حديث عن المنطق
الجزء الأول: ما هو المنطق؟

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

إلى الذكرى المثيرة والمُلهِمة للإمام تقي الدين أحمد بن تيمية رحمه الله

1. مقدمة

منذ فترة طويلة، وتحديدًا منذ ربيع العام 1999، تشكّل لدي انطباع قوي حول وجود إهمال قوي متعمد أو غير متعمد، للمنطق ليس في المدارس والجامعات الجزائرية فحسب، وإنما أيضًا في جل المؤسسات الأكاديمية، سواء كانت حكومية أو خاصة، في الوطن العربي الكبير. وما يثير الحزن في النفس، وأحيانًا السخرية، وجود اعتقاد منتشر لدى المهتمين بدراسة وتدريس الرياضيات في الجزائر مفاده أن دراسة هذه المادة الحيوية لا تحتاج إلى معرفة ولو ضئيلة للغاية بالمنطق، كما لو أن الرياضيات من طينة والمنطق من طينة أخرى. في حين يوجد جمهور معتبر من عتاة علماء المنطق الذين يتزعمهم راسل، ينظر إلى الرياضيات كجزء أصيل من المنطق. وبغض النظر عن توجهات فكرية كهذه، يجد الدارس لموضوعات الرياضيات أحكامًا بالصحة أو بالخطأ للمقولات الرياضية، التي تسمى صيغًا رياضية، الأمر الذي يعني وجود أنظمة حكم بالصواب من عدمه في الدراسات الرياضية. ومثل هذه الأنظمة هي ما يُطلق عليها اسم المنطق. وهكذا يستطيع العاقل أن يدرك أن الدراسات الجارية في الرياضيات، السليمة منها لا السقيمة، مستندة حتمًا إلى منطق ما.

ويستغرب المرء بشدة حديث البعض عن شأن ما في الرياضيات من دون امتلاك وعي حقيقي بمعنى الصواب والخطأ في هذا العلم. وربما قد يقال إن مفهومي الصواب والخطأ متعاليان عن الممارسات الجارية في الرياضيات، ومن ثمة لا يحتاجان إلى المنطق اللازم للتعرف عليهما، كما لو أن العقل البشري لديه قدرة فطرية لاكتشافهما. إن مثل هذا الشعور الطاغي على عقول البعض زائف تمامًا ولا صحة له، وإنما هو نتاج مباشر لطغيان منطق آخر على هذه العقول والمتمثل في المنطق الشخصي (Personal logic)، والذي يشكّل المنطق التجريبي العادي (Ordinary empirical logic) جزءه الأكبر. وسنتحدث عن هذا المنطق لاحقًا. إن المنطق المناسب للدراسات الرياضية هو المنطق الرياضي الكلاسيكي CML (Classical mathematical logic)، والذي سنتحدث عنه أيضًا لاحقًا.

وقد يتساءل البعض عن الفائدة المرجوة من استبدال منطق سهل، هو نتاج التربية الأسرية والمجتمعية والواقع المعاش، بمنطق رمزي مجرد صعب. في الحقيقة لا تُمثل عملية الاستبدال هذه ترفًا فكريًا، وإنما هي ضرورية لبناء الرياضيات مثلما أن غاز الأكسجين ضروري لحياة الكائنات الحية الهوائية. ولقد دافع هيلبرت بحماسة لا نظير لها في بداية القرن العشرين عن استخدام المنطق الرياضي الكلاسيكي في الدراسات الرياضية، ليس حبًا فيه، وإنما لأنه يعرف عن يقين تام أن عدم استخدامه يعني بكل بساطة فقدان الجزء الأهم والأجمل في الرياضيات، وهو الجزء الساحر المتعلق باللانهاية. وإذا أصر مدرّس رياضيات ما على استخدام منطقه الخاص الذي تعلّمه بالقرب من منزله في مهامه، فعليه بالمقابل أن يتخلى عن تدريس الأشياء الجميلة والساحرة في الرياضيات مثل الأعداد الحقيقية وتكامل لوبيغ وفضاءات لوبيغ، والسبب هو أن منطقه الشخصي لا يسمح له بإنشاء مثل هذه المفاهيم الرياضية، فهي في حكم العدم بالنسبة له.

وما يجهله البعض للأسف بسبب التحصيل الضعيف في الدراسات المنطقية هو أن منطقًا يُقر بمبدأ الثالث المرفوع (The principle of the excluded middle) وبخاصية الانفصال المنطقية (Logical disjunction property) في آن معًا، مثل أنواع المنطق التجريبية، يعجز حتمًا عن بناء الرياضيات المهمة المتعلقة باللانهاية. ويدرك علماء المنطق، وعلى رأسهم هيلبرت، ذلك. لذلك اختاروا الطريق الصائب الذي يوصلهم بأمان إلى البناء الأكثر كمالًا للرياضيات، وذلك بالاحتفاظ بمبدأ الثالث المرفوع والتخلي عن خاصية الانفصال.

وإهمال المنطق لدينا ليس جديدًا، بل يعود في الحقيقة إلى قرون طويلة مضت. ولقد اطلعت بصورة كاملة على كتاب شيخ الإسلام ابن تيمية رحمه الله، والذي عنوانه "الانتصار لأهل الأثر" [1]. لقد دافع الشيخ بحماسة منقطعة النظير وببلاغة قوية في هذا الكتاب عن العقيدة الإسلامية الصحيحة، وهي عقيدة السلف أو أيضًا عقيدة أهل السنة والجماعة. وذمّ المنطق، وهو يقصد بلا شك المنطق القياسي الأرسطي، كما ذمّ استخدامه من قِبل البعض في الدفاع عن هذه العقيدة. وبحثت كثيرًا في طيات كتاب الشيخ عن عرض ما لمنطق أرسطو، ولم أعثر عليه، الأمر الذي يرجح لدي فكرة أن الشيخ سمع عن هذا المنطق، ولم يطلع عليه مباشرة. وحاولت الحصول على عروض كاملة لهذا المنطق زعم البعض وجودها، ولم أقع لها على أثر. وقيل إن ابن سينا والغزالي والرازي رحمهم الله تناولوا بالدراسة منطق أرسطو، وقدّموا بدائل له. بيد أني فشلت أيضا في العثور على بديل واحد منها. وحتى دراسة الفيلسوف ابن رشد رحمه الله، والذي يعتبره الفلاسفة الغربيون الحافظ الأمين لفلسفة أرسطو، حول المنطق لم تتبين لي حقيقة وجودها أو مصيرها. من هنا قررت عرض المنطق القياسي الأرسطي بحذافيره في الجزء الثالث من هذا المقال، آملًا أن يتيح ذلك فائدة ما للبعض.

سنرى كيف أن منطق أرسطو هو في جوهره نظام استدلال جزئي من المنطق التجريبي العادي الوثيق الارتباط بالعالم الفيزيائي الذي نحيا فيه. وعلى هذا الأساس فهو غير صالح بالمرة لتقييم موضوعات العقيدة الإسلامية المتجاوزة لهذا العالم، بل هو غير صالح حتى للتقييم والحكم في إطار الرياضيات. من هنا نرى ذم الإمام ابن تيمية لاستخدام هذا المنطق في الدفاع عن العقيدة مشروعًا تمامًا. وأجهل كليًا إن كان الشيوخ الأجلاء من أمثال الأشعري والشهرستاني والرازي والآمدي والإيجي والتفتازاني وابن همام رحمهم الله جميعًا قد استخدموا هذا المنطق في الدفاع عن العقيدة الإسلامية في وجه خصومهم من فرق الكلام والفلاسفة. وعمومًا فإن دراسة مثل هذه المواضيع تخرج عن الهدف المحدد لهذا النص.

نعرض في هذا الجزء الأول أهم أنواع المنطق، والتي لها تأثير جمعي واضح.

2. المنطق

المنطق هو نظام عقلي للحكم والتقييم، هو نظام عقلي لإثبات صفات الحق والصدق والصِّحة والصواب من عدمها. ويُفهم من عبارة "نظام عقلي" هنا أن العقل البشري كآلة تفكير هو الممارس الفعلي لعمليات الحكم والتقييم أيًا كانت طبيعتها، وليس المقصود منها أن يتبنى هذا العقل نهجًا محددًا في التفكير دون غيره، كأن يتبنى على سبيل المثال نهج تفكير فلاسفة الإغريق القدامى، ويزدري بالمقابل كل نهج مغاير له، وهذا ما فعلته بعض فرق الكلام حين زعمت أنها تسعى إلى اختراع صياغة عقلية صلبة باللغة العربية للعقيدة الإسلامية، وسار عليه فلاسفة مسلمون مثل ابن رشد. وما يترتب على هذا التصريح هو أن عمليات الحكم والتقييم النابعة من الاعتقادات المختلفة، وإن كانت قديمة وتبدو غامضة في نظر البعض، هي في جوهرها ممارسات عقلية منطقية، وإنما تمت هذه العمليات على أسس منطق مختلف عن المنطق الاستنباطي (Deductive logic)، وهو المنطق الاعتقادي (Belief logic).

يتضمن أيّ منطق مجموعة محددة من قواعد الاستدلال، والتي يمكن صياغة كل واحدة منها على النحو الآتي:

$$\frac{P_1, \dots, P_n}{P}$$

حيث تسمى P_1، ...، P_n مقدّمات أو مُدْخلات، بينما تسمى P نتيجة أو مُخرجة.

وتحدد طبيعة قواعد الاستدلال المتبناة في منطق ما نوعه. ويُتوقع على هذا الأساس وجود عدد لا يحصى من أنواع المنطق. وسعيًا إلى فهم أفضل، نعرض فيما يلي بعضًا من أهم هذه الأنواع.

1.2. المنطق التجريبي العادي

هو أكثرها وضوحًا واستخدامًا في حياة الناس العادية. ويُستند في الحكم على صحة المقولات من عدمها في هذا المنطق على وصفها لوقائع معينة حدثت بالفعل في إطار الواقع الفيزيائي من حولنا، والذي ندعوه بالنموذج الفيزيائي $PhyM$ (Physical model). ويتضمن هذا المنطق قاعدة استدلال أساسية واحدة هي

$$\frac{PhyM \vDash P}{P}$$

مضافًا إليها بعض قواعد الاستقراء الهامشية. تعني الكتابة الرمزية المختصرة $PhyM \vDash P$ أن المقولة P، والتي تصف أحداثًا فيزيائية حقيقية، محققة بالمعنى الفيزيائي في النموذج الفيزيائي $PhyM$، وعلى هذا الأساس يقال إنها صحيحة (في إطار المنطق التجريبي العادي).

يسمى المنطق التجريبي العادي كذلك "الحدس" أو "البديهة" أو المنطق الحدسي البسيط أو المنطق البديهي البسيط، وهو يختلف كليًا بطبيعة الحال عن المنطق الحدسي، الذي سنتحدث عنه لاحقًا. يتبنى جميع البشر بلا استثناء المنطق التجريبي العادي، ويُنظر إلى كل من يخالفه بغير السوي عقليًا. ويبدو للناظر كما لو أن هذا المنطق يفرض نفسه فرضًا على العقل البشري. وقد انطلق أحد الفلاسفة، وهو إيمانويل كانت، من هذا التصور ليبني ما سمّاه بالحدس الخالص، وهو غير الحدس الفيزيائي الذي تحدثنا عنه. ويرى هذا الفيلسوف أن هذا الحدس ضروري لعمل العقل، وقد مهدت أفكاره لميلاد المنطق الحدسي فيما بعد.

في إطار المنطق التجريبي العادي، مبدأ الثالث المرفوع "المقولة P صحيحة أو نفيها المنطقي $\neg P$ صحيح"، والذي يصاغ غالبًا كما يلي: "المقولة P صحيحة أو خاطئة"، هو مبدأ منطقي صحيح وأساسي، ويعتمد عليه. ويتمتع هذا المنطق كذلك بما يسميه المنطقيون خاصية الانفصال، وهي الخاصية الموصوفة بالمقولة التالية: "المقولة P صحيحة أو المقولة Q صحيحة $\Leftrightarrow$ المقولة P أو Q صحيحة". هنا يمثل الرمز $\Leftrightarrow$ اختصارًا للعبارة العربية "إذا وإذا فقط". وكمثال، فعندما يقول أحدهم: "جاء زيد أو عمرو"، إنما يقصد تحديدًا أن أحد الرجلين قد جاء فعلًا. وقد بيّنا في مقال سابق كيف أن المنطق الرياضي الكلاسيكي لا يحقق خاصية الانفصال المشار إليها. وعلى هذا الأساس فهو يختلف عن المنطق التجريبي العادي.

تصاغ المقولات التي يتناولها المنطق التجريبي العادي غالبًا بواسطة إحدى اللغات البشرية المنطوقة مثل العربية والإنكليزية والفرنسية. ولا يُخشى أبدًا من الوقوع في ظاهرة التناقض الخطيرة، وهي الوصول أثناء خطوة ما من خطوات الاستدلال إلى مقولة من النوع: "المقولة P ونفيها المنطقي $\neg P$ صحيحتان"، في إطار هذا المنطق. والسبب هو أن علماء الطبيعة، وفي المقدمة منهم علماء الفيزياء والكيمياء والأحياء، يعتقدون جازمين أن الكون الذي نعيش فيه خالٍ من الحوادث الفيزيائية المتضادة.

تكمن واحدة من التحديات المطروحة في المنطق التجريبي العادي في التحقق الميداني من صحة المقولة $PhyM \vDash P$. ففي بعض الأحيان يصير صعبًا وربما مستحيلًا القيام بذلك. ونذكر على سبيل المثال أن الناس العاديين ليس بمقدورهم الحكم على صحة المقولة "بعض الأمراض تسببها كائنات حية لا تُرى بالعين المجردة" من عدمه، وأن إصدار مثل هذا الحكم يتطلب إمكانيات غير متوفرة لدى هؤلاء، إمكانيات أصبحت، كما يعلم الجميع، متاحة منذ مدة لعلماء الأحياء والأطباء. وما يراد قوله هو أن علماء الطبيعة طوروا إمكانياتهم الخاصة التي تسمح لهم بالحكم على مقولات يعجز الرجل العادي أخذ أي قرار حيالها، وبذلك نقلوا المنطق التجريبي العادي إلى مستوى متقدم جديد حيث تم اختراع اسم جديد هو المنطق التجريبي العلمي أو منطق علماء الطبيعة. وهذا ما سنتحدث عنه فيما يلي.

2.2. المنطق التجريبي العلمي

ليس باستطاعة الإنسان العادي أن يصدر، مستندًا إلى المنطق التجريبي العادي، حكمًا بالصحة من عدمه على المقولة "تطير مجرة درب التبانة عبر الفراغ الواسع بين المجرات بسرعة تقارب 600 كلم في الثانية"، والمؤهلون لإصدار مثل هذا الحكم هم علماء الفلك والكون. وتعتبر الجملة المعنية صحيحة استنادًا إلى كتابات بعضهم. والله أعلم.

طور علماء الطبيعة آليات للتحقق الميداني من صحة المقولات المتناولة من قبلهم ومن صياغة مقولات جديدة واصفة لأحداث طبيعية معروفة أو مستجدة. ويمكن حصر هذه الآليات في الملاحظة والتجربة العلميتين والحساب العلمي، وفي آليات نظرية تتمثل بالضبط في النظريات العلمية المطورة والمقبولة والمعتمدة من قبلهم. سنبدل ما أسميناه النموذج الفيزيائي $PhyM$ بعالم أوسع منه هو الكون الفيزيائي $PhyU$ (Physical universe). قاعدة الاستدلال الأولى في المنطق التجريبي العلمي هي

$$\text{(I)} \quad \frac{PhyU \vDash P}{P}$$

حيث تعني الكتابة الرمزية المختصرة $PhyU \vDash P$ أن المقولة P محققة فيزيائيًا في العالَم $PhyU$. توجد قواعد استدلال أخرى في هذا المنطق هي

$$\text{(II)} \quad \frac{Th \vdash P}{P}$$

حيث Th هي إحدى النظريات التي طورها علماء الطبيعة باتفاق بينهم. وتعني الكتابة الرمزية $Th \vdash P$ أن المقولة P صحيحة استنادًا إلى النظرية Th.

تسمى المقولات المتوصل إلى صحتها بالقاعدة (I) وحدها بالحقائق الطبيعية التجريبية المحتاجة إلى التفسير النظري. بينما تسمى المقولات المتوصل إلى صحتها بواسطة القواعد (II) وحدها بالتخمينات النظرية المحتاجة إلى إثبات تجريبي. في الأخير تسمى المقولات المتوصل إليها بواسطة قواعد الاستدلال

$$\frac{PhyU \vDash P, Th \vdash P}{P}$$

بالحقائق الطبيعية أو بالحقائق في العلوم الطبيعية.

في بعض الأحيان نحصل على $PhyU \vDash P$ وَ $Th \vdash Q$، حيث تكون المقولتان P وَ Q غير متوافقتين، وربما تنتج عنهما تفسيرات ومدلولات فيزيائية متضاربة. في هذه الحالة يعاد التحقق من صحة المقولة $PhyU \vDash P$ ميدانيًا. فإذا تم ذلك بلا نتائج جديدة، يعاد النظر في النظرية الفيزيائية Th. وكمثال على ذلك عندما عجزت الميكانيكا الكلاسيكية عن تفسير نتيجة تجربة ميكلسون وَمورلي الشهيرة، قام آينشتاين لهذا السبب ولأسباب أخرى بتعديلها في العام 1905، مقدّمًا بذلك نظرية فيزيائية محوّرة وجديدة، هي نظرية النسبية الخاصة. وفي العام 1915 قام بتوسيع وتعميق هذه النظرية مقدّمًا بذلك بديلًا لها أكثر عمومية هو نظرية النسبية العامة، والتي تعطي تفسيرًا جديدًا وثوريًا لمفهوم الجاذبية كانحناء لما سماه آينشتاين الزمكان (الزمن + المكان).

ولقد توجس في البداية فيزيائيون كثر من هذه النظرية. بيد أن هذا التوجس سرعان ما خفت عندما أكد عالم الفلك إدينغتون في العام 1919 ظاهرة انحراف ضوء بعض النجوم عند مروره بالقرب من الشمس، معطيًا بذلك دليلا تجريبيًا على أن الجاذبية لا تؤثر في الكتل وحدها، وإنما أيضا في الضوء، وهي بالمناسبة نتيجة متوقعة تمامًا في إطار النسبية العامة. ولقد جعل هذا الاكتشاف آينشتاين مشهورًا عالميًا، ورسخ مكانته كفيزيائي استثنائي بين نظرائه. وحتى وقت قريب كان بعض المنظرين الفيزيائيين يحلمون بإجراء تغيير ما على النسبية العامة، وقد تزودوا برياضيات فائقة التطور مثل التوبولوجيا الكمومية لأجل إنجاز هذه المهمة. بيد أن الاكتشاف التجريبي للموجات الثقالية في العام 2015، وهي ظاهرة

فلكية تنبأت بها النسبية العامة في العام 1915، جعل عبورهم عبر هدم جزء ولو يسير من نظرية آينشتاين إلى نظرية جديدة مستحيلًا في الوقت الراهن.

3.2. المنطق الرياضي

هو أكثر أنواع المنطق الفلسفي حضورًا وشهرة. ولقد تحدثنا بإيجاز في مقال سابق عن أشهر أنواعه المسمى بالمنطق الرياضي الكلاسيكي، وقدّمنا له نظامًا للبرهان في إطار أنظمة البرهان الهيلبرتية المشار إليها اختصارًا بالرمز HK. المقولات التي يُعنى بها المنطق الرياضي هي الصيغ الرياضية، وهي كلمات مكتوبة باستخدام أبجديات اللغات الرياضية الرمزية. وتحتوي هذه الأبجديات جميعا على رموز الروابط المنطقية ¬، ∧، ∨، ⇒، ⇔، وعلى رمزي المكممين الوجودي والعمومي ∃، ∀.

يتبنى المنطق الرياضي الكلاسيكي مبدأ الثالث المرفوع "الصيغة الرياضية $P \vee \neg P$ صحيحة" ومبدأ النفي المضاعف "الصيغة الرياضية $P \Leftrightarrow \neg\neg P$ صحيحة"، ولا يتمتع، كما يجهل الكثير، بخاصية الانفصال، وإنما يتمتع بالخاصية الأضعف منها: الصيغة P صحيحة أو الصيغة Q صحيحة ⇐ الصيغة $P \vee Q$ صحيحة. وقد بدأ دي مورغان وبول وبيرس وفريجه تأسيس هذا المنطق في القرن التاسع عشر.

المنطق الرياضي الحدسي IML (Intuitionistic mathematical logic)، وهو منطق إنشائي (Constructive logic)، يأتي من حيث الشهرة والأهمية في الرياضيات في المرتبة الثانية بعد المنطق الرياضي الكلاسيكي. أسس هذا المنطق بروير وتلاميذه في بداية القرن العشرين. وقد استند هؤلاء في عملية التأسيس إلى مقولات كرونيكر، والذي يعتبر على نطاق واسع الأب الأول للفكر الرياضي الحدسي. ويُعتقد أن هذا الأخير استلهم مقولاته حول الرياضيات من أطروحات الفيلسوف كانت حول ما يسمى بالحدس الخالص.

لا يتبنى المنطق الرياضي الحدسي مبدأ الثالث المرفوع والنفي المضاعف، ويتمتع، على خلاف المنطق الرياضي الكلاسيكي، بخاصية الانفصال: الصيغة P صحيحة أو الصيغة Q صحيحة ⇔ الصيغة $P \vee Q$ صحيحة.

في العام 1934 نشر كل من جنتزن [6] وجاسكوفسكي [8] مقالين رائدين حول نُظم البرهان التتابعية (Sequent proof systems)، وهي أنظمة استدلالية غاية في الجدة والحداثة، وشكّل ظهورها قفزة نوعية غير متوقعة، وبذلك اعتبرت حدثًا مهمًا في تاريخ نظرية البرهان الرياضية. سمّى جنتزن هذه الأنظمة باسم "نظم الاستنباط غير المسلماتية" (Non-axiomatic deductive systems)، بينما سمّاها منافسه جاسكوفسكي باسم "الأنظمة المركبة" (Composite systems)، وهذا لتمييزها عن الأنظمة الأكثر تقليدية، وهي أنظمة البرهان الهيلبرتية. وفي خضم نشاطهما المبدع قدّم هذان المنطقيان أنظمة برهان خاصة، سمّياها أنظمة الاستنتاج الطبيعي (Natural deduction systems)، واعتبراها الأنظمة الاستدلالية الأكثر طبيعية والأكثر مناسبة وفائدة للعمل الفكري في الرياضيات والفلسفة، وحتى للخطابات السياسية العامة.

يُرمز في كتب المنطق الرياضي إلى أنظمة البرهان التتابعية وأنظمة الاستنتاج الطبيعي الخاصة بالمنطق CML بالرمزين LK وَNK على التوالي، وإلى نظيرتها الخاصة بالمنطق IML بالرمزين LJ وَNJ على التوالي.

نقدّم فيما يلي نظام استنتاج طبيعي للمنطق الرياضي الأصغري (Minimal mathematical logic)، والذي عرضه لأول مرة جنتزن في مقاله [7]:

$$\frac{P,Q}{P \wedge Q}, \frac{P \wedge Q}{P}, \frac{P \wedge Q}{Q}, \frac{P}{P \vee Q}, \frac{Q}{P \vee Q}, \frac{P \vee Q, \frac{P}{R}, \frac{Q}{R}}{R}, \frac{\frac{P}{Q}}{P \Rightarrow Q}, \frac{P, P \Rightarrow Q}{Q},$$

$$\frac{\frac{P}{F}}{\neg P}, \frac{P, \neg P}{F}, \frac{P}{(\forall x)P}, \frac{P[x \leftarrow y]}{(\exists x)P}, \frac{(\exists x)P, \frac{P[x \leftarrow y]}{Q}}{Q}$$

حيث F ثابت قضَوي (Propositional constant)، يدعى "الخطأ"، وَ$P[x \leftarrow y]$ هي الصيغة الرياضية الناتجة عن P بتعويض المتغير الفردي x بالمتغير الفردي y. إذا أضفنا إلى مجموعة قواعد الاستنباط السابقة القاعدة

$$\frac{F}{P}$$

نحصل على نظام استنتاج طبيعي للمنطق IML. وإذا أضفنا مرة أخرى القاعدة

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

نحصل على آخر للمنطق CML.

هناك نوع من أنواع المنطق الرياضي تتزايد دراسته وأهميته مع مرور الوقت منذ العام 1918، وهو ما سأطلق عليه هنا اسم "المنطق الرياضي المَوْضي" أو أيضا "المنطق الرياضي النمطي" (Modal mathematical logic). يُعنى هذا المنطق بالصيغ الرياضية المكتوبة بواسطة أبجديات رياضية رمزية حاوية على رابط منطقي جديد $\Box$، يدعى مؤثرا نمطيًا (Modal operator). يؤول معنى هذا الرابط من حالة إلى أخرى، وذلك حسب الحاجة والذوق. واعتمادًا عليه يُعرَّف رابط منطقي جديد $\Diamond$ كالآتي:

$$\Diamond P := \neg \Box \neg P$$

حيث P صيغة رياضية. قاعدتا الاستدلال الجديدتان الخاصتان بالمنطق الرياضي النمطي هما القاعدة

$$\overline{\Box (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)}$$

وقاعدة الضرورة (Rule of necessitation)

$$\text{RN:}\frac{P}{\Box P}$$

4.2. المنطق الفلسفي

يُمثل المنطق الفلسفي توسيعًا معتبرًا للمنطق الرياضي، وذلك على صعيد الروابط المنطقية ومعانيها، وعلى صعيد اللغات المستخدمة في صياغة المقولات المعنى بها. يُمثل المنطق الفلسفي الكلاسيكي المنطق الفلسفي الأهم على الإطلاق في الفكر البشري بسبب كونه منطقًا خالصًا، أي لا يتعلق بالذات الممارسة لعملية التفكير، ومجسدًا لممارسات مدرسة أفلاطون الفلسفية القديمة. وقد وسمه بيرناييز [4] لأسباب وجيهة بسمة "الكلاسيكية" أو "الأفلاطونية"؛ فالفيلسوف الكلاسيكي المعتنق لهذا المنطق هو باحث عن الحقيقة ومكتشف لها مثلما هو عالم الفلك باحث عن الأجرام الفلكية ومكتشف لها. ويفرض هذا السلوك الفكري على العقل أن يتقيد بحكاية الوجود المنفصل والمسبق لمختلف المفاهيم المعنى بها، ويجعله بذلك يقترب من مبدأ أفلاطون الشهير حول المثل والصور العقلية المتجاوزة والمنفصلة عن العالم الفيزيائي. من هنا نفهم سر وصف بيرناييز للمنطق الكلاسيكي بأنه أفلاطوني الهوى. وفي الحقيقة أهم ما يميز هذا المنطق هو ذاك المعنى المحدد الذي منحه للوجود، والذي يرفضه الفلاسفة الإنشائيون جملة وتفصيلا، وقد تحدثنا في مقال سابق عن هذا المعنى. ويمكن القول إجمالًا إن المفهوم الكلاسيكي حول الوجود يتسم بخاصية الاكتشاف لا الإنشاء للمفاهيم العقلية الموصوفة بواسطة المقولات الفلسفية. وهو ما قد يكون قصده أفلاطون حينما وضع مبدأه المشار إليه آنفًا.

يحتفظ المنطق الفلسفي الكلاسيكي بالروابط المنطقية المعهودة للمنطق الكلاسيكي الرياضي وبمعانيها كما هي دون تغيير. وعلى هذا الأساس يتوقع المرء أن يتبنى هذا المنطق مبدآ الثالث المرفوع والنفي المضاعف، وألا يتمتع بخاصية الانفصال.

المنطق الفلسفي الحدسي هو النظير الفلسفي للمنطق الحدسي الرياضي. يتبنى هذا المنطق الإنشائي المنبثق عن أفكار كانت حول الحدس الخالص المعاني التي أعلنها وحددها الثلاثي بروير وَهيتينغ وَكولموغوروف في مطلع عقد الثلاثينيات

من القرن الماضي للروابط المنطقية وللوجود. وبالمجمل يؤكد أصحاب هذا المنطق أن هناك مفاهيم، سموها حدسًا خالصًا، ضرورية لعمل العقل. ومنها ينطلق هذا العقل في إنشاء، لا اكتشاف، مفاهيم معقدة جديدة. وتلخص جيدًا هذا التوجه الفكري الإنشائي مقولة كرونيكر الشهيرة: "أعطانا الله الأعداد الطبيعية، وكل ما عدا ذلك فهو من صنع الإنسان".

في تعليقه على الجزء الأول من كتاب "الأصول" لأقليدس والمكتوب في حوالي العام 450 م فرّق بروكلوس [9] على نحو جوهري بين الفكرين الكلاسيكي والإنشائي حينما عرض القول الصادر عن سبيوسيبوس وأتباعه في العام 350 ق.م "جميع مسائل الإنشاء هي مبرهنات" والقول الصادر عن منافسيهم في الوقت ذاته، وهم مينايخموس وجماعته "جميع المبرهنات هي مسائل إنشاء". وليس صعبًا على المرء أن يدرك من هم الكلاسيكيون ومن هم الإنشائيون هنا.

في بداية القرن الماضي لاحظ بيرنايز [4] الفرق الرئيس بين صياغة أقليدس لمسلّمات الهندسة وبين نظيرتها الحديثة التي قدّمها هيلبرت. فبينما تحدّث الأول عن أشكال هندسية يمكن إنشاؤها بالمسطرة والمدور، صاغ الثاني مسلّماته حول وجود هذه الأشكال منذ البداية بانفصال تام عن العقل الممارس للتفكير. وفي الحقيقة لا يتبنى المنطق الهندسي لأقليدس معنى الوجود المتضمن في المنطق الرياضي الكلاسيكي المدعوم بقوة من قبل هيلبرت، وإنما يتبنى حرفيًا المعنى الحدسي الحديث للوجود. وكدليل على ذلك نعرف أن مسألة تربيع الدائرة الشهيرة المقترحة منذ زمن الإغريق القدامى لا تقبل حلًا إنشائيًا بالمسطرة والمدور. ويعود سبب هذه الاستحالة تحديدًا إلى ما اكتشفه ليندمان عن حقيقة كون العدد π هو عدد متسامٍ، بمعنى أنه لا يُمثل جذرًا لأية معادلة جبرية بمعاملات كسرية. من ناحية أخرى تقبل المسألة الآنفة الذكر حلًا سهلًا في جميع النماذج المعيارية للهندسة الأقليدية، وهي المستويات التآلفية الأقليدية. ولا ينبغي أن يدعونا هذا الأمر إلى الاستغراب، ذلك لأن المنطق المتبنى في بناء الهندسة التآلفية هو المنطق الرياضي الكلاسيكي لا المنطق الرياضي الحدسي.

إن أنواع المنطق الفلسفي المحض، مثل المنطق الرياضي الكلاسيكي، ليس بمقدورها تناول مختلف الرؤى الاعتقادية والمعرفية والأخلاقية والقانونية والواجبية للبشر. وقد قال فريجه [5]: "إن مفهومي الضرورة والإمكانية ينتميان إلى نظرية المعرفة، ويتضمنان إشارة خفية إلى المعرفة الإنسانية التي لا مكان لها في المنطق المحض". بيد أن المنطق الفلسفي النمطي المطور منذ العام 1918 يتمتع بنكهة فلسفية خاصة، وذلك لقدرته على تناول تركيبات لغوية غير قابلة للمعالجة من قبل المنطق الفلسفي الخالص من قبيل: "فلان يعتقد أن ..."، "الأشخاص الفُلاَّن يعرفون أن ..."، "من الواجب أن ..."، "من الأخلاق أن ..."، "من القانوني أن ..."، "من العُرْف أن ..."، "من الضروري أن ..."، إلى آخر ذلك. لنتذكر أن الاعتقادات والأخلاق والقانون والمعرفة الشخصية لا يمكن أن تكون بأي حال من الأحوال خالصة، فما يراه أناس أخلاقيًا قد يكون لا أخلاقيًا عند آخرين. وربما لو نطقت الشاة، لقالت لمن يريد ذبحها: "إن ذبحك لي غير أخلاقي". وهذا لا يلغي أبدًا أهمية المنطق الفلسفي النمطي، بل على العكس، فهو يساعد كثيرًا في تطوير منظومات أخلاقية وقانونية انطلاقًا من مسلّماتها الأساسية، والتي تختلف من حال إلى آخر.

إن المفارقة التالية التي اقترحها هينتيكا: "إذا كان السلوك أ غير أخلاقي، وإذا استحال القيام بالسلوك ب دون القيام بالسلوك أ، فهذا يعني أن السلوك ب غير أخلاقي. إذا كان السلوك أ غير أخلاقي، وإذا كان القيام بالسلوك ب مستحيلًا، فهذا يعني أن القيام بالسلوك ب دون القيام بالسلوك أ مستحيل أيضًا. وعليه فإن ب سلوك غير أخلاقي" تتجاوز إمكانيات أي منطق فلسفي خالص. بيد أنها تمثل من ناحية أخرى استنباطًا صحيحًا في إطار المنطق الفلسفي الكلاسيكي النمطي المعتمد على اللغة العربية. وينتج هذا الأخير بإضافة المؤثر النمطي "من الأخلاق أن ..." إلى المنطق الفلسفي الكلاسيكي. ولا ضرر هنا في وصف السلوك البشري المستحيل بغير الأخلاقي، لأنه بكل بساطة ما من وقوع حقيقي له، فهو في حكم العدم.

5.2. المنطق الاعتقادي

هو أحد أشهر أنواع المنطق النمطي، حيث يقابل المؤثر النمطي الخاص به، والذي يرمز له عادة بالرمز □، بالجمل العربية: "فلان يعتقد أن ..."، "الجماعة الفلانية تعتقد أن ..."، "الشعب الفلاني يعتقد أن ..."، "الأمة الفلانية تعتقد أن ..."، إلى غير ذلك. ويُستخلص بوضوح من الدراسات التاريخية والأنثروبولوجية أن وجود هذا المنطق على مسرح التاريخ قديم قدم الوجود البشري ذاته. ويفسر بعض علماء الإسلام ذلك بالقول إن جميع المعتقدات البشرية بخلاف العقيدة الإسلامية هي تشويهات لعقائد دينية صحيحة سابقة. ويقدّمون كدليل على طرحهم حقيقة أن الله خلق آدم عليه السلام، ومنحه عقيدة التوحيد الأولى، وهي التي توارثها أبناؤه فيما بعد، ولحقت بها تشويهات متعددة بعد مرور أحقاب زمنية معينة. بينما يرى المفكرون الغربيون أن حاجة البشر إلى التدين نابعة كليا من شعورهم بالخوف. ويعتبرون هذه الحاجة هي علة وجود المعتقدات البشرية الشديدة التنوع والملحوظة هنا وهناك.

وفي القديم تعالى الإغريق على المنطق الاعتقادي المحض وعلى ما نجم عنه من معتقدات. واعتبروا السلوك الاعتقادي سلوكًا شرقيًا محضًا، بمعنى أنه من تراث الشرق لا الغرب. ويقصدون بالشرق كل ما هو واقع جنوبي البحر الأبيض المتوسط، بينما يعتبرون أنفسهم ممثلين للغرب. وتحتفظ الحضارة الغربية الحديثة بهذا التعالي حتى عصرنا الحالي. بيد أن تشعب وتوسع الدراسات المنطقية في بداية القرن الماضي جعل المنطق القياسي الأرسطي المعتد به قديمًا والمنطق الفلسفي الكلاسيكي الحديث الذي خلفه في نهاية القرن التاسع عشر خيارين منطقيين باهتين جدًا ضمن حزمة ثرية وغنية للغاية من الخيارات المنطقية المتنوعة. ولعل المنطق الاعتقادي الذي أعيد الاهتمام به هو أحد هذه الخيارات المنطقية الجديرة بالاحترام.

مراجع

[1] ابن تيمية، الانتصار لأهل الأثر (المطبوع باسم: نقض المنطق)، دار علم الفوائد للنشر والتوزيع.

[2] ناجي هرماس، الرياضيات التعليمية: ما هي الرياضيات التي تُدرَّس؟ الجزء الثاني: مبادئ المنطق الرياضي الكلاسيكي، المدرسة العليا للأساتذة، القبة، العدد 16، أكتوبر 2025.

[3] ناجي هرماس، الرياضيات التعليمية: ما هي الرياضيات التي تُدرَّس؟ الجزء الثالث: الحقيقة في المنطق الرياضي الكلاسيكي واتساق النظرية ZF، المدرسة العليا للأساتذة، القبة، العدد 17، جانفي 2026.

[4] P. Bernays, *Abhandlungen zur philosophie der mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1976.

[5] G. Frege, *Begriffsschrift*, Halle, 1879.

[6] G. Gentzen, *Untersuchungen über das Logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39: 176–210, 405–431, 1934.

[7] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, Mathematische Zeitschrift, 39:176–210, 1935.

[8] S. Jaśkowski, *On the rules of suppositions in formal logic*, Studia logica 1: 5–32, 1934.

[9] Proclus de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide*: Traduits par Paul Ver Eecke, 1948.