حول معيار كوشي: إتمام مجموعة الأعداد الناطقة

زهية مصطفاوي[1]، لينة سلمون[2]، بشرى فحام[2]، حنان نقاز[2]

[1]أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

[2]طالبة متخرجة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

zahia.mostefaoui@g.ens-kouba

هذا المقال هو ترجمة من الفرنسية إلى العربية لجزء من مقال صدر عام 1984 عنوانه "تاريخ الفضاءات التامة" لبيير دوغاك.[1]

يبدو أنّه في القرن الخامس قبل الميلاد اكتشف فيثاغوريٌّ مجهول أن العدد $\sqrt{2}$ غير ناطق. ومن هنا بدأت المسيرة الطويلة لإتمام مجموعة الأعداد الناطقة، وهي المسيرة التي ارتبطت بأسماء عدد من كبار الرياضيين، من بينهم: أويلر، وبولزانو، وكوشي، وميراي، وهاين، وكانتور، وديدكيند، الذين أسهموا بطرائق مختلفة في بناء مجموعة الأعداد الحقيقية انطلاقًا من الأعداد الناطقة، سواء عبر المتتاليات، أو المقاطع، أو مفاهيم النهاية.

1. ظهور معيار كوشي

إنّ معيار كوشي، الذي سيؤدي إلى مفهوم الفضاء التام، هو المبرهنة المركزية (الأساسية) التي يقوم عليها كل التحليل الكلاسيكي. نذكّر بالصيغة الحالية المتعلقة بالمتتاليات العقدية لمعيار كوشي:

لكي تكون للمتتالية العقدية $(u_n)_n$ نهاية، يلزم ويكفي أن يكون من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N حيث من أجل كل n, m حيث $n, m \geq N$ يكون لدينا $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

نقدّم أولا بعض الملاحظات حول الرموز المستخدمة في هذا التعريف، والتي تُظهر المسار الطويل الذي سلكه للوصول إلى هنا.

علامات الترجيح وردت في كتاب *Artis analyticae praxis* لتوماس هاريوت، الذي نُشر عام 1631، حيث قدّم هذا المؤلف علامات المقارنة المستخدمة للمتتاليات. أما الكتابة $(u_n)_n$ فقد ظهرت أولًا عند لاغرانج عام 1759 على الشكل y^m حيث يمثل الأس في y موقعها في ترتيب حدود المتتالية. قبل أن تُثبّت في شكلها الحالي عام 1800 في كتاب *Traité des différences et des séries* للاكروا. وبالنسبة لترميز القيمة المطلقة، فقد أدخله فايرشتراس، وعُثر على أول أثر له في مذكرة نُشرت عام 1877 بمناسبة عرضه نظريته التوابع التحليلية المنتظمة.

في القرن الرابع عشر بدأ الرياضيون في الاهتمام بالسلاسل غير المنتهية، مما أدى إلى البحث عن معايير التقارب المتعلقة بحدود السلسلة، وإلى وضع مفهوم النهاية، ونلاحظ أن صعوبة إثبات معيار كوشي تنبع من أنه يجب استنتاج وجود النهاية، دون معرفتها صراحة. يتطلب الإثبات بناء النهاية انطلاقًا من المتتالية المعنية. هذا الإثبات يفترض مسبقًا بناء مجموعة الأعداد الحقيقية، وهي إحدى المحطات الأساسية للتحليل الكلاسيكي، والتي تم إنجازها في الستينات والسبعينات من القرن التاسع عشر.

[1] P. Dugac, Histoire des espaces complets, Revue d'histoire des sciences, tome 37, n°1, 1984. pp. 3-28.

نلاحظ أن نيكول أورسم كان قد أثبت في القرن الرابع عشر أن السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n}$، وهي السلسلة التوافقية، متباعدة. قام بتجميع حدود السلسلة التوافقية في مجموعات، مجموع كل مجموعة منها أكبر من أو يساوي $\frac{1}{2}$.

$$1, \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\ \frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\ \frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}>2^n\ \frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

قام أورسم بتجميع حدود السلسلة التوافقية في مجموعات من 2^n حدًا لكل مجموعة، مجموع كل مجموعة منها أكبر أو يساوي $\frac{1}{2}$. وبما أن هناك عددًا لا نهائيًا من المجموعات، فإن مجموع السلسلة التوافقية يجب أن يكون أيضًا لا نهائيًا (غير محدود، إذن غير متقارب). ينتج عن ذلك أن المجموع الجزئي للسلسلة التوافقية أكبر من $\frac{n}{2}$ مهما كان n. لذلك فإن هذا المجموع يقترب من المالانهاية مع n، والسلسلة متباعدة.

على وجه التحديد كتب أورسم في كتابه *Questiones super geometriam Euclidis* ما يلي: "مجموع السلسلة غير منتهٍ لأن مجموع الحدين الثالث والرابع أكبر من $\frac{1}{2}$، وكذلك مجموع الحدود من الخامس إلى الثامن، وإلى السادس عشر، وهكذا إلى المالانهاية."

2. معيار أولر

ما هو مهم في إثبات أورسم، هو من جهة إبراز أن الشرط اللازم لتقارب سلسلة (الحد العام يؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى المالانهاية) ليس كافيًا، فهو لا يميز تمامًا تقارب السلسلة؛ ومن جهة أخرى، يحتوي هذا الإثبات ضمنيًا معيار كوشي، وبشكل أدق نَفْيَه.

الخطوة التالية ستكون نحو صياغة هذا المعيار قام بها أويلر عام 1740 في مقاله *De progressionibus harmonicis observationes* حيث ذكر لأول مرة، بصفة غير مكتملة، معيار كوشي، وهو مبدأ مكّنه من الاستنتاج بأن "مجموع سلسلة معينة هو منتهٍ أو غير منتهٍ". لم يتعرض أويلر إلى السلاسل المتباعدة التي تكون مجاميعها الجزئية محدودةً، وهو الموضوع بدأت دراسته الرياضية على يد دالمبير عام 1768، وسيؤدي في القرن التاسع عشر إلى مبرهنة بولزانو-فايرشتراس.

يدرس أويلر السلسلة

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2b}, \ldots, \frac{c}{a+(n-1)b}, \ldots$$

المرتبطة بالمتتالية

$$S_n=\frac{c}{a}+\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a+2b}+\ldots+\frac{c}{a+(n-1)b}.$$

افترض ضمنيًا أن $a>0\,, b>0\,, c>0$، ثم طبّق معيار كوشي على الفرق $S_{ni}-S_i$. نظرًا إلى أن عدد الحدود هو $(n-1)i$، فإن هذا الفرق سيكون أكبر من $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$. وعليه عندما يؤول i إلى المالانهاية فإن هذا الفرق لا يؤول إلى الصفر. ومن هنا يستنتج أويلر أن السلسلة المقترحة تؤول إلى المالانهاية عندما يؤول n إلى المالانهاية.

سبق وأن لاحظ برينجشيم أن معيار أويلر ليس شرطًا كافيًا للتقارب، لأن السلسلة المتباعدة ذات الحد العام $\frac{1}{n\ln n}$ تحققه.

3. معيار بولزانو

يعود الفضل إلى بولزانو في أول صياغة دقيقة للمعيار الأساسي للتقارب، وكذلك إثبات أن أي مجموعة غير منتهية ومحدودة من الأعداد الحقيقية تحتفظ بخاصية وجود الحدين الأعلى والأدنى، وهي خاصية بديهية للمجموعات المنتهية. هذه المسألة الأخيرة فتحت الطريق لدراسة المجموعات الجزئية غير المنتهية من المستقيم الحقيقي، وبالتالي إلى تحسين مفهوم النهاية.

قدّم بولزانو أفضل أعماله في التحليل في مذكرته حول مبرهنة القيم المتوسطة المنشورة عام 1817، والتي تنص على أن أي دالة حقيقية مستمرة f معرفة على مجال $[a, b]$ تأخذ جميع القيم المحصورة بين $f(a)$ و $f(b)$. ورغم أن هذه المذكرة ظلت مجهولة لدى الرياضيين حتى إعادة اكتشاف بولزانو حوالي عام 1865، فإنها تشكل إحدى الخطوات الأساسية نحو حسابية التحليل.

إنّ مذكرة بولزانو لافتة للنظر، لأنها تقدّم أول صياغة دقيقة لمعيار كوشي، وأول محاولة لإثباته، وتطبيقًا جميلًا لهذا المعيار في إثبات وجود الحد الأعلى. بهذه المناسبة، وضع بولزانو سلسلة من البراهين المبتكرة، وهي السلسلة التي، بمجرد بناء الأعداد الحقيقية، سترسخ التحليل الكلاسيكي على أسس متينة.

عندما يتناول بولزانو في هذه المذكرة نظرية السلاسل، فإنه يعتبر أن السلاسل المتقاربة صنفًا فرعيًا من صنف السلاسل التي يكون كل مجموع جزئي فيها محدودًا. يُعدّ بولزانو أول من أكد على السلاسل المتباعدة التي "لا تتجاوز قيمتها، مهما أردنا تمديدها، قيمة معينة". نحن هنا على الطريق الذي سيؤدي إلى مبرهنة بولزانو-فايرشتراس.

وما هو بارز في هذه المذكرة، أنها أول إثبات في تاريخ الرياضيات لمعيار كوشي. يرمز بولزانو بـ $F^n x$ ، الذي نكتبه $F_n(x)$ ، إلى مجموع الحدود n الأولى من سلسلة توابع، ويثبت أولًا أن معيار كوشي هو شرط لازم لتقارب سلسلة. ثم يحاول بولزانو إثبات العكس، أي أن هذا المعيار هو أيضًا شرطٌ كافٍ للتقارب.

ومع ذلك، فإن هذا البرهان لم يكن ولا يمكن أن يكون صحيحًا. يؤكد بولزانو أن الفرضية القائلة بوجود مقدار X تقترب منه، بقدر ما يراد، حدود المتتالية $(F_n(x))$ "لا تحتوي على أي شيء مستحيل"، ذلك لأن هذه الفرضية تتيح تحديد هذا المقدار بأي دقة نريدها. وبالتالي، يتحول إثبات وجود X إلى إثبات إمكانية الاقتراب منه، والذي لا يضمن أي شيء آخر وجوده بدقة مرغوبة مسبقًا. لكن ما دامت نظرية الأعداد الحقيقية لم تكن قد وُضعت بعد، كان من المستحيل إثبات وجود X.

في الواقع، يعتمد إثبات هذه النتيجة العكسية، مثلًا، على المبرهنة القائلة بأن كل عدد حقيقي هو نهاية لمتتالية من الأعداد الناطقة. وبالتالي، فطالما لم تكن هناك نظرية صارمة للأعداد الحقيقية، لم يكن من الممكن إثبات هذه النتيجة العكسية. كانت الحلقة المفرغة حتمية طالما لم يدرك الرياضيون بوضوح أنه، قبل تعريف النهاية، لا بد من تحديد المفاهيم التي ينطبق عليها هذا التعريف، ألا وهي مجموعة الأعداد الحقيقية. وعلى أي حال، كنا بعيدين عن مفهوم حقل تبديلي مرتب كليًا وتام.

في حوالي عام 1835، كتب بولزانو *Théorie des grandeurs* وهي محاولة واسعة، بقيت غير مكتملة، لوضع مؤلف يشمل جميع الرياضيات في عصره. نشر ج. بيرغ (J. Berg) عام 1976 القسم المتعلق بنظرية الأعداد البحتة عند بولزانو، حيث يعرض فيه نظريته حول الأعداد الصحيحة والناطقة والصماء. تُعدّ هذه أول محاولة جادة لتأسيس نظرية الأعداد الحقيقية على أساس حسابي خالص، على الرغم من أن نظرية بولزانو القائمة على طريقة تقريبية (فكرة كان قد طرحها سابقًا في مذكرته عام 1817) لم تكن صارمة.

بعد أن بنى بولزانو مجموعة الأعداد "القابلة للقياس"، انطلاقًا من الأعداد الصحيحة، وهي المجموعة التي كان من المفترض أن تتوافق مع مجموعة الأعداد الحقيقية، استنتج النظريات الأساسية في التحليل. في هذا الصدد، من المثير للاهتمام دراسة برهانه لمعيار كوشي. إن طريقة صياغة هذه المبرهنة وإثباتها تُظهر أن بولزانو كان قد فهم تمامًا التسلسل الذي يربط بين معيار كوشي وبناء مجموعة الأعداد الحقيقية. لذلك فهو يعتبر متتالية من الأعداد "القابلة للقياس" (X_n) تحقق فرضيات هذا المعيار، ويستنتج وجود عدد قابل للقياس A حيث

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A.$$

غير أن بولزانو، في برهانه، يفترض فرضية إضافية حول رتابة المتتالية (X_n)، مما يؤدي إلى استخدام ضمني للمبرهنة القائلة بأن المتتالية المتزايدة المحدودة تقبل نهاية، وهذه المبرهنة هي نتيجة من معيار كوشي.

4. معيار كوشي

في كتابه *Cours d'analyse* الصادر عام 1821، والذي فتح الطريق إلى التحليل الحديث، عرّف كوشي مفهوم النهاية على النحو التالي:

عندما تقترب القيم المتتالية لمتغير ما اقترابًا غير محدود من قيمة ثابتة، بحيث ينتهي الأمر بأن تختلف بقدر ضئيل يُراد، فإن هذه الأخيرة تُسمى نهاية لجميع القيم الأخرى. وهكذا، على سبيل المثال، العدد الأصم هو نهاية الكسور الذي تعطي قيمًا مقرّبة منه أكثر فأكثر.

من الواضح أنه للحديث عن نهاية الأعداد الناطقة، لا بد من أن تكون مجموعة الأعداد الحقيقية قد عُرّفت مسبقًا، وهو ما لم يكن كوشي على دراية به، شأنه شأن جميع رياضيي ذلك العصر.

أما الفصل السادس *Des séries convergentes et divergentes* فهو من بين أهم فصول كتاب *Cours d'analyse*. يُقدّم كوشي بطريقة طبيعية جدًا، بعد أن حدّد الترميزات الحالية، معيار كوشي اللازم والكافي لتقارب سلسلة. لا يوجد ما يقال عن برهان الشرط اللازم، أما بالنسبة لبرهان الشرط الكافي، فإنه يختصر في: "عكسيًا، عند تحقق هذه الشروط المختلفة، فإن تقارب السلسلة مضمون".

لكن كان لهذا الكتاب الذي وضعه كوشي صدى هائل في رياضيات القرن التاسع عشر، وبفضله سيصبح هذا المعيار مبرهنة أساسية في التحليل الكلاسيكي.

5. إتمام مجموعة الأعداد الناطقة

سوف نرى أنه في حوالي عام 1870 ظهرت عدة بحوث حول بناء الأعداد الحقيقية انطلاقًا من مجموعة الأعداد الناطقة المزودة بالطبولوجيا الاعتيادية المعرّفة بالقيمة المطلقة. هذه الإنشاءات هي نتيجة الوعي بأن التحليل لا يقوم على أسس متينة. أول محاولة منشورة وناجحة هي التي قام بها شارل ميراي.

1.5. النهايات "الخيالية" (Fictives) لميراي

في عامي 1868 و1869، نشر ميراي مذكرتين، ثمرة سنوات من التفكير: الأولى " ملاحظات جديدة حول النقاط الأساسية للحساب اللامتناهي وحول نشر التوابع بواسطة السلاسل "، ترسم ملامح مذهبه في التحليل -الذي يعتبره أساس كل الرياضيات- القائم على نشر التوابع إلى سلاسل تايلور. أما الثانية "ملاحظات حول طبيعة الكميات المحددة بشرط أن تكون نهايات لمتغيرات معينة" فتقدّم تبريرًا للأولى من خلال إعطاء تعريف مقنع للأعداد الصماء.

في مذكرته حول الأعداد الصماء، يشير أولًا إلى وجود مبدأين كانا في ذلك الوقت القاعدة الأساسية لجميع الأجزاء الرياضية التي يدخل فيها مفهوم النهاية. المبدأ الأول هو أن كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى (على التوالي، متناقصة ومحدودة من الأدنى) تؤول إلى نهاية. والمبدأ الثاني هو أن متتالية كوشي تؤول إلى نهاية. كتب ميراي أنه: "حتى الآن تم اعتبار هاتين القضيتين مسلّمتين". ويضيف قائلًا: "حتى ذلك الوقت تم اعتبار هذه الاقتراحات بمثابة مسلمات، ومن خلال فحصها بعناية أدرك أنه يمكن الدمج بين هذين المبدأين من أجل تجنب إدخال مفهوم العدد غير القابل للقياس في التفكير".

أثبت ميراي، لأول مرة في تاريخ الرياضيات، مبرهنة بولزانو-فايرشتراس، أي أنه من متتالية محدودة يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة. ولأجل ذلك، يثبت أولًا أن المتتالية المدروسة محدودة، ثم يبين أنه يمكن أن نستخرج منها متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى أو متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى. إذن هذه المتتالية المستخرجة تتقارب نحو نهاية l، وبما أن المتتالية المدروسة هي متتالية لكوشي فإنها تتقارب أيضًا نحو l.

أثبت ميراي إذن أن مبرهنة المتتاليات الرتيبة تستلزم مبرهنة المتتاليات المتقاربة لكوشي، وبما أن الاستلزام العكسي صحيح أيضًا، فإن المبدأين الذين وضعهما ميراي متكافئان. وكتب بعدها: "بالعودة إلى المبدأ الأول، فإن جميع الطرق تهدف إلى إثبات وجود قيمة تحقق الشروط المحددة، والتي تعتمد بشكل أساسي على بعض العمليات التي يمكن من خلالها إيجاد هذه القيمة المجهولة اعتمادًا على المعطيات. لكن المفاهيم التي توفرها المسلمات وحدها لا تسمح باكتشاف نهاية القيمة المجهولة، وبالتالي فإنها لا تكفي أيضا لإثبات وجودها".

لكن وفقًا لميراي فإن هذه الصيغ تحجب خصائص خاصة للأعداد نفسها، ويكفي استخراجها للتغلب على العقبات التي تمّت مواجهتها.

لنفرض إذن متغيرًا تدريجيًا، معناه متتالية $v=(v_n), n\in\mathbb{N}$ من الأعداد الناطقة والتي تؤول نحو عدد ناطق V، إذن v هي متتالية لكوشي. إذا كانت الآن v متتالية لكوشي ولا يوجد عدد ناطق تتقارب نحوه، فإننا نقول إن هذه المتتالية تتقارب نحو نهاية خيالية.

تقديم النهايات الخيالية سيسمح لميراي بإتمام مجموعة الأعداد الناطقة. يُعرّف أولًا مفهوم متتالية كوشي من الأعداد الناطقة المتكافئة، ويكتب أنه إذا كان متغيران مكافئين لثالث فإنهما متكافئان، وهي ما تُسمى الآن بعلاقة التكافؤ.

سيتوافق تعريف ميراي للأعداد الصماء مع الانتقال إلى حاصل القسمة بواسطة هذه العلاقة .

يلاحظ أولًا أنه إذا كانت متتاليتان v وu لهما نهايتان V وU على الترتيب، حيث V وU أعداد ناطقة و v وu متكافئتان، فإن V وU متساويان. أما إذا لم تكن للمتتاليتين v وu نهايتان ناطقتان، فسنقول إن لهما نهايتان متساويتان إذا كانتا متكافئتين.

2.5. رموز الأعداد لهاين-كانتور

نشر هاين في عام 1872 كتابه *Les éléments de la théorie des fonctions*، وهو عمل شامل عن أسس التحليل، يُقدّم أول إثبات صحيح لمبرهنة القيم الوسطى. وكتب في بداية كتابه "التقدم في نظرية التوابع مقيّد بشكل أساسي بسبب حقيقة أن بعض المبرهنات الأساسية، حتى لو تم إثباتها من قِبل أكثر العلماء ذكاءً، ما زالت موضع شك، بحيث إن نتائج البحث لا تعتبر صحيحة في كل مكان عندما تستند إلى هذه المبرهنات الأساسية. أجد تفسير ذلك في الحقيقة أن مبادئ السيد فايرشتراس قد انتشرت في نطاق واسع -بشكل مباشر من خلال دروسه وغيرها من المحاضرات الشفوية، وبشكل غير مباشر من خلال نسخ من دفاتر الملاحظات التي تحتوي على هذه الدروس- ولكن هذه المبادئ لم تنشر في نسخة أنشأها

بنفسه. وبالتالي، لا يوجد مكان يمكن فيه العثور على المبرهنات المطورة بشكل منهجي. ولكن صحة هذا التفسير تستند إلى حقيقة أن الأعداد الصماء غير معرفة بشكل كامل".

يشير هاين في بداية كتابه إلى أن نظرية الأعداد الصماء التي سيقدّمها هي من عمل جورج كانتور. هذه النظرية تشبه في جوهرها نظرية ميراي. يقدّم هاين أولًا مفهوم المتتالية الكوشية التي يسميها متتالية أعداد، ثم مفهوم المتتاليات المكافئة للمتتاليات الكوشية التي يسميها متتاليات الأعداد المتساوية. أخيرًا، فإن رموز الأعداد هي أصناف التكافؤ التي تمثل الأعداد الصماء المنشأة.

قدّم أيضًا، من بين أمور أخرى، إثباتًا دقيقًا لمبرهنة القيم الوسطى، بالإضافة إلى مبرهنة أن دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود تدرك حدودها العليا والسفلى.

تعتبر مذكرة هاين مهمة أيضًا في ما قبل تاريخ الطوبولوجيا العامة، لأن إثباته للمبرهنة القائلة بأن الدالة الحقيقية المستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a, b]$ هي دالة مستمرة بانتظام على هذا المجال، تستخدم تغطية $[a, b]$ بعدد محدود من المجالات الجزئية، هذه العملية ستؤدي إلى مفهوم المجموعة المتراصة.

3.5. مقاطع ديدكيند

في كتابه *Continuité et nombres irrationnels*، الذي نُشر عام 1872، قدّم ديدكيند نظرية جديدة للأعداد الصماء، بالإضافة إلى أفكاره حول أسس التحليل. في بداية مقدمة كتابه، يوضح ديدكيند أن الأفكار التي سيقدّمها تعود إلى خريف عام 1858، عندما كان أستاذًا في المعهد السويسري للتكنولوجيا في زيورخ، وكان مضطرًا لأول مرة إلى تدريس أساسيات الحساب التفاضلي. في الواقع، كان يلقي، خلال فصل الشتاء من عام 1858-1859، دورة بعنوان Première partie du calcul différentiel et intégral، وفي هذه المناسبة، شعر "بنقص أساس علمي حقيقي للحساب."

الفقرة الأولى من كتابه بعنوان *Propriétés des nombres rationnels*، ويفترض ديدكيند فيها أن نظرية الأعداد الناطقة قد تم إنشاؤها. يُقدّم لمحة سريعة عن تطور الرياضيات التي أدّت، بعد إنشاء الأعداد الصحيحة السالبة والأعداد الصحيحة، إلى مجموعة الأعداد الناطقة التي تمتلك خاصية الاستقرار للعمليات الأربع الأساسية في الرياضيات، وهي الخاصية التي قدّمها ديدكيند كميزة لمفهوم المجال، الذي أدخله في الطبعة الثانية من كتاب *Leçons sur la théorie des nombres* لديريكليه.

تمتلك مجموعة الأعداد الناطقة خاصية مميزة، وهي:

إذا كان a عددًا ناطقًا، فيمكن تقسيم مجموعة الأعداد الناطقة إلى مجموعتين A_1 و A_2 حيث من أجل كل عدد $a_1 \in A_1$ نجد $a_1 < a$، ومن أجل كل عدد $a_2 \in A_2$ نجد $a < a_2$. العدد a يمكن أن ينتمي إلى A_1 أو A_2.

نلاحظ أن هذا التعريف للمقاطع في مجموعة الأعداد الناطقة، والذي يتضمن تقسيم هذه المجموعة إلى مجموعتين جزئيتين، يعتمد على التعريف الديدكيندي للأعداد على مفهوم المجموعة نفسها.

في الفقرة الثالثة، *Continuité de la droite*، يذكر ديدكيند أن الإغريق كانوا يعرفون بالفعل عددًا لا نهائيًا من النقاط على الخط المستقيم التي لا تتوافق مع أي عدد ناطق. وبالتالي، فإن الخط المستقيم غني بالنقاط أكثر من مجال الأعداد الناطقة، وبالنسبة لديدكيند، فإن هذا الاكتمال هو السبب وراء إنشاء أعداد جديدة، حتى يكون مجال الأعداد له نفس الاستمرارية للخط المستقيم.

ومع ذلك، فإن مقارنة مجموعة الأعداد الناطقة والخط المستقيم تبرز الاستمرارية الأخيرة. ويطرح ديدكيند حينئذ السؤال الأساسي: "ما هي هذه الاستمرارية في جوهرها؟". الإجابة، وفقًا لديدكيند، ستسمح بإيجاد أساس علمي لدراسة جميع المجالات المستمرة.

يشير ديدكيند إلى أنه وجد أخيرًا ما كان يبحث عنه بعد تفكير طويل، وهو أن جوهر الاستمرارية يكمن في التعريف التالي: "إذا تم تقسيم جميع نقاط المستقيم إلى مجموعتين، بحيث تتواجد كل نقطة من المجموعة الأولى على يسار كل نقطة من المجموعة الثانية، فإن هناك نقطة وحيدة، وهي التي تولد هذا التقسيم لجميع النقاط إلى مجموعتين، هذا المقطع (coupure) للمستقيم إلى قسمين."

الفقرة الرابعة بعنوان *Création des nombres irrationnels*، وهكذا، فإننا نُشير مسبقًا إلى أنه سيتم إنشاء هذه الأعداد.

لنفترض أي تقسيم لمجموعة الأعداد الناطقة إلى مجموعتين فرعيتين A_1 و A_2 حيث يكون كل عدد حقيقي a_1 من A_1 أصغر من أي عدد حقيقي a_2 من A_2. سنقول إن هذا التقسيم هو مقطع، ونرمز إليه بِ (A_1, A_2). وبالتالي، يمكننا القول إن عددًا ناطقًا يولد مقطعًا، ويملك هذا المقطع الخاصية التالية: إما أن A_1 لها أكبر عنصر، أو أن A_2 لها أصغر عنصر. وبالعكس، إذا كان المقطع يمتلك هذه الخاصية، فإنها تُوَلد بواسطة أكبر عنصر من A_1 أو أصغر عنصر من A_2.

ثم يُقدّم ديدكيند مثالًا على عدد لا نهائي من المقاطع التي لا تولّدها أعدادًا ناطقة. بالنسبة له، فإن هذا الأمر - وهو أن جميع المقاطع لا تولدها أعدادًا ناطقة - هو الذي تكمن فيه عدم استمرارية مجالات الأعداد الناطقة، ويكتب: "الآن، كلما وجدت مقطع (A_1, A_2) لا يولدها عدد ناطق، فإننا ننشئ بذلك عددًا جديدًا، وهو عدد أصم a الذي نعتبره معرفًا بواسطة هذا المقطع (A_1, A_2). سنقول إن العدد a يتوافق مع هذا المقطع أو أنه يولد هذا المقطع".

في الفقرة الخامسة، *Continuité du domaine des nombres réels*، يوضح ديدكيند أن مجموعة الأعداد الحقيقية المنشأة $\mathbb{R}$ لها الخاصية التالية:

إذا كان $a \in \mathbb{R}$، فإنه يمكننا تقسيم المجموعة $\mathbb{R}$ إلى مجموعتين جزئيتين A_1 و A_2 حيث يكون من أجل كل $a_1 \in A_1$ نجد $a > a_1$ ومن أجل كل $a_2 \in A_2$ نجد $a < a_2$ بالنسبة لـ a نفسه، $a = \sup A_1 = \inf A_2$، يمكن أن يكون إما $a \in A_1$ أو $a \in A_2$، وسنقول إن هذه القسمة مولدة بواسطة a.

يثبت ديدكيند بعد ذلك أن مجموعة الأعداد الحقيقية المنشأة تمتلك أيضًا خاصية الاستمرارية، أي لدينا المبرهنة التالية:

إذا قمنا بتقسيم المجموعة $\mathbb{R}$ إلى مجموعتين جزئيتين A_1 و A_2 بحيث يكون من أجل كل $a_1 \in A_1$ ومن أجل كل $a_2 \in A_2$ لدينا $a_1 < a_2$، فعندئذٍ يوجد عدد a وحيد يولّد هذا التقسيم.

الفقرة الأخيرة من الكتاب بعنوان *Analyse infinitésimal*، مما يشير بوضوح إلى أن ديدكيند، بعد بناء نظريته في الأعداد الحقيقية، سيستخدمها لتأسيس أسس التحليل. في هذه الفقرة الأخيرة، يهدف ديدكيند إلى تسليط الضوء على العلاقة التي تربط بين الاعتبارات السابقة وبعض المبرهنات الأساسية للتحليل المتناهي الصغر. يبدأ أولًا بتقديم تعريف للنهاية، ويلاحظ أن المبرهنة التي تنص على أن "كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى (أو متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى) لها نهاية مكافئة لـ "مبدأ الاستمرارية"، الذي تم ذكره سابقًا.

ومع ذلك، فقد قدّم ديدكيند في مخطوط عام 1882 البرهان -باستخدام المقاطع- على مبرهنة أن كل مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية لها حد أعلى وحد أدنى. تؤدي هذه المبرهنة مباشرة إلى المبرهنة السابقة حول المتتاليات الرتيبة. سبق لنا أن لاحظنا أن هذه المبرهنة حول المتتاليات الرتيبة هي نتيجة لمعيار كوشي. ينتج عن ذلك، بالأخص، أن نظرية ديدكيند للأعداد الحقيقية مكافئة لنظرية ميراي-هاين-كانتور.

مراسلة ديدكيند مع ليبشيتز حول نظريته في الأعداد الصماء في عام 1876 مهمة، لأن ديدكيند يركز كثيرًا على مفهوم الإتمام. يلخص ديدكيند نظريته حول الأعداد الحقيقية في رسالته المؤرخة 10 يونيو 1876 على النحو التالي:

بافتراض أن مجموعة الأعداد الناطقة قد تم إنشاؤها، يمكننا دون إدخال أي عناصر غريبة، إتمامها بفضل مفهوم المقطع. تمتلك المجموعة $\mathbb{R}$ الناتجة خاصية كونها مستمرة.

ردًا على اعتراضات ليبشيتز، أنه يمكن العثور بالفعل في كتاب الأصول لأقليدس على نظرية جيدة للأعداد الصماء، يؤكد ديدكيند أنه في الكتاب الخامس من الأصول -الذي يستشهد به ليبشيتز- لا يوجد شيء يسمح باستنتاج أن هناك مجالًا من الكميات أكثر إتمامًا من المجال المقابل للكميات الناطقة. ثم يشير ديدكيند إلى الكتاب العاشر من الأصول، حيث تتم دراسة الكميات غير القابلة للقياس، يقدّم حينها الاعتراض الأساسي على نظرية يودكسوس -المعروضة في الكتاب العاشر- وكذلك على تلك الخاصة بخلفائه: وهو أنه في إتمام مجموعة الأعداد الناطقة لا يذكرون أبدًا إغلاق هذا الإتمام، أي مفهوم مجال من الكميات المستمرة بحيث إذا تم تقسيم مجموعة هذه الكميات إلى مجموعتين بحيث تكون كل كمية من المجموعة الأولى أصغر من كل كمية من المجموعة الثانية، فإن هناك إما في المجموعة الأولى كمية هي الأكبر، أو في المجموعة الثانية كمية هي الأصغر. إذا لم يتم تضمين هذه الخاصية بشكل صريح في مفهوم مجال الكميات، فإنه يظل غير مكتمل، ومن المستحيل تعريف، في مثل هذا المجال، جميع العمليات الحسابية.

أوغستان-لويس كوشي Cauchy (1789 –1857)