دور المعادلات التفاضلية العادية في نمذجة الأنظمة الديناميكية وتطبيقاتها في الأنظمة الذكية

عبد المؤمن مبيروك
أستاذ بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
abdelmouemin.mebirouk@g.ens-kouba.dz

يعرض هذا المقال الدور الأساسي للمعادلات التفاضلية العادية في نمذجة وتحليل الأنظمة الديناميكية، مع التركيز على تطبيقاتها في أنظمة التحكم والأنظمة التكيفية. يوضح هذا المقال كيفية استخدام هذه المعادلات لوصف تطور الحالة الزمنية للنظام انطلاقًا من شروط ابتدائية معينة، وتحليل نقاط التوازن ودراسة الاستقرار والسلوك طويل المدى. كما يناقش بعض النماذج الرياضية، ويوضح كيف يؤدي توسيع فضاء الحالة إلى نمذجة الأنظمة التكيفية ضمن إطار الأنظمة الديناميكية. ويبين أن المعادلات التفاضلية تمثل الأساس الرياضي لتحليل وفهم السلوك الديناميكي للأنظمة الذكية.

1. المقدمة

تعتبر المعادلات التفاضلية من الأدوات الرياضية الأساسية في وصف الظواهر الديناميكية التي تتغير مع الزمن، بحيث تستطيع هذه المعادلات نمذجة تطور الأنظمة الفيزيائية والهندسية والبيولوجية ضمن إطار رياضي موحد. وقد سمح هذا الإطار بدراسة سلوك الأنظمة ليس فقط من أجل إيجاد الحلول الصريحة، بل من حيث فهم الخصائص النوعية للحلول، مثل الاستقرار، ونقاط التوازن، والسلوك طويل المدى.

في العقود الأخيرة ازداد الاهتمام بالأنظمة الذكية، خاصة في مجالات التحكم الآلي والروبوتيك والأنظمة المدمجة، حيث تتطلب هذه الأنظمة القدرة على التكيف مع التغيرات البيئية المحيطة. ويطرح هذا التطور تساؤلًا أساسيًا حول الأساس الرياضي الذي تقوم عليه هذه الأنظمة، ومدى ارتباطها بنظرية الأنظمة الديناميكية والمعادلات التفاضلية.

يهدف هذا المقال إلى إبراز الدور الهام الذي تلعبه المعادلات التفاضلية العادية في نمذجة وتحليل الأنظمة الديناميكية، مع التركيز على تطبيقاتها في أنظمة التحكم والأنظمة التكيفية التي تمثل أحد الأشكال الرياضية للأنظمة الذكية. ويتم ذلك من خلال إظهار الإطار العام للأنظمة الديناميكية، ثم تقديم كل من نماذج التحكم على أنها أنظمة ديناميكية كلاسيكية، والأنظمة التكيفية على أنها أنظمة ديناميكية موسعة. وانطلاقًا من هذا المنظور، فإن المدخل الطبيعي لدراسة هذه الأنظمة يتمثل في نظرية الأنظمة الديناميكية، حيث تشكل المعادلات التفاضلية العادية أداتها الأساسية في النمذجة والتحليل.

2. النظام الديناميكي والصيغة التفاضلية للنمذجة

في الرياضيات التطبيقية ونظرية التحكم، يُعرَّف النظام الديناميكي على أنه كل نظام يمكن وصف حالته في كل لحظة زمنية بواسطة مجموعة من المتغيرات تسمى متغيرات الحالة، ونرمز لشعاع الحالة بـ

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

غالبًا ما يُفترض أن تطور متغيرات الحالة مع الزمن لا يتم عشوائيًا، بل يتبع قانونًا رياضيًا محددًا، وفي الحالة العامة يُعطى هذا القانون بواسطة معادلة تفاضلية عادية من الشكل

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

مع f دالة شعاعية تُمثّل ديناميكية النظام، و$u(t)$ متغيرات الإدخال (أو المدخلات). $\dot{x}$ ترمز إلى مشتق x بالنسبة إلى الزمن. يجب تزويد المعادلة التفاضلية بحالة النظام الابتدائية

$$x(t_0) = x_0.$$

لكي يكون وصف النظام كاملًا [2]، [4].

يُمثّل هذا التعبير الإطار الأشمل للأنظمة الديناميكية. وفي التطبيقات اللاحقة سنقتصر على الأنظمة الذاتية التي لا تعتمد صراحة على الزمن، كما سنعرض أمثلة من الرتبتين الأولى والثانية، مع العلم أن كل نظام من رتبة أعلى يمكن إعادة صياغته كنظام من الرتبة الأولى في فضاء الحالة.

تُمكّننا المعادلات التفاضلية من نمذجة الأنظمة الديناميكية من خلال الربط بين الحالة الحالية للنظام ومعدل تغيرها عند لحظات زمنية مستمرة، مما يسمح بوصف تطورها بشكل مستمر. ومن خلال هذا الوصف، تبرز حالات خاصة يبقى فيها النظام ثابتًا مع الزمن، وتسمى نقاط التوازن. لا تكمن أهمية نقاط التوازن في وجودها فقط، بل في طبيعة سلوك النظام في جوارها، وهو ما يقود إلى دراسة الاستقرار حول تلك النقاط، وتحليل الاستجابة الزمنية، وفهم السلوك طويل المدى للنظام، وهو أحد الأهداف الأساسية لاستخدام المعادلات التفاضلية. ولهذا السبب، تُشكّل المعادلات التفاضلية الإطار الطبيعي لدراسة الأنظمة التي يعتمد سلوكها على الزمن، خاصة في مجالات التحكم والتكيف[4].

انطلاقًا من هذا الإطار، يمكن الإشارة إلى أن العديد من الأنظمة الحديثة، التي تُسمى بالأنظمة الذكية، تتبع رياضيًا هذا الوصف. وبذلك فهي تُنمذج كنظم ديناميكية، مع إضافة قوانين تفاضلية أخرى تصف تطور مدخلات النظام. وبالتالي، فإن فهم الصيغة التفاضلية للنظام الديناميكي يُمثل الخطوة الأولى والأساسية لفهم نمذجة الأنظمة الذكية.

بعد عرض الإطار الرياضي العام للأنظمة الديناميكية، ننتقل الآن إلى أحد أهم تطبيقاته العملية والمتمثل في أنظمة التحكم، التي تشكل نموذجًا كلاسيكيًا لتوظيف المعادلات التفاضلية في الهندسة.

3. أنظمة التحكم كأنظمة ديناميكية كلاسيكية

تُعتبر أنظمة التحكم من الأمثلة الكلاسيكية للأنظمة الديناميكية، ويكون الهدف منها الحفاظ على سلوك معين أو توجيه هذا السلوك ليطابق حالة مرغوبة رغم وجود تغيرات خارجية. ويُعبّر عن حالة النظام في كل لحظة زمنية بواسطة متغير أو مجموعة من المتغيرات التي تُمثّل كميات فيزيائية قابلة للقياس مثل السرعة أو الموضع أو درجة الحرارة. أي توجد كمية نريد التحكم فيها، تتغير مع الزمن ويمكن ضبطها بواسطة تأثير تدريجي.

نعتبر فيما يلي نظام تحكم يعرف بمتغير الحالة $x(t) \in \mathbb{R}$. أحد أبسط الأمثلة على النظام الديناميكي هو نظام التحكم من الرتبة الأولى، والذي يمكن تمثيله بالمعادلة التفاضلية

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

بحيث $u(t)$ يُمثّل المدخل (إشارة التحكم). بما أن النظام يفقد طبيعيًا قيمته مع مرور الزمن فإنه يمكن التأثير عليه وتصحيحه بإشارة التحكم. عند تثبيت المدخل $u(t) = \bar{u}$، يتحول النظام إلى نظام ديناميكي ذاتي

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}).$$

ولدراسة السلوك الزمني للنظام، يعتبر أن النظام يبدأ من حالة ابتدائية $x(0) = x_0$ [4].

تُعرّف نقطة التوازن x_e رياضيا بأنها حل للمعادلة $f(x_e, \bar{u}) = 0$. تُمثل هذه النقطة الحالة التي يكون فيها النظام في سكون ديناميكي، أي الحالة لا تتغير مع الزمن إذا بدأ النظام منها. وتمثل غالبًا في أنظمة التحكم القيمة المرجعية التي نرغب في تثبيت النظام بجوارها. غير أن التشغيل الفعلي للنظام غالبًا ما يكون بعيدًا عن هذه النقطة، أي $x_0 \neq x_e$.

وبالتالي فإن الهدف من التحليل ليس وجود التوازن، بل فهم كيفية الانتقال التدريجي للنظام من الحالة الابتدائية نحو هذه النقطة [2].

نعتبر الآن النموذج الخطي

$$\dot{x} = -ax + u, \qquad a > 0,$$

حيث a معامل ثابت معروف. عند اختيار $u = \bar{u}$، تكون نقطة التوازن $x_e = \frac{\bar{u}}{a}$. وبفرض النقطة الابتدائية x_0 للنظام نعرف المتغير $y(t) = x(t) - x_e$. وبالتالي نحصل على النظام

$$\dot{y} = -ay, \qquad y(0) = x_0 - x_e = y_0.$$

الحل العام للمعادلة هو

$$y(t) = y_0 e^{-at}.$$

إذن، هذه المعادلة التفاضلية تحدد طبيعة السلوك، بينما القيمة y_0 تحدد شدة الانحراف الابتدائي وسرعة اقتراب النظام من التوازن. ويظهر التحليل أن جميع الحلول تتقارب نحو التوازن متى كان النظام مستقرًا [4].

رغم بساطة هذا النموذج، فإنه يوضح جيدًا كيف تسمح هذه المعادلات بتحليل الاستجابة الزمنية والسلوك طويل المدى. غير أن النماذج من الرتبة الأولى، رغم أهميتها التعليمية، غير كافية لتمثيل العديد من أنظمة التحكم الواقعية لأنها لا تصف الظواهر المتذبذبة، ولا تأخذ بعين الاعتبار القصور الذاتي، ولا تميز بين أنواع الاستجابة الانتقالية، مما يستدعي الانتقال إلى نماذج من رتب أعلى.

لهذا السبب ندرس نظام التحكم من الرتبة الثانية، والذي يمكن تمثيله بالمعادلة التفاضلية

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t),$$

مع الشروط الابتدائية

$$x(0) = \alpha, \qquad \dot{x}(0) = \beta,$$

بحيث ω_n يمثل التردد الطبيعي للنظام، ζ يمثل نسبة التخميد، $u(t)$ يمثل المدخل الخارجي.

بإدخال المتغيرين

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x},$$

نتحصل على النظام من الرتبة الأولى

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

وهو نظام تفاضلي من الرتبة الأولى. يُمثّل شعاع الشرط الابتدائي نقطة الانطلاق في فضاء الطور، ويحدد المسار الزمني للنظام، بينما تُحدد القيم الذاتية للمصفوفة المرتبطة بالنظام طبيعة هذا المسار (عقدة، بؤرة، حلزون) [2]، [5].

تؤثر القيم الابتدائية على شكل الاستجابة الانتقالية (تجاوز، تذبذب)، لكنها لا تؤثر على السلوك طويل المدى في حالة كون النظام مستقرًا. فجميع المسارات، مهما اختلفت بداياتها، تنجذب نحو نقطة التوازن ذاتها.

4. الأنظمة التكيفية كأنظمة ديناميكية موسعة

في القسم السابق، جرى تحليل أنظمة التحكم على أساس أن معاملات النظام ثابتة ومعلومة (مثل a، ω_n، ζ)، مما يسمح بدراسة نقاط التوازن والاستقرار والسلوك طويل المدى باستخدام أدوات المعادلات التفاضلية الكلاسيكية. غير أن هذا الافتراض لا يكون محققًا في كثير من التطبيقات الواقعية، حيث تعمل الأنظمة في بيئات متغيرة أو غير مؤكدة، وتكون بعض المعلمات الفيزيائية غير معروفة بدقة أو قابلة للتغير مع الزمن. في هذه الحالة يصبح من الضروري توسيع النموذج الرياضي بحيث لا يصف تطور الحالة فقط، بل يصف كذلك تطور تقدير هذه المعلمات [1].

لإبراز هذه الفكرة، نعتبر نظامًا ديناميكيًا من الرتبة الأولى [3]

$$\dot{x} = -ax + bu, \qquad a, b > 0,$$

حيث a و b معاملات غير معروفة بدقة و$x(t)$ متغير الحالة. نفترض أن الهدف هو جعل $x(t)$ يتتبع إشارة مرجعية $x_r(t)$ ناتجة عن نموذج مرجعي

$$\dot{x_r} = -a_r x_r + b_r r(t),$$

ونعرّف خطأ التتبع

$$e(t) = x(t) - x_r(t).$$

الهدف الأساسي للتحكم الكيفي هو

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.$$

في إطار التحكم التكيفي، لا يكفي تصميم إشارة التحكم، بل يجب تحديثها مع الزمن. أي لا تُعتبر المعلمات a وb ثوابت مجهولة فحسب، بل يتم استبدالهما بتقديرات زمنية $\hat{a}(t)$ و $\hat{b}(t)$، تستعمل مباشرة في قانون التحكم. على سبيل المثال، يمكن اختيار إشارة التحكم على الشكل [6]

$$u = \hat{a}x + \hat{b}r,$$

بحيث $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ليستا ثوابت، بل دوال زمنية. لذلك تُعطى بقوانين تطور تفاضلية

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 xe, \qquad \dot{\hat{b}} = -\gamma_2 re,$$

بدمج معادلات الحالة ومعادلات التكيف، نحصل على نظام ديناميكي موسع

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + b(\hat{a}x + \hat{b}r), \\ \dot{\hat{a}} = -\gamma_1 xe, \\ \dot{\hat{b}} = -\gamma_2 re, \end{cases}$$

بهذا التوسيع لا يعود النظام موصوفًا بمعادلة تفاضلية واحدة، بل بنظام ديناميكي موسع، تكون فيه الحالة الفيزيائية وتقديرات المعلمات جزءًا من فضاء الحالة الكلي. هذا الوصف يسمح بإثبات الاستقرار باستخدام دالة ليابونوف مناسبة، حيث يمكن إثبات أن خطأ التتبع يبقى محدودًا، وأن سلوك النظام يتقارب نحو السلوك المرجعي تحت شروط مناسبة على إشارات الإثارة والمعاملات. في هذا السياق يصبح من الممكن إعطاء تفسير رياضي دقيق لمفهوم الذكاء في الأنظمة الهندسية، انطلاقًا من البنية الديناميكية نفسها.

من المنظور الرياضي، يظهر هنا المعنى الدقيق لوصف هذا النوع من الأنظمة بالأنظمة الذكية، فالذكاء لا يفهم بوصفه خاصية خارجية أو مفهومًا فلسفيًا، بل بوصفه قدرة النظام على تعديل بنيته الداخلية استجابة للخطأ الناتج عن التفاعل مع البيئة. هذا التعديل يتم وفق (عبر) قوانين تفاضلية صريحة، ويمكن تحليله بدقة باستخدام نفس الأدوات المستعملة في دراسة النظم الديناميكية الكلاسيكية.

وعليه فإن دور المعادلات التفاضلية في هذا السياق لا يقتصر على وصف تطور الحالة، بل يمتد إلى وصف تطور المعرفة التي يمتلكها النظام عن نفسه. هذا الدمج بين ديناميكا الحالة وديناميكا المعلمات هو ما يجعل الأنظمة التكيفية إطارًا رياضيًا طبيعيًا لنمذجة عدد كبير من الأنظمة الذكية في الهندسة والعلوم التطبيقية [4].

من منظور رياضي بحت، يوصف النظام بأنه ذكي لأن له ذاكرة (معلمات)، تحدث هذه الذاكرة وفق قانون تفاضلي، ويستخدم الخطأ لتحسين سلوكه مستقبليًا. وهذا يتوافق مع التعريف الوظيفي للذكاء في الأنظمة الهندسية، والذي هو القدرة على التكيف مع عدم اليقين اعتمادًا على التجربة الزمنية.

5. الخاتمة

تناول هذا المقال دور المعادلات التفاضلية العادية في نمذجة وتحليل الأنظمة الديناميكية، مع التركيز على تطبيقاتها في أنظمة التحكم والأنظمة التكيفية التي تُستعمل على نطاق واسع في الأنظمة الذكية الحديثة. وقد أبرزت

المعادلات التفاضلية بوصفها الأداة الرياضية الأساسية التي تسمح بوصف تطور الأنظمة مع الزمن، وتحليل سلوكها النوعي من حيث نقاط التوازن، والاستقرار، والسلوك طويل المدى.

تظهر النتائج المعروضة أن المعادلات التفاضلية تُشكل حلقة الوصل بين النمذجة الفيزيائية والتحليل الرياضي والسلوك الذكي للنظام، دون الحاجة إلى تعريفات فلسفية أو افتراضات خارج الإطار الرياضي. ومن هذا المنظور، يمكن اعتبار الأنظمة الذكية حالة خاصة من النظم الديناميكية الموسعة، حيث تتفاعل ديناميكا الحالة مع ديناميكا المعلمات في بنية موحدة.

وفي الختام، يفتح هذا الإطار آفاقًا واسعة لتطبيقات مستقبلية تشمل نمذجة أنظمة أكثر تعقيدًا، مثل الأنظمة غير الخطية ذات الأبعاد العالية، والأنظمة المتصلة بالتعلم الآلي، حيث يمكن للمعادلات التفاضلية أن تلعب دورًا محوريًا في الربط بين النماذج الرياضية الكلاسيكية والأساليب الذكية الحديثة.

المراجع

[1] Åström, K. J., Wittenmark, B., *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1995.

[2] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L., *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic Press, 2013.

[3] Ioannou, P. A., Sun, J., *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, 1996.

[4] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002.

[5] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 2010.

[6] Slotine, J.-J. E., Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Pearson, 1991.