الأعداد القابلة للإنشاء (1)

حمزة خليف

أستاذ الرياضيات (متقاعد)

مقدمة

باديئ ذي بدء، تجدر الإشارة إلى أن كل الإنشاءات الهندسية الواردة في كتب إقليدس الثلاثة عشر، "أصول إقليدس"، والتي تمثل مرآة تلك الحقبة اليونانية تمت بالمسطرة والبيكار (المِدْور). وحتى قبل إقليدس، اهتم الرياضياتيون اليونانيون بالمسطرة والبيكار، لكنهم سرعان ما اصطدموا بعقبات كبرى حين تبيّن لهم وجود مسائل لم يفلحوا في حلها بهاتين الأداتين. من بين هذه المسائل التي ذاع صيتها: تربيع الدائرة، وتضعيف المكعب وتثليث الزاوية، ثمّ انضمت إليها لاحقا مسألة إنشاء المضلعات المنتظمة.

كانت ثقة الرياضياتيين اليونانيين بالمسطرة والبيكار كبيرة إلى حد بعيد، حتى أنهم لم يفكروا البتة في استحالة مثل هذه الإنشاءات. لم تتم الإجابة الدقيقة عن هذه المسائل إلا في بداية الثلث الثاني من القرن التاسع عشر.

يبدو أن المبرر الأول لتفضيل اليونانيين للمسطرة والبيكار هو أن أبسط المنحنيات الهندسية هي المستقيم والدائرة وأن أبسط الأدوات لإنشائهما هي، دون ريب، المسطرة والبيكار.

لقد بيّن ديكارت (1637) إمكانية إنشاء القطع المستقيمة التي أطوالها

$$a+b\text{، }|a-b|\text{، }ab\text{، }\frac{a}{b}\text{، }\sqrt{a}$$

انطلاقا من قطعتين طولاهما a و b بالمسطرة والبيكار.

في 1837 نجح ڤانتزل (Vantzel)، بعد استئناف أعمال ديكارت ومستعينا بلغة المعادلات الجبرية التي طوّرها آبل (Abel)، في تقديم برهان مُرضٍ لاستحالة حلّ مسألتي تضعيف المكعب وتثليث الزاوية. كما سمح عمله "أبحاث في وسائل معرفة ما إذا كانت مسألة هندسية قابلة للحل بالمسطرة والبيكار" بلستكمال عمل ڤاوُس (Gauss) حول المضلعات المنتظمة القابلة للإنشاء (بالمسطرة والبيكار). كما بيّن في ما يخص مسألة تربيع الدائرة أن قيمة العدد π ليست الأهم، بل طبيعة هذا العدد، أي هل هذا العدد جبري أم متسام؟ وقد أجاب عن هذا السؤال ليندمان (Lindemann) سنة 1882.

1. النقط والأعداد القابلة للإنشاء

هيّا بنا نُعرّف بدقة مفهوم نقطة قابلة للإنشاء بالمسطرة والبيكار.

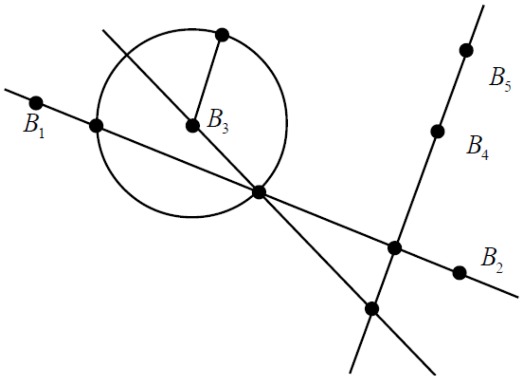
الفكرة هي الانطلاق من مجموعة منتهية من النقط الأساسية

$$\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}.$$

نستعمل نوعين من الإنشاء فقط (الشكل 1.1) :

- رسم المستقيم الذي يشمل نقطتين من $\mathscr{B}$ بالمسطرة.
- رسم الدائرة التي مركزها نقطة من $\mathscr{B}$ ونصف قطرها المسافة بين نقطتين من $\mathscr{B}$ بالبيكار.

نقط تلاقي المستقيمات والدوائر المرسومة بهذه الطريقة تعطي نقطا أخرى يمكن استعمالها لإنشاء مستقيمات ودوائر مثل نقط المجموعة $\mathscr{B}$ الأساسية.



الشكل 1.1

على سبيل المثال، المستقيمان (B_1B_2) و (B_4B_5) قابلان للإنشاء. وكذلك الحال بالنسبة إلى الدائرة التي مركزها B_3 ونصف قطرها B_4B_5.

نستخلص من ذلك أن تعريف نقطة قابلة للإنشاء، انطلاقا من المجموعة $\mathscr{B}$، يجب ألا يستعمل نقط $\mathscr{B}$ فقط، بل أيضا النقط المنشأة انطلاقا من $\mathscr{B}$.

يقودنا ذلك إلى التعريف الآتي:

1.1. تعريف

ليكن $\mathscr{P}$ مستويا إقليديا و $\mathscr{B}$ مجموعة منتهية من $\mathscr{P}$ تشمل نقطتين على الأقل.

▶ نقول إن النقطة M من $\mathscr{P}$ قابلة للإنشاء بالمسطرة والبيكار، انطلاقا من $\mathscr{B}$، إذا وُجدت متتالية M_1، M_2، ...، $M_n = M$ من $\mathscr{P}$، تنتهي في M بحيث، من أجل كل j محصور بين 1 و n، تكون M_j نقطة تلاقي:

- إما مستقيمين؛
- وإما مستقيم ودائرة؛
- وإما دائرتين؛

بحيث تكون هذه المستقيمات والدوائر ناتجة من استعمال المجموعة $\mathscr{E}_j = \mathscr{B} \cup \{M_1, \ldots, M_{j-1}\}$ بالطريقة الآتية:

- كل مستقيم يشمل نقطتين مختلفتين من $\mathscr{E}_j$ ؛
- كل دائرة تكون مركزة في نقطة من $\mathscr{E}_j$ ويكون نصف قطرها المسافة بين نقطتين من $\mathscr{E}_j$.

▶ كل مستقيم يشمل نقطتين قابلتين للإنشاء يدعى مستقيما قابلا للإنشاء.

▶ كل دائرة مركزها نقطة قابلة للإنشاء ونصف قطرها المسافة بين نقطتين قابلتين للإنشاء تدعى قابلة للإنشاء.

2.1. ملحوظة

كل نقطة من $\mathscr{B}$، تقبل الإنشاء بالمسطرة والبيكار انطلاقا من نقطة من $\mathscr{B}$. يمكن اعتبار ذلك مجرد اصطلاح مكمّل للتعريف السابق، كما يمكن الاستغناء عن هذا الاصطلاح لأنه إذا كانت A، B نقطتين من $\mathscr{B}$ فإن B، على سبيل المثال، نقطة تلاق للمستقيم (AB) مع الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AB.

نكتفي في هذا العرض بالحالة التي تكون فيها المجموعة $\mathscr{B}$ أبسط ما يمكن، أي مختصرة على نقطتين.
من أجل ذلك نُثبّت نقطتين O و I من المستوي $\mathscr{P}$، أي نختار $\mathscr{B}=\{O,I\}$ بحيث يكون $\overline{OI}=1$ (بعد اختيار وحدة طول ومنحى).

3.1. تعريف

نقول إن عددا حقيقيا يقبل الإنشاء إذا كان (هذا العدد) أحد إحداثيي نقطة قابلة للإنشاء في المعلم $(O;I,J)$.

4.1. أمثلة

الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها OI تلتقي المستقيم (OI) في نقطة ثانية I' بحيث $\overline{OI'}=-1$.

الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها II' تلتقي المستقيم (OI) في نقطتين I_2' و I_2 بحيث $\overline{OI_2}=-\overline{OI_2'}=2$.

نستطيع أن نستمر هكذا للحصول على كل نقطة فاصلتها $n\in\mathbf{Z}$، كتلاقي دائرة مركزها O ونصف قطرها عدد صحيح r، $n-1\geq r$، مع المستقيم (OI).

الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 2 تلتقي الدائرة التي مركزها I' ونصف قطرها 2 في نقطتين J و J' بحيث يتعامد المستقيم (JJ') مع المستقيم (OI) في O وبحيث يكون $\overline{OJ}=-\overline{OJ'}=1$.

يمكن الحصول على كل نقط المستقيم (JJ') التي تراتيبها في المعلم $(O;I,J)$ أعداد صحيحة كنقط تلاقي دوائر أنصاف أقطارها أعداد صحيحة (ش.1.4.1).

نستخلص من ذلك أن كل الأعداد الصحيحة قابلة للإنشاء.

يمكن الحصول على كل نقط المستوي التي إحداثياتها في المعلم $(O;I,J)$ أعداد صحيحة بهذه الطريقة، أي كنقط تلاقي مستقيمات ودوائر خاصة.

الدائرتان اللتان مركزاهما I و I' ونصف قطرهما $II'=2$ تلتقيان في نقطة G ترتيبها موجب. لدينا $\overline{OG}=\sqrt{3}$، ومنه فالعدد $\sqrt{3}$ قابل للإنشاء.

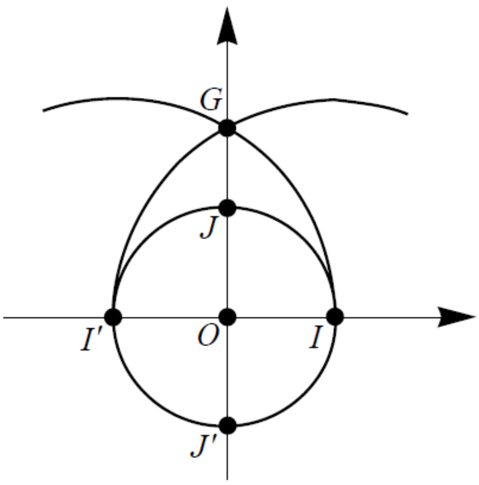
الدائرة التي قطرها $J'G$ تلتقي محور الفواصل في نقطة H فاصلتها موجبة تحقق العلاقة (الشكل 2.4.1)

$$OH^2=OG\times OJ'.$$

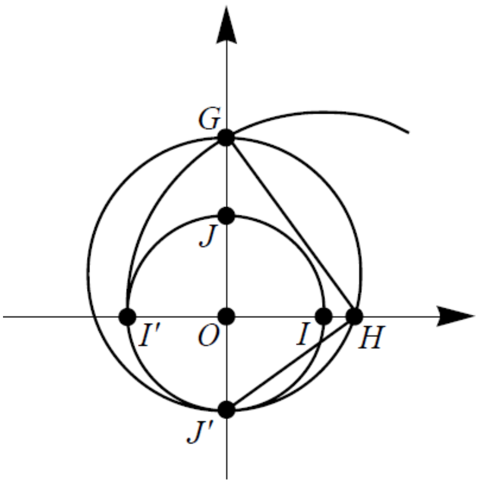
ومنه

$$\overline{OH}=\sqrt[4]{3}.$$

أي أن العدد الحقيقي $\sqrt[4]{3}$ قابل للإنشاء.



الشكل 2.4.1



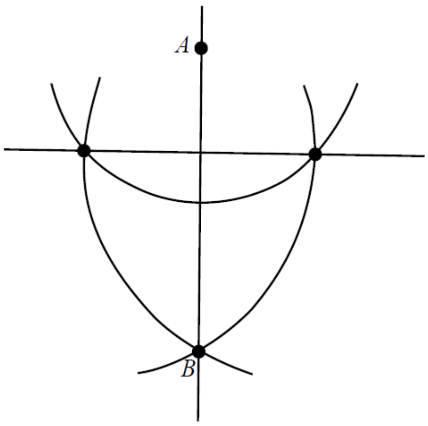
الشكل 1.4.1

5.1. نتائج

لدينا النتائج الآتية:

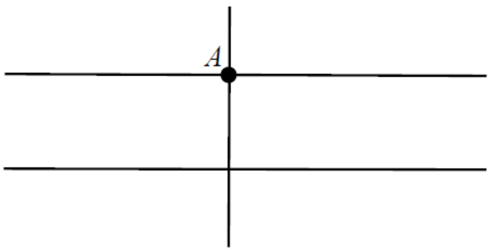
نتيجة 1- إذا كانت النقطة A قابلة للإنشاء فإن نظيرتها بالنسبة إلى O قابلة للإنشاء.

نتيجة 2- كل مستقيم يتعامد مع مستقيم قابل للإنشاء ويشمل نقطة قابلة للإنشاء هو مستقيم قابل للإنشاء (الشكل1.5.1).



الشكل 1.5.1

نتيجة 3- كل مستقيم يوازي مستقيما قابلا للإنشاء ويشمل نقطة قابلة للإنشاء هو مستقيم قابل للإنشاء (الشكل 2.5.1).

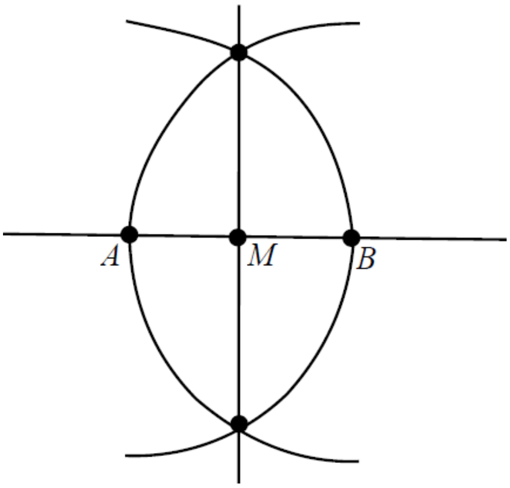


الشكل 2.5.1

نتيجة 4- نظيرة نقطة قابلة للإنشاء بالنسبة إلى مستقيم قابل للإنشاء نقطة قابلة للإنشاء.

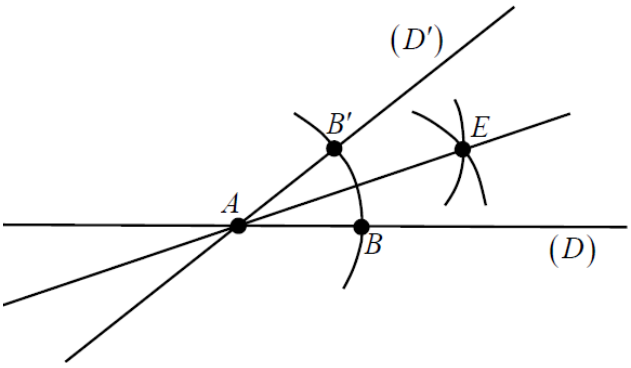
نتيجة 5- منتصف ثنائية نقطية "قابلة للإنشاء" قابل للإنشاء.

نتيجة 6- إذا كانت النقطتان A و B قابلتين للإنشاء فإن محور القطعة $[AB]$ قابل للإنشاء (الشكل 3.5.1).



الشكل 3.5.1

نتيجة 7- منصف زاوية مستقيمين قابلين للإنشاء قابل للإنشاء (الشكل 4.5.1).

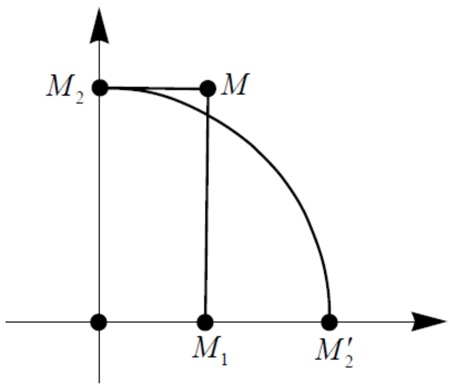


الشكل 4.5.1

نتيجة 8- يكون العدد r قابلا للإنشاء إذا وفقط إذا كانت نقطة محور الفواصل (التراتيب على التوالي) ذات الفاصلة (الترتيب على التوالي) r قابلة للإنشاء.

إذا كانت نقطة محور الفواصل ذات الفاصلة r قابلة للإنشاء فإن r قابل للإنشاء حسب التعريف.

إذا كان r قابلا للإنشاء فإنه أحد إحداثيي نقطة M قابلة للإنشاء. M_1 و M_2 قابلان للإنشاء. إذا كان r فاصلة لـ M فإنه فاصلة لـ M_1 وإذا كان ترتيبا لـ M فإنه ترتيب لـ M_2 وأيضا فاصلة لـ M_1'. ومنه النتيجة (الشكل 5.5.1).



الشكل 5.5.1

نتيجة 9- إذا كانت النقطة A قابلة للإنشاء وكان العدد الحقيقي r قابلا للإنشاء فإن الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $|r|$ قابلة للإنشاء.

6.1. تنبيه

نقط مستقيم قابل للإنشاء ليست كلها قابلة للإنشاء.

7.1. توطئة

إذا كان r عددا حقيقيا قابلا للإنشاء فإنه توجد نقطة A من المستقيم (OI) بحيث $\overline{OA}=r$.

2. حقل الأعداد القابلة للإنشاء

1.2. مبرهنة

مجموعة الأعداد القابلة للإنشاء $\mathscr{C}$ حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$، مستقر بالنسبة إلى الجذر التربيعي.

الإثبات

يكون حقل جزئي K من $\mathbf{R}$ مستقرا بالنسبة إلى الجذر التربيعي إذا صح الاستلزام الآتي:

$$(a\in K, a\geq 0)\Rightarrow \sqrt{a}\in K.$$

العددان 1 و 0 ينتميان إلى $\mathscr{C}$، نتيجة لملحوظة سابقة.

1) إذا كان a عنصرا من $\mathscr{C}$ فإن $-a$ عنصر من $\mathscr{C}$.

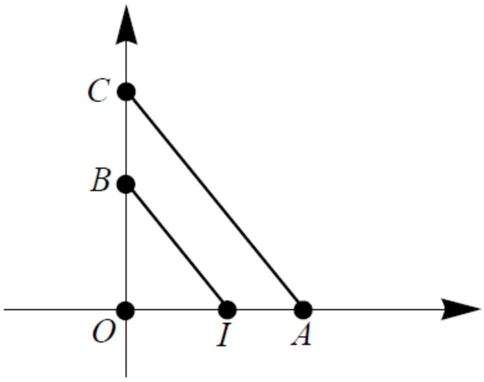
لتكن A النقطة من محور الفواصل ذات الفاصلة a، الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها OA تلتقي محور الفواصل في نقطة ثانية A' فاصلتها $-a$.

2) إذا كان a و b ينتميان إلى $\mathscr{C}$ فإن $a+b$ ينتمي إلى $\mathscr{C}$.

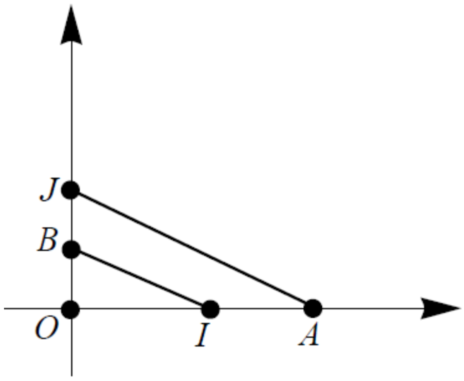
لتكن A و B نقطتي محور الفواصل بحيث $\overline{OA}=a$ و $\overline{AB}=b$. النقطة A قابلة للإنشاء حسب النتيجة 8 والنقطة B قابلة للإنشاء حسب النتيجة 9، باستعمال الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $|b|$. لدينا $\overline{OB}=a+b$.

ومنه $a+b\in\mathscr{C}$.

3) إذا كان a, b ينتميان إلى $\mathscr{C}$ فإن ab ينتمي إلى $\mathscr{C}$.



الشكل 1.1.2



الشكل 2.1.2

نفرض أن لا أحد من العددين منعدم. لتكن النقطة A من محور الفواصل بحيث $\overline{OA}=a$ والنقطة B من محور التراتيب بحيث $\overline{OB}=b$ (الشكل 1.1.2).

المستقيم الموازي لـ (IB) والمنشأ من A يلتقي محور التراتيب في C. من مبرهنة طالس ينتج

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}.$$

ومنه $\overline{OC}=ab$.

4) إذا كان $a\in\mathscr{C}$ و $a\neq 0$ فإن $\frac{1}{a}\in\mathscr{C}$.

لتكن A النقطة من محور الفواصل بحيث $\overline{OA}=a$. المستقيم الذي يوازي المستقيم (AJ) والمنشأ من I يلتقي محور التراتيب في النقطة B (الشكل 2.1.2). من مبرهنة طالس ينتج

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}.$$

ومنه

$$\overline{OB}=\frac{1}{a}.$$

5) إذا كان $a\in\mathscr{C}$ و $0\leq a$ فإن $\sqrt{a}\in\mathscr{C}$.

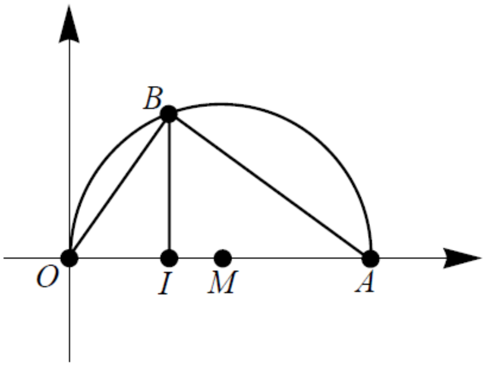
نفرض $0<a$ ، ولتكن النقطة A من محور الفواصل بحيث $\overline{IA}=a$ و M منتصف الثنائية النقطية (O,A) ، (الشكل 3.1.2). المستقيم العمودي على محور الفواصل والذي يشمل النقطة I يلتقي الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها OM في نقطة B ترتيبها موجب. ونظرا إلى أن المثلث OBA قائم فإن $IB^2=OI\,.\,IA$.

ومنه فإن

$$IB=\sqrt{a}$$

أي أن $\sqrt{a}$ قابل للإنشاء لأنه ترتيب نقطة قابلة للإنشاء.

ومنه صحة المبرهنة.



الشكل 3.1.2

2.2. ملحوظة

نذكّر أن $\mathbf{Q}$ هو أصغر حقل جزئي من $\mathbf{R}$ (بالنسبة إلى علاقة الاحتواء). بالفعل، ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbf{R}$. لدينا $1 \in K$.

استقرار K بالنسبة إلى الجمع يستلزم $\mathbf{N} \subset K$ والاستقرار بالنسبة إلى النظير يستلزم $\mathbf{Z} \subset K$ ؛ أما الاستقرار بالنسبة إلى الجداء والمقلوب فيستلزم $\mathbf{Q} \subset K$. يستخلص من ذلك أن $\mathbf{R} \subset \mathscr{C} \subset \mathbf{Q}$.

المراجع

1. M. Abdeldjaouad: Nombre constructibles, Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, Miftah Al Hissab, 69, Juin 1985.
2. J.-C. Carrega, Théorie des corps, La règle et le compas, Hermann, 1989.
3. R. & A. Douady: Algèbre et théories galoisiennes, tome 2, Théories galoisiennes, CEDIC/Fernand Nathan, 1979.
4. J.-P. Escofier: Théorie de Galois, Dunod, 2000.
5. H. Lebesgue: Leçons sur les constructions géométriques, Jacques Gabay, 1987.
6. M. Reversat & B. Zhang: Cours de théorie des corps, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2003.