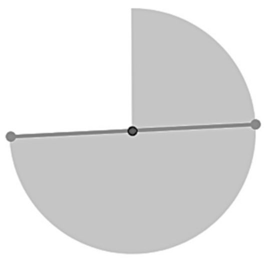
مسألة إبرة كاكيا

زلاسي حسن
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة الشهيد حمه لخضر، الوادي
z.hacen@gmail.com

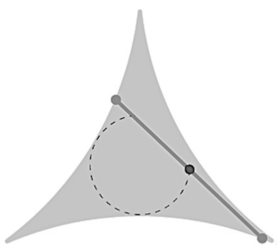
تُعَدّ مسألة كاكيا من المسائل الهندسية المعقدة والمثيرة والتي شغلت بال عديد من الباحثين منذ أن اقترحها سويتشي كاكيا (Sōichi Kakeya) في الحالة الخاصة بالسطوح المحدبة سنة 1917 [5]، وذلك لما لها من تطبيقات خاصةً في التحليل ونظرية الدوال.

تخيّل عزيزي القارئ أنك تمسك إبرة مستقيمة طولها 1، والإبرة هي قطعة مستقيمة رفيعة (يعني عديمة المساحة) موجّهة (متمايزة الأطراف)، وتريد أن تدوّرها دورة كاملة (360°) وهي تتحرك فوق ورقة حيث يمكنها أن تنزلق أو تدور، لكن دائمًا تبقى مستوية على الورقة. السؤال المركزي هنا هو البحث عن المساحة الصغرى التي يمكن أن تغطيها هذه الإبرة أثناء إتمامها دورة كاملة حول نفسها.

للوهلة الأولى قد يظن المرء أن الجواب البديهي هو مساحة قرص قطره مساوٍ لطول الإبرة، لكن المفاجأة أن هذا ليس الحل الأمثل؛ إذ يمكن تحقيق مساحات أصغر بكثير، مثل مساحة دِلتاوي (Deltoid) (انظر الشكل 2). في الحالة الخاصة بالأشكال المحدّبة، بيَّن غيولا بال (Gyula Pàl) أن الحل الأمثل، والذي يكون محدّبًا، يتمثّل في مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه 1 [6]، وهو ما يقدّم إجابة أنيقة ومكتملة لتلك الحالة. أمّا في الوضع العام حيث يُسمَح بالأشكال غير المحدّبة، فما يزال السؤال مفتوحًا، رغم أن النتائج المعروفة تُظهر إمكانية جعل المساحة الممسوحة صغيرة بقدر ما نشاء، وإن كان لا يمكن أن تنعدم تمامًا.



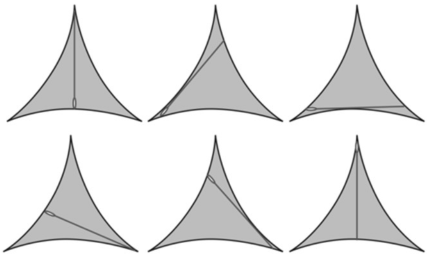
الشكل 1



الشكل 2

تسمّى المجموعة في المستوى التي يمكن تدوير قطعة مستقيمة طولها واحد داخلها بشكلٍ متواصل ومستمر بمقدار 180 درجة، بحيث تعود إلى موضعها الأصلي ولكن باتجاه معكوس (وبالتالي يمكن كذلك تدويرها 360 درجة)، بـ **مجموعة كاكيا**.

يُعدّ قرص قطره واحد مثالًا على مجموعة كاكيا. كذلك يُعدّ الدِلتاوي (Deltoid) مجموعة كاكيا، وهو بالمناسبة الحل الذي وضعه كاكيا نفسُه.



الشكل 3

هذا الإطار الهندسي البسيط كان منطلقًا لتعميمات عميقة، خاصةً في التحليل، حيث ظهر ما يُعرَف بـ **مخمّنة كاكِيا** (Kakeya Conjecture)، والتي سنتطرق لها لاحقًا. وقد تحقّق فيها تقدّم لافت بداية سنة 2025 في حالة البعد الثالث $n = 3$، بينما تبقى الحالة العامة أحد الألغاز الرياضية المعاصرة، لما لها من صلة وثيقة بتحويلات فورييه (Fourier Transform) ونظرية الدوال.

سويتشي كاكيا (1886–1947)

كان كاكيا عالمَ رياضيات يابانيًا متخصّصًا في التحليل الرياضي. طرح مسألة إبرة كاكيا، كما حلّ مسألة النقل (Transportation Problem). نال الجائزة الإمبراطورية للأكاديمية اليابانية للعلوم سنة 1928.

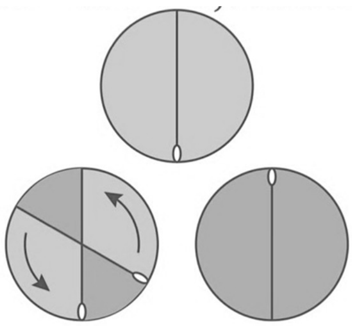
1. الحلول المحدَّبة

أوّل شكل يتبادر إلى الذهن بطبيعة الحال هو الدائرة، حيث أن ربع مساحتها (بفرض أن طول الابرة هو 1) هي

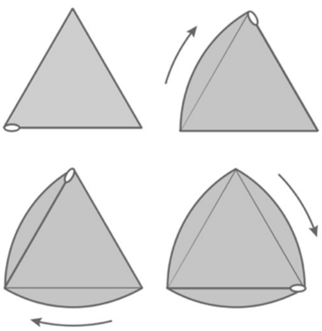
$$\frac{\pi}{4} \cong 0.78539..$$

في حالة الدائرة، لا نقوم إلا بتدور الإبرة حول نقطة واحدة ثابتة – منتصف الإبرة– وإذا سمحنا لها بالدوران حول عدة نقاط، فإننا نحسّن النتيجة باستعمال مثلث رولو (Reuleaux). في هذه الحالة المساحة هي

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \cong 0.70477..$$



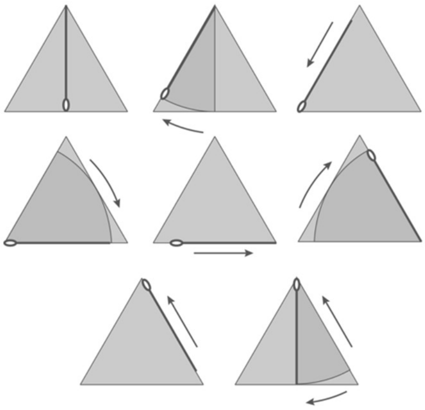
الشكل 4



الشكل 5

أمّا إذا جعلنا الإبرة تدور وتتحرك داخل مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه 1، فإن النتيجة تصبح أكثر إثارة للاهتمام، ويكون التحسين هذه المرة أكبر. في هذه الحالة المساحة هي

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.5773..$$

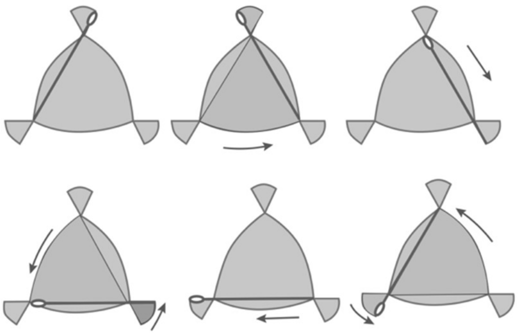


الشكل 6

في سنة 1921، بيّن عالمُ الرياضيات المجري غيولا بال أن المثلث المتساوي الأضلاع الذي ارتفاعه واحد هو أصغر شكل محدَّب يسمح بتدوير الإبرة بالكامل [6].

2. الحلول غير المحدَّبة

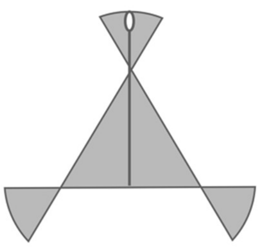
لاحظ أننا في الأمثلة السابقة قمنا بتدوير الإبرة بالنسبة إلى مركزها أو إلى النقطتين الحدّيتين لها، لمواصلة تحسين النتيجة، يمكن اعتبار مراكز تدوير أخرى وإضافة زوائد إلى الأشكال التي تم الحصول عليها سابقًا. وهكذا، عند إضافة هذه البروزات إلى مثلث رولو أصغر، نحصل على شكل ذي مساحة أصغر من مساحة المثلث المتساوي الأضلاع السابق. ونلاحظ أن هذه البروزات هي في الحقيقة مقاطع زاويّة من أقراص. في هذه الحالة المساحة مرتبطة بطول المثلث (أو نصف قطر البروزات) ونترك للقارئ الكريم التأكد من أنها أصغر من مساحة المثلث متساوي الأضلاع.



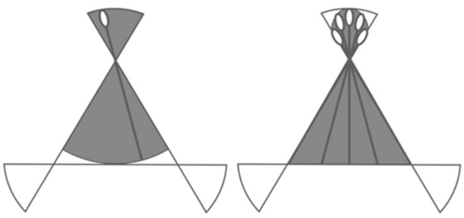
الشكل 7

ولكن إذا طبّقنا الفكرة ذاتها على المثلث المتساوي الأضلاع، فإننا نحصل على نتيجة أفضل من السابق.

وبالنظر بعناية إلى حركة الإبرة داخل الشكل الأخير (انظر الشكل 9)، نلاحظ أنه من الممكن إنشاء بروزات أصغر حجمًا من خلال الاستفادة القصوى من الحيّز المتاح. كلّ ما يلزم هو القيام، في الوقت ذاته، بعمليتي دوران الإبرة وانزلاقها، وهذا بطبيعة الحال يحسّن النتيجة السابقة.



الشكل 8



الشكل 9

3. مجموعة بيسيكوفيتش

مجموعة بيسيكوفيتش – نسبةً إلى العالم الروسي أبرام بيسيكوفيتش (Abram Besicovitch) – تُعرّف على أنها مجموعات من المستوى (أو حتى من فضاءات أقليدية أبعادها أكبر) تحتوي على قطعة مستقيمة طولها واحد في كل اتجاه. من الواضح أن مجموعة كاكيا هي مجموعة بيسيكوفيتش.

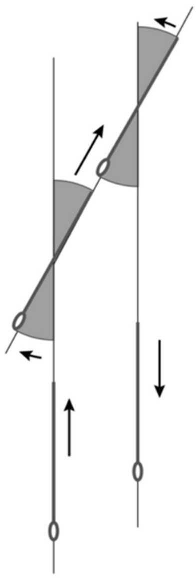
تمكّن العالم بيسيكوفيتش، باستخدام هذه المجموعات، من أن يبيّن أنّه لا يوجد حد أدنى موجب لمساحة مجموعات كاكيا. أي إنه لكل $\varepsilon > 0$، توجد مجموعة كاكيا مساحتها ε [1]. وقد بيّن بيسيكوفيتش في عمله عام 1919 أنّ مثل هذه المجموعة يمكن أن تكون ذات قياس صغير إلى حدٍّ كيفي.

إحدى طرق إنشاء مجموعة بيسيكوفيتش تُعرف باسم "شجرة بيرون" (Perron Tree)، وسُمّيت بهذا الاسم نسبةً إلى أوسكار بيرون (Oskar Perron) الذي تمكّن من تبسيط البناء الأصلي لبيسيكوفيتش. أمّا الإنشاء الدقيق والحدود العددية فقد عُرضت في كتاب بيسيكوفيتش التبسيطي حول الموضوع.

أبرهام بيسيكوفيتش (1891–1970)

كان بيسيكوفيتش عالم رياضيات روسيًا، اشتغل أساسًا في إنجلترا. حصل على جائزة آدمز سنة 1930، وعلى ميدالية دي مورغان سنة 1950، ثم ميدالية سيلفستر سنة 1952. وأصبح عضوًا في الجمعية الملكية البريطانية ابتداءً من عام

أوّل فكرة ينبغي ملاحظتها هي أن الإبرة يمكنها أن تتحرك في خط مستقيم لمسافةٍ مهما كانت طويلة من دون أن تمسح أي مساحة. ويعود ذلك إلى أن الإبرة عبارة عن قطعة مستقيمة ذات عرض منعدم – وبالتالي مساحتها منعدمة –. أما الفكرة الثانية فهي حيلة بال، المعروفة باسم وصلات بال (Pál joins)، فهي تصف كيفية تحريك الإبرة بين أي موقعين متوازيين مع مسح مساحة صغيرة جدًا بالقدر الذي نريد. فالفكرة هنا هي أن نقوم بتحريك الإبرة من الموقع الأول مسافةً معينة صعودًا، ثم تمسح زاوية معينة α بدوران مركزه منتصف الإبرة، ثم تتحرك على القطر حتى يصبح مركزها في المستقيم الثاني، وبعدها تمسح نفس الزاوية في الاتجاه المعاكس، ثم تنزل على الجانب الموازي الأيمن حتى تصل إلى الموقع الثاني المطلوب (انظر الشكل 10).



الشكل 10

المناطق الوحيدة غير معدومة المساحة التي تُمسح هي الأجزاء الأربعة من القرص الذي قطره واحد التي تظهر في الشكل 10. وبالتالي تكون المساحة الممسوحة متناسبة مع الزاوية α، وعليه، يمكن جعل المساحة الممسوحة صغيرةً كما نريد باختيار قيمة صغيرة جدًا لـ α .

هذه الفكرة هي المنطلق الأساسي الذي يتيح لنا تقليل مساحة مجموعة كاكيا. فكلما كان الانتقال (أو الإزاحة) أكبر، كانت الزاوية أصغر، وبالتالي المساحة الناتجة عن هذا الدوران تكون أصغر. لنشرح الآن كيفية إنشاء شجرة بيرون.

ننطلق من أي مثلث ارتفاعه يساوي 1 (أو قطعة زاوية كما في **الشكل 11-أ**)، وله زاوية علوية كبيرة نسبيًا – لنقل $60°$ – بحيث تستطيع الإبرة أن تدور خلالها بسهولة. والهدف هو إجراء عدد كبير من العمليات على هذا المثلث من أجل تقليل مساحته مع الإبقاء على الاتجاهات التي يمكن للإبرة أن تدور خلالها دون تغيير.

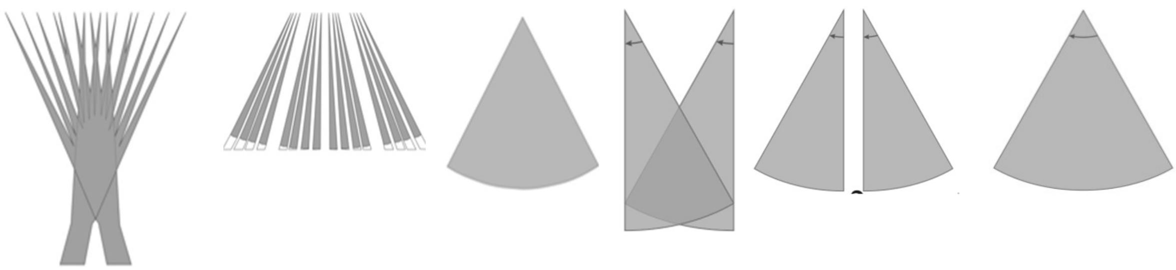
أوّلًا، لنفترض أننا قمنا بتقسيم المثلث إلى مثلثين، ثم وضعنا أحدهما فوق الآخر بحيث تتطابق قاعدتاهما بطريقة تُقلِّل المساحة الكلية قدر الإمكان. تظل الإبرة قادرة على الدوران عبر نفس الاتجاهات: فهي تمسح الاتجاهات التي يوفرها المثلث الأول، ثم تنتقل قفزًا إلى المثلث الثاني، وبعدها تمسح الاتجاهات التي يوفرها الثاني.

ويمكن للإبرة أن تقفز بين المثلثين باستخدام الفكرة التي سبق شرحها، لأن الخطين اللذين قُطِع عندهما المثلث الأصلي متوازيان. في **الشكل 11-ج**، تخرج الإبرة فعليًا من هذا المثلث وتقوم بمسح مساحة إضافية جديدة (يمكن جعلها صغيرة جدًا بالقدر الذي نريد).

الآن، نقوم بتقسيم المثلث إلى 2^n مثلثات فرعية. ولكل مثلثين متتالين من هذه المثلثات، نجري نفس عملية التراكب السابقة لنحصل على 2^{n-1} شكلًا جديدًا، حيث يتكون كل شكل من مثلثين متراكبين. بعد ذلك، نُجري التراكب ذاته على الأزواج المتتالية من هذه الأشكال الجديدة، فنزحزحها بحيث تتراكب قواعدها بطريقة تُقلِّل المساحة الكلية. نُكرر هذه العملية n مرة إلى أن يتبقى شكل واحد فقط.

مرّة أخرى، تظلّ الإبرة قادرة على مسح نفس الاتجاهات، وذلك بتمرير الدوران عبر كل واحد من الـ 2^n مثلثًا حسب ترتيب اتجاهاتها. كما يمكن للإبرة أن "تقفز" بين المثلثات المتتالية باستخدام التقنية السابقة، لأن الخطين اللذين قُطِع عندهما كل مثلث متوازيان.

ما يتبقّى هو حساب مساحة الشكل النهائي. ونظرًا لصعوبة البرهان وطوله، لا يمكن كتابة البرهان كاملًا هنا، بل سأحاول تقديم شرح مبسط من أجل توضيح الفكرة العامة للقارئ الكريم.



و ه د ج ب أ

الشكل 11

ليكن المثلث في **الشكل 12-أ**، ولتكن مساحته S. يمكننا رسم المتوسط من الرأس إلى القاعدة، بحيث يُقسّم المثلث إلى مثلثين متساويي المساحة. بعد ذلك يمكننا "زَحْلَقة" القطعتين نحو بعضهما البعض بحيث تتداخلان.

اتحاد المثلثين المتداخلين يشكّل شكلًا هندسيًا معقدًا، لكن لاحظ أنه يوجد مثلث مشابه للمثلث الأصلي (المثلث المنقّط في **الشكل 12-ب**)، لنُسمّي هذا المثلث "القلب". كما يوجد مثلثان في الأعلى يبرزان خارج القلب. سنسمّي هذين المثلثين "الذراعين".

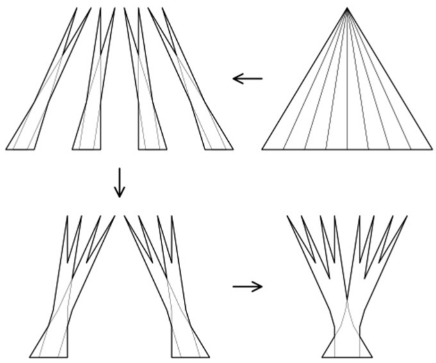
وكلما تابعنا عملية الإزاحة، صَغُر حجم القلب، وكَبُر حجم الذراعين. لنفترض أن $0 < t < 1$ هو معامل التشابه بين القلب والمثلث الأصلي (أي هو نسبة أطوال الأضلاع بين المثلثين). عندئذ تكون مساحة القلب تساوي $t^2 s$.

ب أ

الشكل 12

وبواسطة حسابات هندسية بسيطة، تكون المساحة الكلية للذراعين هي $2(1-t)^2 s$، وأحد الطرق لرؤية ذلك هو النظر أوّلًا إلى النصف العلوي من الذراعين؛ إذ يمكننا دمجهما معًا لتكوين مثلث مشابه للمثلث الأصلي، بمعامل تشابه $1-t$. لذلك فإن المساحة الكلّية للنصف العلوي من الذراعين هي $(1-t)^2 s$، أما النصف السفلي فمساحته تساوي مساحة الصف العلوي تمامًا.

يمكن تكرار هذه الفكرة لنحصل على النتائج التالية:

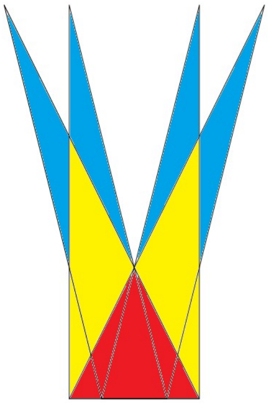


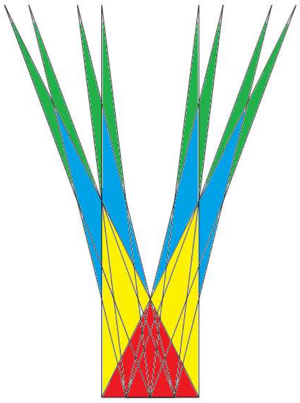
الشكل 13

لنفترض أن $0 < t < 1$، وليكن n عددًا طبيعيًا كيفيًا، نقوم بتقسيم المثلث المتساوي الأضلاع إلى 2^n مثلثًا جزئيًا كما شرحنا سابقًا. باستخدام العملية السابقة، يمكننا الحصول على شكلٍ يحتوي على قلب من الدرجة n، ومن أجل كل $k = 1, \dots, n$ يكون له 2^{n-k+1} من الأذرع من الدرجة k، كما يكون القلب من الدرجة n مشابهًا للمثلث الأصلي بنسبة تشابه t^n.

في **الشكلين 14 و15** ($n = 2$ و $n = 3$)، يظهر القلب من الرتبة n فقط باللون الأحمر والأذرع كل برتبته بباقي الألوان.

وكما لا يخفى عن القارئ الكريم، ملاحظة أن إضافة درجة واحدة لـ n يكافئ إضافة 2^n ذراعًا في القمة مع تصغير حجم الشجرة.


الشكل 14


الشكل 15

يمكن تلخيص نتائج الحالة العامة كالآتي:

- مساحة القلب من الدرجة n هي $t^{2n}s$.
- المساحة الكلية للأذرع من الدرجة k هي $2t^{2(k-1)}(1-t)^2s$.

من خلال هذه النتائج يتضح أن مساحة شجرة بيرون تكون محدودة من الأعلى بـ

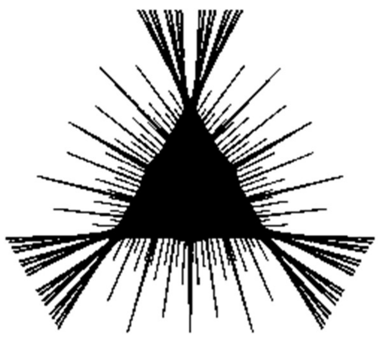
$$\begin{aligned}
Area(Perron) &\leq \left(t^{2n} + \sum_{k=1}^{n} 2t^{2(k-1)}(1-t)^2\right)s \\
&\leq \left(t^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} 2t^{2(k-1)}(1-t)^2\right)s \\
&= \left(t^{2n} + 2\frac{1-t}{1+t}\right)s \\
&\leq \left(t^{2n} + 2(1-t)\right)s.
\end{aligned}$$

الفكرة الآن هي أنه من أجل أي قيمة ε، يمكننا اختيار t وn بحيث يكون لدينا

$$t^{2n} + 2(1-t) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

حتى نشرح الفكرة أكثر للقارئ الكريم، ليكن $\varepsilon > 0$. أوّلًا نختار نسبة التشابه t بحيث تكون قريبة جدًا من 1، وتتحقق $2(1-t) < \frac{\varepsilon}{4}$، ثم نختار عددًا طبيعيًا كبيرًا بحيث يحقق $t^{2n} < \frac{\varepsilon}{4}$. بعد ذلك يمكننا إضافة وصلات بال مقابل كل قفزة بحيث يكون مجموع مساحة هذه الوصلات أقل من $\frac{\varepsilon}{2}$.

بما أن $s < 1$، يمكننا استنتاج بسهولة أن شجرة بيرون المنشأة باستخدام t و n مساحتها أقل من ε.


الشكل 16

يمكن إنشاء مجموعة بيسيكوفيتش عبر دمج ستة أشكال لشجرة بيرون مُنشأة من مثلث متساوي الأضلاع. كما يمكن إنشاء مجموعات بيسيكوفيتش ذات قياس صفري بطرق أخرى، فعلى سبيل المثال، استخدم كاهان (Kahane) مجموعات كانتور (Cantor) لإنشاء مجموعة بيسيكوفيتش ذات قياس صفري في المستوي [4].

لكن على الرغم من وجود مجموعات كاكيا ذات مساحة موجبة صغيرة كيفما نشاء، ووجود مجموعات بيسيكوفيتش ذات مساحة صفرية، فإنه لا توجد مجموعات كاكيا ذات مساحة معدومة.

4. مخمّنة مجموعة كاكيّا

طرح السؤال ذاته حول مدى صِغَر مجموعات بيسيكوفيتش في أبعاد أعلى أدّى إلى ظهور عدد من المخمّنات المعروفة باسم مخمّنات كاكيّا، وقد ساعدت هذه المخمّنات في إطلاق مجال رياضياتي يُعرف باسم نظرية القياس الهندسي (geometric measure theory). وفي هذا السياق تبرز مفاهيم أساسية مثل بُعد هاوسدورف (Hausdorff) وبُعد مينكوفسكي (Minkowski)، وهما مقياسان كسيريان –يمكن اعتبارهما كتعميم للمفهوم التقليدي للأبعاد– يُستخدمان لتقدير "حجم" المجموعات ذات البنية الهندسية المعقّدة التي لا تخضع لمفهوم البُعد الأقليدي التقليدي. وعلى وجه الخصوص، إذا كانت هناك مجموعات بيسيكوفيتش ذات مساحة صفرية، فهل يمكن أن يكون لها أيضًا بُعد هاوسدورف يساوي صفرًا؟ إن هذا السؤال يقود إلى المخمنة الآتية:

مخمّنة مجموعة كاكيّا

كل مجموعة في فضاء أقليدي تحتوي على قطعة مستقيمة طولها واحد في كل اتجاه، يجب أن يكون لها بُعد هاوسدورف وبُعد مينكوفسكي مساوٍ لبُعد الفضاء نفسه.

ومن المعروف أن هذا صحيح في حالتي $n = 1$ و$n = 2$، لكن لا تزال النتائج في الأبعاد الأعلى جزئية فقط. في فبراير 2025، نُشر مقال يخص الحالة $n = 3$ على منصّة arXiv من قِبل الباحثين هونغ وانغ (Hong Wang) وَجوشوا زال (Joshua Zahl) [7]. وتُوصف مسألة كاكيا في البعد الثالث بأنها "واحدة من أكثر المسائل المفتوحة في نظرية القياس الهندسي"، وبالتالي تُعدّ هذه النتائج – إن تم تأكيدها– حدثًا ثوريًا مهمًا في هذا المجال.

ترتبط مسألة كاكيّا ارتباطًا وثيقًا بعددٍ من التخمينات المركزية في التحليل التوافقي، من بينها تخمين التقييد (Restriction Conjecture)، الذي يدرس سلوك تحويل فورييه على الأسطح المنحنية، كالكرة على سبيل المثال. كما تتصل هذه المسألة كذلك بتخمين بوخنر–ريز (Bochner–Riesz Conjecture) وتخمين التسوية الموضعية (Local Smoothing Conjecture). وقد كشفت هذه الارتباطات غير المتوقَّعة بين مسألة كاكيّا وهذه المسائل التحليلية، والتي أشار إليها تشارلز فيفرمان (Charles Fefferman) سنة 1971، عن عمقٍ رياضيٍّ جديد لهذه المسألة، ومنحتها أهمية بالغة داخل البحث.

ومنذ ذلك الحين، كرّس عددٌ من كبار الباحثين جهودًا واسعة لدراسة هذه المسألة وتطوير نتائجها، وفي مقدّمتهم تيرانس تاو (Terence Tao)، الأمر الذي جعل مسألة إبرة كاكيّا إحدى القضايا المحورية في نظرية القياس الهندسي والتحليل الحديث.

المراجع

[1] Besicovitch, Abram, *Sur deux questions d'integrabilite des fonctions*, J. Soc. Phys. Math., **2**, (1919), 105–123.

[2] Besicovitch, Abram, *On Kakeya's problem and a similar one*, Mathematische Zeitschrift. **27**, (1928), 312–320.

[3] Bishop, Christopher J., *An Introduction to Besicovitch-Kakeya Sets*. https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/lectures/UW.pdf

[4] Kahane, Jean-Pierre, *Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires*, Enseignement Math. **15**, (1969), 185–192.

[5] Kakeya, Sōichi, *Some problems on maximum and minimum regarding ovals*, Tohoku Science Reports, **6**, (1917), 74-88.

[6] Pál, Gyula, *Ueber ein elementares variationsproblem*, Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **2**, (1920), 1-35.

[7] Wang, Hong and Zahl, Joshua, *Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions*, (24 February 2025). arXiv:2502.17655

[8] https://accromath.uqam.ca/2024/10/laiguille-de-kakeya/