York, 2013.

[9] G. Julia, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 8, (1918) 47–245.

[10] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman & Co., New York, 1983.

[11] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687.

[12] H.-O. Peitgen, D. Saupe, and F. v. Haeseler, *Cayley's problem and Julia sets*, The Mathematical Intelligencer, 6(2), (1984) 11–20.

[13] H.-O. Peitgen and P. H. Richter, *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[14] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York, 1992.