مبرهنتا عدم الاكتمال لغودل
نظرة ساذجة إلى نقطة الانهيار في الفكر الاستنباطي

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

إلى أرواح جميع مدرسي الرياضيات، الشهداء الذين قتلتهم اليد الصهيونية المجرمة والمتوحشة بقطاع غزة.
لن أنساكم ما حييت.

1. تقديم على عجل للشغل الشاغل في الرياضيات

يقال إن المواطن من جزيرة كريت اليونانية إبيمينيدس Epimenides هو أول من صرّح بإحدى جُمَل الكَذَّاب "جميع مواطني كريت كذّابون". وقد حاول كثير من الفلاسفة بمن فيهم بعض العرب أن يقرروا بشأن صدق هذه الجملة من عدمه، وعجزوا جميعًا عن ذلك. والجملة الأكثر تداولًا من بين جمل الكذاب هي "أنا أكذب". وقد تبين جليًا منذ أن قدّم غودل (Gödel) في العام 1931 مبرهنتي عدم الاكتمال إلى مجتمع الرياضيين أن "أي علم استنباطي يحتوي على جملة كذاب يستحيل أن يكون مكتملًا". والتفسير هو أن هذا العلم يعجز حتمًا عن إصدار حكم بخصوص هذه الجملة إلا إذا صار متناقضًا. إنها بكل بساطة إحدى النقائص الأبدية في الفكر البشري الاستنباطي.

إحدى الخطوات المذهلة والمثيرة للإعجاب بشدة في الفكر الرياضي هي تلك التي أنجزها غودل، والتي استحق عن جدارة واستحقاق بسببها لقب "سفاح المنطق وشيطانه". نعم، شاب لا يتجاوز عمره 25 سنة يغامر، والمغامرة هي جوهر الحرية، وينجح في تحويل إحدى جمل الكذاب إلى أداة رياضية فعالة في إثبات أشهر مبرهنتين في الفكر الرياضي، ألا وهما مبرهنتا عدم الاكتمال الأولى والثانية اللتان تنسبان إليه.

طلبًا للبساطة استبعدت من النص كل الرموز الرياضية المعقدة، واحتفظت بأقل القليل منها. وعلى هذا الأساس فهو لا يشكل بديلًا عن الدراسة الرياضية الصارمة والصلبة لأعمال غودل المعروضة في كتب المنطق الرياضي، وإنما يقدم وصفًا تقريبيًا لها، والذي قد يكون مفيدًا للمهتمين من بعيد بالفكر الرياضي. لا أعتقد من وجهة نظري الشخصية أن مدرّسي الرياضيات، وبخاصة مدرسي الرياضيات في المدارس الثانوية والمتوسطة، مطالبون بالاطلاع على أعمال غودل، وما أراه ضروريًا وحاسمًا هو أن يتقن هؤلاء المدرّسون فن البرهنة في إطار المنطق الرياضي الأولي.

يكشف النص عن نقطة مهمة في الفكر الرياضي، وهي أن وجود جمل الكذاب الصحيحة نحويًا في الرياضيات، هو الذي جعل إثبات خلوها من التناقض أمرًا مستحيلًا. وبذلك قد لا يكون متاحًا للرياضيين الأفلاطونيين أن يحلموا بوجود رياضيات خالصة وغير متناقضة تنتظر الاكتشاف، تمامًا مثلما هو غير متاح لنظرائهم البنائيين أن ينشئوا رياضيات مكتملة النضوج.

ولنعلم بأن الاتساق أو الخلو من التناقض مبتغى حيوي لجميع علماء الرياضيات، ذلك لأنهم يعرفون جيدًا منذ زمن الإغريق القدامى أن وجود التناقض في ركن ما من الرياضيات يجعل تمييز الحقيقة فيها عن الوهم مستحيلًا، ومن ثمة يصير الاشتغال في هذا العلم عملًا عبثيًا لا طائل من ورائه. كل هذا سيؤدي حتمًا في نهاية المطاف إلى تهاوي صرح الرياضيات بالطريقة ذاتها التي يتهاوى بها الصرح المشيد من الطوب عندما يغمره الماء. ويخشى علماء الرياضيات المحترفون بشدة في الوقت الحالي من الوقوع في ظاهرة التناقض الخطيرة، وذلك عبر اختيارات غير موفقة لجمل المُسلَّمات، التي يتم غالبًا

تبنّيها بتهور وبلا حذر هنا وهناك في الرياضيات. ورغبة في السيطرة على هذا الشعور بالخوف، جرى ويجري حثيثًا منذ عقود مراجعة كل نُظم المسلمات الموضوعة ذات الأهمية في الرياضيات مثل مسلّمات المجموعات المرتبة والزمر والحلقات والحقول والفضاءات التوبولوجية والمترية والنظيمية والتحليل والهندسة وغيرها.

لقد جعلت نتائج الاستحالة التي أثبتها غودل الشك يتسرّب ليس إلى الرياضيات فحسب، وإنما إلى جميع العلوم الاستنباطية النظرية المكونة للبيت الفكري الفلسفي، وهو الأمر الذي جعل الفيلسوف كارل بوبر (Karl Popper) يكتب رسالة إلى مؤيدي سقراط من معاصريه يخبرهم فيها عن ذلك. ولعل هذا هو بالذات الأمر الذي جعل الفكري النظري الفلسفي يفقد قيمته ومكانته تقريبًا فاسحًا المجال أمام العلوم التجريبية-النظرية المؤيدة بالمنطق التجريبي العلمي، أي بالملاحظة والتجربة الفيزيائيتين. ولا يساور الشك أبدًا علماء الفيزياء بأن علمهم قد يحتوي على جملة كذاب واحدة، وذلك لاعتقادهم الراسخ بأن الكون خال تمامًا من الحوادث الفيزيائية المتضادة.

2. الأعداد الطبيعية، نظرة متحفية

تُستخدم الأعداد الطبيعية منذ القدم في عمليات عدّ وحصر الأشياء المادية، وهو الأمر الذي جعلها تكتسب طابعًا ملموسًا أكثر من باقي الكائنات الرياضية لدى غالبية الناس، وتحصل بذلك على مشروعية قوية لوجودها ضمن عالم المفاهيم الذهنية البشرية.

في حوالي عام 1640 قبل الميلاد، كتب أحمس (Ahmes) المصري على ورقة بردية جدولًا متضمنًا لعمليات قسمة الأعداد الفردية المحصورة بين 5 وَ101 على 2. وقد ربط بعض المؤرخين إجراء هذه العمليات الحسابية بعمليات توزيع الخبز على الناس. ويُعدّ نص أحمس أحد أقدم المصادر في التاريخ الموثقة لبدايات الحساب على الأعداد الطبيعية. وفي عهد الملك البابلي الشهير حمورابي (1792-1750 ق.م) كان يُدرَّس للتلاميذ فن المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية على النحو الآتي: تطرح عليهم المسألة: "إذا كان $x+y=a$ وَ$xy=a^2/4-b^2/4$ حيث b أصغر من a، فجِدْ x وَy". ثم يُطلب منهم استخلاص المقدار $x-y$ انطلاقًا من المساواة

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

مفترضين أن y أصغر من x، فيجدون أن $x-y=b$. بعد ذلك يستخدمون جملة المعادلتين

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

للوصول إلى الحل

$$x=\frac{a+b}{2}, y=\frac{a-b}{2}.$$

في اليونان القديمة شرَّع الفيلسوف فيثاغورس Pythagoras (585-500 ق.م.) الذي عاش في مدينة ساموس نظامًا دينيًا وأخلاقيًا، معطيًا للرياضيات مكانة مركزية في تعاليمه. وكان هو وأتباعه ينظرون إلى الأعداد الطبيعية على أنها أشياء إلهية عليا، ومثَّلت في نظرهم مصدر الجمال والنظام في كون. وعلى هذا الأساس يمكن اعتبار الجملة "كل شيء في الكون هو عدد" ملخصًا جيدًا لرؤية فيثاغورس إلى الأعداد الطبيعية. وما أضافه هذا الرجل ومدرسته إلى الرياضيات هو فن البرهنة، إذ أكد أنه لا يجب الاكتفاء باكتشاف وحصر خواص الأعداد، وإنما يجب كذلك إثبات صحة هذه الخواص.

في العصر الحالي، وتحديدًا في نهاية القرن التاسع عشر الميلادي، قدّم كانتور Cantor إلى مجتمع علماء الرياضيات نظريته الرائدة حول المجموعات، والمسماة "نظرية المجموعات". ولقد احتوت هذه النظرية على نظرية جزئية أخرى تدعى "نظرية الأعداد الترتيبية" (Ordinal number theory). اعتمادًا على هذه الأخيرة أعطى كانتور بنًاء منطقيًا

دقيقًا لما يُدعى حاليًا بالنموذج المعياري (Standard model) للأعداد الطبيعية. من أجل الاطلاع على تقنيات هذا الإنشاء، يرجى العودة إلى المرجعين [3] وَ[11].

3. مسلمات بيانو الثلاث للحساب في الأعداد الطبيعية

بصياغته للمسلّمات الخمس الشهيرات في الهندسة المستوية المنسوبة إليه، أصبح أُقليدس Euclid المؤسس الأول للفكر المُسلَّماتي (Axiomatic thinking)، وهو الفكر الذي أعيد إحياؤه في بداية القرن العشرين من قبل هيلبرت Hilbert وتلاميذه، حيث ساد من بعدها الرياضيات المعاصرة برمتها. ويختلف هذا الفكر اختلافًا جوهريًا عن الفكرين الاعتقادي والحدسي، ذلك أنه يعتمد على مقولات مُسلَّم اختياريًا بصحتها ولا مفروضة فرضًا على العقل، ثم يقوم بالبناء عليها بواسطة طرائق الاستدلال من أجل إنشاء مقولات فكرية جديدة. في حين يعتمد الفكر الاعتقادي على فكرة الإيمان الصرفة، وهي التي تلعب دورًا محوريًا في المنطق الاعتقادي (Belief logic). ويعتبر الفكر الحدسي أن أصول المعارف البشرية تعود إلى مقولات حدسية خالصة، بمعنى أنها متوافقة تمامًا مع الحدس البشري، ومستقلة عن الذات المُفكِّرة، ولا تحتاج كونها واضحة بذاتها إلى التسليم الاختياري بصحتها، ومن ثمة فهي مقولات فارضة نفسها فرضًا على العقل، وتعتبر من أسس من عمله.

في العام 1889 وضع بيانو Peano مستندًا إلى نظرية المجموعات ثلاث مسلمات للحساب في الأعداد الطبيعية، معتبرًا إياها المقدمات الكافية والضرورية لإنجاز جميع خواص هذا الحساب. ولقد اتضح من دراسات منطقية لاحقة بأن الإسناد إلى نظرية المجموعات لم يكن خطوة سديدة من قِبل بيانو.

وليس صعبًا أبدًا عرض هذه المسلّمات على تلاميذ المدارس المتوسطة والثانوية. وإني شاهد على أن المدرسة المتوسطة الجزائرية تبنّت في ستينيات وسبعينيات القرن العشرين تحت إشراف المفتش محمد بن قادة رحمه الله هذا العرض. ودليلي على ذلك هو أن السيدة داودي فاطنة، مدرّسة الرياضيات سابقًا بالمدرسة الأساسية، الطور الثاني، قدّمت دروسا حول مسلّمات بيانو خلال الموسمين الدراسيين 1982-1983 وَ1983-1984 أمام مجموعة من التلاميذ الملتحقين بالمدرسة الأساسية ابن عياد، الطور الثاني، بمدينة الجلفة. وقد قُدّر لي أن أكون واحدًا من هذه المجموعة.

عرضت هذه السيدة الفاضلة تعريف الأعداد الطبيعية مستندة في ذلك إلى مسلّمات بيانو الثلاث على النحو الآتي: مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة $\mathbb{N}$ تحتوي على عنصر يدعى الصفر، يشار إليه بالرمز 0، ومرفقة بتطبيق (دالة) $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بحيث:

1) من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$، $S(n) \neq 0$؛
2) التطبيق S متباين، بمعنى أنه من أجل كل عددين طبيعيين $n \in \mathbb{N}$ وَ$m \in \mathbb{N}$، إذا كان $S(m) = S(n)$، فإن $m = n$؛
3) من أجل كل قضية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي $n \in \mathbb{N}$ لدينا ما يلي: إذا كانت $P(0)$، وإذا، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، كانت $P(n)$ تستلزم منطقيا $P(S(n))$، فإن $P(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. ويعطي هذا الفرض مباشرة النتيجة التالية المستخدمة عمليًا: إذا كانت $P(0)$ صحيحة، وإذا، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، كانت صحة $P(n)$ تؤدي إلى صحة $P(S(n))$، فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. تدعى هذه المسلمة بمبدأ البرهان بالتراجع.

بعد ذلك قامت السيدة داودي بوضع $S(0) = 1$، ثم عرّفتْ عمليتي جمع الأعداد الطبيعية $+$ وضربها $\times$ تراجعيًا كما يلي:

$$0 + m = m, (n + 1) + m = (n + m) + 1$$
$$0 \times m = 0, (n + 1) \times m = (n \times m) + m$$

وتحقّقت اعتمادًا على هذا التعريف من صحة الكثير من خواص الجمع والضرب. ويستطيع مدرس الرياضيات الجاد والشاطر أن يفعل الشيء ذاته، وأن يكلف تلاميذه بالقيام بأنشطة مماثلة. وسيكون ذلك شديدة الفائدة لفكرهم الطازج، فهو يمنحهم منذ البداية بصيرة بأهم خصائص الفكر الاستنباطي، ألا وهي التحقق من صحة الكثير من النتائج انطلاقًا من مجموعة منتهية من المقدمات المعروفة مسبقًا. وسيحظى تلاميذ الإعلام الآلي من ناحيتهم بالفائدة عينها، حيث سيعينهم ذلك على تعلّم فن إنشاء الخوارزميات المعقدة باستخدام عدد قليل من الخوارزميات الصغيرة المعروفة مسبقًا. ويشكل هذا الفن في الحقيقة عماد اختراع لغات برمجة الحواسيب والآلات الذكية، وبسببه تحديدًا يتم تلقين طلاب الإعلام الآلي مبادئ اللغات الرياضية والمنطق الرياضي.

تتمحور جميع خواص الأعداد الطبيعية حول العددين الصفر والواحد وعمليتي الجمع والضرب وعلاقة 'أصغر أو يساوي' $\leq$، كما تنبع كلها من مسلمات بيانو الثلاث. وتدعى السداسية $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; 0,1; +,\times; \leq)$ في أبجديات الرياضيات الأولية بالنموذج المعياري للأعداد الطبيعية، وهو النموذج الذي قرر خبراء تعليمية الرياضيات أن يُقدّم إلى التلاميذ في المدارس.

4. حساب روبنسون

لقد سعى كثير من علماء المنطق الرياضي لأسباب وجيهة إلى فصل نظرية الحساب في الأعداد الطبيعية عن نظرية المجموعات. ويتمثل السبب الأول من بين هذه الأسباب في أن إثبات خلو النظرية الأولى من التناقض أيسر بكثير من إثبات خلو الثانية منه. ولعل أبسط إنجاز في هذا الشأن يتمثل في المسلّمات التسع التالية التي قدّمها روبنسون Robinson في العام 1950 كأساس للحساب في الأعداد الطبيعية. يشار في كتب الحساب إلى هذه المسلمات بالرمز $\mathbb{ROB}$، ويسميها علماء المنطق بحساب روبنسون.

1. $n + 1 \neq 0$؛
2. $n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$؛
3. $n + 0 = n$؛
4. $n + (m + 1) = (n + m) + 1$؛
5. $n \times 0 = 0$؛
6. $n \times (m + 1) = n \times m + n$؛
7. $\neg(n < 0)$؛
8. $n < m + 1 \Leftrightarrow n < m \vee n = m$؛
9. $n < m \vee n = m \vee m < n$.

وكما ذكر سابقًا، يستطيع مدرّس الرياضيات الجاد أن يتحقق دون عناء من صحة المسلمات $\mathbb{ROB}$ انطلاقًا من مسلمات بيانو الثلاث. وعلى هذا الأساس تدعى السداسية $\mathfrak{N}$ نموذجًا (Model) لحساب روبنسون.

كذلك يستطيع المدرس الجاد أن يتأكد استنادًا إلى مسلمات بيانو الثلاث من صحة الصيغتين المكممتين:

$$(\forall n)(n \leq n) \ \Big(\text{كل عدد طبيعي أصغر أو يساوي نفسه}\Big)$$

$$(\forall n)(\forall m)(n + m = m + n) \ \Big(\text{عملية جمع الأعداد الطبيعية تبديلية}\Big)$$

بيد أن هاتين الخاصيتين غير قابلتين للإقرار انطلاقًا من المسلمات $\mathbb{ROB}$، وذلك على الرغم من صحتهما في النموذج $\mathfrak{N}$. وليس مطلوبًا أبدًا إثبات ذلك أمام التلاميذ. ويقال في هذه الحالة إن حساب روبنسون غير مكتمل

(Incomplete). ونذكر هنا بأن الصيغة غير القابلة للإقرار (Undecidable) هي التي لا يوجد برهان يؤكد صحتها ولا آخر يؤكد خطأها.

وتبين مبرهنة غودل الشهيرة التالية أن حساب روبنسون ليس مكتملًا فحسب، وإنما أيضا غير قابل للاكتمال (Incompletable).

5. مبرهنة عدم الاكتمال الأولى لغودل (الصياغة الدلالية)

كل مجموعة مسلمات Γ معرفة تراجعيًا ومحتوية على $\mathbb{ROB}$ وصحيحة في النموذج $\mathfrak{N}$ غير مكتملة، بمعنى أنه توجد ما لا نهاية من الصيغ المغلقة الصحيحة في $\mathfrak{N}$ وغير القابلة للإقرار انطلاقا من Γ. وبعبارة أخرى، الحساب $\mathbb{ROB}$ غير قابل للاكتمال.

لقد استطاع روسر Rosser أن يبسط قليلًا في شروط مبرهنة عدم الاكتمال الأولى، ويحصل على النص النحوي التالي:

6. مبرهنة عدم الاكتمال لغودل وروسر (الصياغة النحوية)

كل مجموعة مسلمات Γ متسقة ومعرفة تراجعيا ومحتوية على $\mathbb{ROB}$ غير مكتملة.

لنتذكر ما يلي:

نقول إن مجموعة مسلمات Γ متسقة (consistent) أو غير متناقضة (Not contradictory)، إذا كانت مجموعة الصيغ Thm_Γ المبرهن عنها انطلاقًا من Γ خالية من التناقض، أي لا تحتوي في آن معًا على صيغة ما ونفيها المنطقي، وبعبارة أخرى "لا توجد صيغة $P \in \mathrm{Thm}_\Gamma$ بحيث $\neg P \in \mathrm{Thm}_\Gamma$". تمثل الكتابتان "$P \in \mathrm{Thm}_\Gamma$" وَ"$P$ قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ" نفس القضية، والتي يشار إليها غالبًا في كتب المنطق بالكتابة الرمزية $\Gamma \vdash P$.

7. حول فكرة غودل المستعملة في إثبات مبرهنة عدم الاكتمال الأولى

اعتبر غودل الجملة التالية "أنا لستُ قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ"، ويعود الضمير المُصرّح إلى الجملة ذاتها، أي أنها تصرح بأنها ليست قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وعلى هذا الأساس تُعد هذه الجملة بامتياز إحدى جمل الكذاب، وسنشير إليها هنا بالرمز P. إحدى براعات غودل المدهشة هي أنه استطاع أن يُعبّر عن القضية P بواسطة الرموز الأساسية للحساب في الأعداد الطبيعية، وهي:

$$0,1,+,\times,=,\leq,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,(,)$$

وهكذا فالقضية P تُعبّر في الحقيقة عن صيغة رياضية تنتمي إلى الحساب في الأعداد الطبيعية. الجملة P مصاغة كما هو واضح بواسطة لهجة عربية-رياضية. وهذا لا يعني أنها تمثل صيغة رياضية حقيقة. وعلى هذا الأساس كان يجب التأكد من هذا الأمر، وهو ما قام به غودل باقتدار.

نصادف كثيرًا في كتب الرياضيات المدرسية وفي غيرها قضايا مكتوبة باللهجات العربية-الرياضية والفرنسية-الرياضية والإنكليزية-الرياضية. وما ينبغي أن يقوم به أي مدرّس رياضيات جاد هو أن يتأكد من أن هذه القضايا تُعبّر عن صيغ رياضية حقيقية. وفي بعض الأحيان يكون هذا التحقق صعبًا للغاية. ولعلي بهذا أضع أصبعي على واحدة من المشاكل التي تعرقل فهم الرياضيات في هذا البلد، وتجعل الوصول إلى التصور السليم حول مواضيع الرياضيات متعذرًا، ليس

بالنسبة للتلاميذ فحسب، وإنما أيضا بالنسبة لمدرّسي الرياضيات بمختلف أطيافهم. وقد ذكَرتُ عمدًا هذا الأمر هنا، ونبَّهتُ على خطورته.

إذا سلّمنا بأن P قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، أي إذا سلّمنا بأنه لدينا $\Gamma \vdash P$، فنكون بذلك قد أقررنا بما صرحتْ به P، وهي أنها ليست قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وهكذا حصلنا على النفي المنطقي للقضية $\Gamma \vdash P$، أي على القضية $\neg(\Gamma \vdash P)$. وما يستخلص من هذا هو أن القضية $\Gamma \vdash P$ تستلزم منطقيًا نفيها المنطقي $\neg(\Gamma \vdash P)$. وبالتالي فهي حتما خاطئة، أي أن نفيها المنطقي $\neg(\Gamma \vdash P)$، والتي ما هي سوى الصيغة P، صحيحة. وهكذا فالصيغة P غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. لنتذكر بأننا نستطيع بكل يسر أن نثبت مستخدمين جداول الحقيقة بأن أية قضية رياضية تستلزم نفيها المنطقي هي حتما خاطئة.

من ناحية ثانية إذا سلّمنا بأن النفي المنطقي للصيغة P قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، أي إذا سلّمنا بأنه لدينا $\Gamma \vdash \neg P$، فنكون بذلك قد أقررنا بنقيض ما صرحتْ به P، وهي أنها قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وهكذا حصلنا على القضية $\Gamma \vdash P$. وبما أن Γ متسقة، فلا يمكن أن يكون لدينا في آن معًا $\Gamma \vdash P$ وَ $\Gamma \vdash \neg P$. ويحتم هذا أن تكون القضية $\Gamma \vdash \neg P$ خاطئة، الأمر الذي يعني أن الصيغة $\neg P$ غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ.

ما حصلنا عليه هو أن لا الصيغة P قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، ولا نفيها المنطقي $\neg P$ قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وعلى هذا الأساس فهي غير قابلة للإقرار انطلاقًا من Γ. انتهى البرهان.■

قد يسبق إلى أذهان البعض بأن إثبات مبرهنة عدم الاكتمال الأولى ليس صعبًا بما يكفي، أو ربما يُبالغ في صعوبته. في الحقيقة التحقق من أن القضية P هي صيغة حسابية صرفة هو أمر بالغ الصعوبة، زد على ذلك لم يتم التحدث هنا سعيًا للسهولة عن اللغة الرياضية المطلوبة لكتابة الصيغ الرياضية الخاصة بالحساب في الأعداد الطبيعية، كما لم يتم التطرق إلى نظم البرهنة المستخدمة. كل هذا مطلوب التحدث عنه بدقة تامة من أجل صياغة برهان رياضي صلب للمبرهنة قيد المعاينة.

8. حساب بيانو

البرهان بالتراجع هو أهم خاصية يتميز بها النموذج $\mathfrak{N}$، ولا يوجد ما يشير إليه في حساب روبنسون. ويمكن التعبير عن هذه خاصية، والتي نشير إليها بالرمز $\mathbb{Ind}$، على النحو الآتي:

$$\big(P(0) \wedge (\forall n)\big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\big) \Rightarrow (\forall n)P(n)$$

حيث $P(n)$ صيغة متعلقة بالرمز المتغيريّ n. إن الحساب في الأعداد الطبيعية المعتمد على المسلمات $\mathbb{ROB} + \mathbb{Ind}$ يدعى في أبجديات الرياضيات بحساب بيانو (Peano arithmetic)، وهو بشكل وضوحًا توسيعًا لحساب روبنسون. وتبقى مبرهنة عدم الاكتمال الأولى صالحة بالنسبة لهذا الحساب، ولذلك فهو أيضًا غير قابل للاكتمال. بيد أنه أكثر كفاءة من حساب روبنسون في إثبات خواص الحساب في الأعداد الطبيعية، والتي يتمتع بها النموذج $\mathfrak{N}$. وفي الحقيقة نستطيع إثبات في إطار هذا الحساب صحة جميع خواص الأعداد الطبيعية المبرهن عليها انطلاقًا من مسلمات بيانو الثلاث، والتي لا يُستخدم في كتابتها سوى الرموز الأساسية:

$$0,1,+,\times,=,\leq,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,(,)$$

براعة غودل الثانية هي أنه تمكن من أن يُعبّر بواسطة الرموز الأساسية السابقة عن القضية "Γ متسقة"، والتي نشير إليها هنا بالرمز Con_Γ، حيث Γ هي مجموعة مسلّمات متسّقة ومعرّفة تراجعيًا ومحتوية على مسلمات حساب بيانو. وقد مكّنه ذلك من أن يثبت صحة المبرهنة الاستثنائية التالية والتي هزّت ليس أسس الفكر الرياضي فحسب، وإنما أيضا أسس الفكر الغربي برمته.

9. مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل

إذا كانت Γ مجموعة مسلمات متسقة ومعرّفة تراجعيًا ومحتوية على مسلمات حساب بيانو $\mathbb{ROB}+\mathbb{Ind}$، فإنه لا يمكن إثبات اتساق Γ انطلاقًا من Γ، أي بمعنى أن الصيغة Con_Γ غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ.

يمكن التعبير على نتيجة هذه المبرهنة بالكتابة

$$\mathrm{Con}_\Gamma \Rightarrow \neg(\Gamma \vdash \mathrm{Con}_\Gamma)$$

والتي تكافئ الصيغة

$$"\Gamma \vdash \mathrm{Con}_\Gamma" \Rightarrow "\Gamma \vdash \neg\mathrm{Con}_\Gamma"$$

تقرأ الكتابة الأولى لغويًا على النحو الآتي "إذا كانت Γ متسقة، فلا يمكن إثبات ذلك انطلاقًا من Γ"، وبالتالي "إذا كان 'اتساق Γ' قابل للإثبات انطلاقًا من Γ، فإن Γ حتمًا غير متسقة". بينما تقرأ الكتابة الثانية لغويًا كما يلي "إذا كان 'اتساق Γ' قابل للإثبات انطلاقًا من Γ، فإن 'عدم اتساق Γ' قابل للإثبات أيضًا انطلاقًا من Γ".

10. حول فكرة غودل المستعملة في إثبات مبرهنة عدم الاكتمال الثانية

يأتي استنادًا إلى مبرهنة عدم الاكتمال الأولى أنه إذا كانت Γ متسقة، فالصيغة P غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وبعبارة أخرى، "إذا كانت Con_Γ، فإن P" (تذكّر أن الجملة "P غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ" ما هي سوى الصيغة P). اعتمادًا على هذا استطاع غودل أن يبرهن بأن الصيغة $\mathrm{Con}_\Gamma \Rightarrow P$ قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. من هنا يتبين أنه إذا كانت Con_Γ قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ، فإن قاعدة القياس الاستثنائي تخبرنا بأن الصيغة P هي الأخرى قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وهذا تناقض، لأن P غير قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. وبالتالي يستحيل أن تكون Con_Γ قابلة للبرهان انطلاقًا من Γ. انتهى البرهان.■

مراجع

[1] J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 90, North Holland, Amsterdam, 1977.

[2] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. 1, Princeton University Press, 1956.

[3] D.W. Cunningham, *Set Theory: A First Course*, Cambridge University Press, 2016.

[4] L. Halbeisen and R. Krapf, *Gödel's Theorems and Zermelo's Axioms: A Firm Foundation of Mathematics*, Springer, 2020.

[5] S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*. D. Van Nostrand Company, New York, 1952.

[6] Yu.I. Manin, *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians*, Springer, New York, 2010.

[7] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Routeledge, 2015.

[8] J.R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, A K Peters/CRC Press, 1967.

[9] R.M. Smullyan, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, 1992.

[10] G. Tourlakis, *Lectures in Logic and Set theory*, Volume 1: *Mathematical Logic*, Cambridge University Press, New York, 2003.

[11] G. Tourlakis, *Lectures in Logic and Set Theory*, Volume 2: *Set Theory*, Cambridge University Press, New York, 2003.