البحث عن حل مسألة

عبد الله رحماني

مفتش الرياضيات ومدرّب التلاميذ المشاركين في المنافسات الأولمبية

إن تقدم الأمم والشعوب في الوقت الحاضر لا يعتمد على ما لديهم من إمكانات مادية فحسب، بل يعتمد أيضا على ما لديهم من إمكانات بشرية تتمثل في الأفراد المبتكرين المبدعين الذين لديهم القدرة على مواجهة المشكلات والعمل على حلها في جميع ميادين الحياة. إنه لا يوجد شيء يمكن أن يسهم في رفع مستوى رفاهية الأمم والشعوب أكثر من رفع مستوى الأداء الإبداعي لدى هذه الشعوب.

وهذا ينطبق على مجتمعنا الذي هو في أمس الحاجة إلى أفراد مبدعين قادرين على تقديم الحلول لمشكلات الحياة اليومية، لذا ينبغي أن تصبح تنمية قدرات التفكير الإبداعي لدى الطلاب أحد الأهداف التربوية الهامة التي تسعى إلى تحقيقها مناهجنا التربوية، وفي مقدمتها منهاج مادة الرياضيات.

لكن المتأمل في الواقع الميداني لعملية تدريس الرياضيات في أي مرحلة من مراحل الدراسة يلاحظ تدني التحصيل لدى التلاميذ، بل هناك الكثير ممن يجدون صعوبة بالغة فيما هو بسيط للغاية، كما أن هناك اعدادا كبيرة من التلاميذ ينفرون من مادة الرياضيات.

لقد حظي تدريس الرياضيات باهتمام التربويين ولازال كذلك في كل دول العالم، وهذا لدور هذه المادة الدراسية في تنشيط العقل البشري ودورها في تحقيق النجاح للأفراد والأمم التي أدركت هذا الأمر. ومن ثمّ صارت مختلف الدول، لاسيما المتقدمة منها، تتسابق في التخطيط لأحدث المناهج الرياضياتية وإبداع أجود الطرق لتنفيذها. من المهم أن نلاحظ بأنه مهما يكن لتلك الدول من أهداف وسياسات وخطط تربوية ومناهج وتنظيمات إدارية ووسائل، فإن ذلك كله لا يفوق الدور الأساسي والإيجابي الذي يقوم به الأستاذ في تسخير تلك الإمكانيات للوصول للأهداف المنشودة. أليس الأستاذ هو صانع التدريس، وهو أداته التخطيطية والتنفيذية والتقويمية؟ لذا وجب الاهتمام به وتزويده بأحدث الطرق والاستراتيجيات التي تؤهله لجعل المتعلم ينتج ويولد المعرفة بنفسه. إن "جودة أي نظام تعليمي تقاس بمستوى أساتذته" كما أشار إلى ذلك تقرير منظمة اليونسكو لعام 2016.

إذا ما أمضى أستاذ الرياضيات الوقت في تمرين الطلاب على عمليات تكرارية فإنه يقتل شوقهم ويعرقل نموّ أذهانهم ويضيع عليهم الفرصة أما إذا هو أثار حب الاستطلاع عندهم بمسائل تتناسب مع معلوماتهم وساعدهم على حل هذه المسائل عن طريق أسئلة مشجعة فقد يكسبهم تذوقا للتفكير المستقل وبعضا من وسائله.

1. كيف نبحث عن حل مسألة؟

أثناء البحث عن حل مسألة كثيرا، ما نغير وجهة نظرنا والزاوية التي ننظر منها إلى المسألة، فننتقل من موقف إلى موقف، مرة بعد مرة. وفهمنا للمسألة قد يكون في البدء ناقصا، فإذا تقدمنا في الحل تتغير وجهة نظرنا، وهي تتغير أيضا عندما نشارف اكتشاف الحل.

تتمثل مراحل حل مسألة حسب جورج بوليا في أربع مراحل هي :

المرحلة 1: فهم المسألة، وهنا ينبغي أن نتبين المطلوب بوضوح. يجب أن نفهم المسألة. فلا شيء أسوأ من مباشرة العمليات الحسابية أو الانشائية قبل فهم المسألة : ما المجهول؟ ما المعطيات؟ ما الشرط؟ هل يمكن أن يتحقق

الشرط؟ هل يكفي الشرط لتعيين المجهول ...أم هناك نقص؟ ارسم شكلا، ضع الرموز المناسبة، افصل أجزاء الشرط بعضها عن بعض...

المرحلة 2: فهم الروابط بين عناصر المسألة وصلة المجهول بالمعطيات كي تتجلى لنا فكرة الحل ورسم خطته. عليك بإيجاد الرابطة بين المجهول والمعطيات، وابتكار الخطة: هل صادفتك المسألة من قبل؟ هل رأيتها بشكل آخر؟ هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك؟ هل تعرف مبرهنة قد تفيدك؟ انظر إلى المجهول وحاول أن تتذكر مسألة فيها هذا المجهول أو مجهول يشبهه.

إن كانت هناك مسألة ذات صلة بمسألتك، وقد حلت من قبل، هل يمكنك استعمالها؟ هل يمكنك أن تستعمل نتيجتها؟ هل يمكنك استغلال طريقتها؟ ينبغي عليك أن تُدخل عنصرا جديدا مساعدا كي يمكنك استعمالها. إذا لم تستطع أن تحل هذه المسألة فجرب أن تحل في البداية مسألة ذات صلة بها.

هل تذكر مسألة ذات صلة بها أسهل حلا؟ أو مسألة أعم؟ أو مسألة أخص؟ هل يمكنك أن تحل جزءا من المسألة؟ خذ جزءا من الشرط وأهمل الباقي. فإلى أي حد يتحدد الآن المجهول؟ كيف يمكنه أن يتغير؟ هل يمكنك أن تستنتج شيئا مفيدا من المعطيات؟ هل يمكنك أن تفكر في معطيات أخرى مناسبة لإيجاد المجهول؟ إذا لزم الأمر، هل يمكنك أن تغير المجهول أو المعطيات أو كليهما إلى مجهول ومعطيات أقرب؟ هل استعملت كل المعطيات؟ هل استعملت الشرط كله؟ هل أخذت بعين الاعتبار كل المبادئ الجوهرية في المسألة؟

المرحلة 3: تنفيذ الخطة. نفذ خطت الحل، واثناء تنفيذ خطتك، انجز كل خطوة. هل يمكنك أن ترى بوضوح أن الخطوة صحيحة؟ هل يمكن أن تثبت صحتها؟

المرحلة 4: مراجعة الحل حين يكتمل ومناقشته. افحص الحل الذي حصلت عليه : هل يمكنك أن تحقق النتيجة؟ هل يمكنك أن تحقق الطريقة؟ هل يمكنك إيجاد النتيجة بطريقة أخرى؟ هل يمكنك أن تتصورها بسرعة؟ هل يمكنك استعمال النتيجة أو الطريقة في مسألة أخرى؟

2. مثالان

مثال1: اوجد قطر متوازي المستطيلات إذا عرفت طوله وعرضه وارتفاعه.

يمكن أن يجعلها المدرس مسألة ملموسة (قطر حجرة الدراسة التي هي متوازي مستطيلات يمكن قياس أو تقدير أبعادها). تُوجه هذه المسألة البسيطة لطلاب التعليم المتوسط بعد دراسة مبرهنة فيثاغورس.

اليك الحوار الذي قد ينشا بين المدرس والطلاب:

- **فهم المسألة:** ما المجهول؟ "قطر متوازي المستطيلات.

ما المعطيات؟ طول متوازي المستطيلات وعرضه وارتفاعه.

لنضع الرموز: ماذا نسمي المجهول؟ " x ". أيُّ رموز تختار للطول والعرض والارتفاع؟ " a ، b ، c".

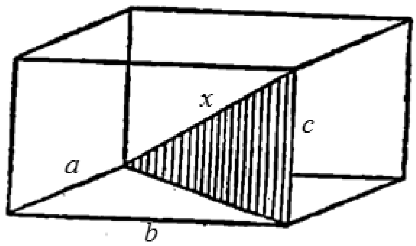
ما الشرط الذي يربط بين a ، b ، c ، x ؟ x قطر متوازي المستطيلات الذي أبعاده a ، b ، c.

هل الشرط يكفي لتعيين المجهول؟ نعم. فإذا عرفنا a ، b ، c نعرف متوازي المستطيلات، وإذا عرفناه يتعين قطره.

- **ابتكار الخطة:** ربما كانت المسافة بين فهم المسألة وابتكار خطة حلها مسافة طويلة وملتوية.

مما لا شك فيه أنه يتعذر الوصول إلى فكرة جيدة إن كانت معرفتنا للموضوع غير كافية. فالفكرة الجيدة تُبنى على الخبرة السابقة والمعارف المكتسبة. والذاكرة وحدها لا تكفي لجلب هذه الفكرة، ولا يمكن الحصول عليها إلا إذا استعدنا في الذهن بعض الحقائق المتعلقة بالموضوع: تجميع مواد البناء وحده لا يكفي لبناء البيت، بيد أن تشييده لا يتم بدون المواد اللازمة.

والمواد اللازمة لحل مسألة رياضياتية هي حقائق تتعلق بها حصلنا عليها من معارف سبق أن تعلمناها أو مسائل سبق أن حللناها أو مبرهنات سبق أن برهنا عليها. لذا فمن المناسب أن نبدأ بالسؤال: هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك هذه؟



انظر إلى المجهول. هل تعرف مسألة ورد فيها هذا المجهول؟

حسنا. ما المجهول؟ قطر متوازي المستطيلات.

هل تعرف أي مسألة فيها هذا المجهول؟ كلا.

هل تعرف أي مسألة فيها مجهول يشبهه؟

انتبه إلى أن القطر هو قطعة مستقيم، ألم تحل مسألة مجهولها طول قطعة مستقيم؟

بطبيعة الحال، حللنا مسائل كهذه، مثل إيجاد طول ضلع قائم.

احسنت، فهنا مسألة ذات صلة بمسألتنا، وقد حُلت من قبل. فهل يمكن أن نستعملها؟

لاحظ أن المسألة التي تذكرتها تتعلق بمثلث، فهل في هذا الشكل مثلث؟

وهنا نأمل أن يكون هذا التلميح واضحا بما يكفي لاستحضار فكرة الحل بطريقة المثلث القائم. ولكن يجدر بالمدرّس أن يتوقع فشل هذا التلميح الصريح. وفي هذه الحالة، ينبغي أن يواصل في سرد التلميحات المناسبة. أتريد مثلثا في الشكل؟ ما نوع المثلث الذي تريده؟

هل تستطيع إيجاد القطر لو كان ضلعا في مثلث؟

فإذا توصل الطلبة بمساعدة المدرّس إلى إدخال العنصر المساعد الحاسم، وهو المثلث القائم الذي أحد أضلاعه ارتفاع متوازي المستطيلات والضلع الآخر قطر قاعدته (انظر الشكل أعلاه).

إنها فكرة صائبة أن نرسم هذا المثلث، وها قد حصلنا عليه فهل حصلنا على المجهول؟

المجهول وتر مثلث قائم، ونستطيع أن نوجده بواسطة مبرهنة فيثاغورس.

تستطيع ذلك عندما يكون ضلعا المثلث معلومين، فهل هما كذلك؟

أحدهما أعطي، وهو c ، والثاني لا يصعب إيجاده فهو وتر في مثلث قائم آخر.

احسنت. اذن فقد حصلت على خطة.

- **تنفيذ الخطة**: إن ابتكار الخطة، أي إدراك فكرة الحل، ليس بالأمر السهل. فهو يستدعي المعلومات التي سبق اكتسابها، ويحتاج إلى تركيز الذهن على الهدف. وأما تنفيذ الخطة فأسهل بكثير.

ليكن y قطر المثلث القائم الذي بعداه a ، b. لدينا $y^2 = a^2 + b^2$ و $x^2 = y^2 + c^2$. ومنه $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$

إذن $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

- **مراجعة الحل**: حتى أمهر الطلاب - عندما يحصلون على الحل ويكتبون خطواته- يقفلون دفاترهم، وبذلك يفقدون ناحية من أهم نواحي الحل وأكثرها إفادة. فهم إذا ما راجعوا الحل بعد اكتماله، وأعادوا النظر في النتيجة، وتفحصوها، وتمعنوا في الخطى التي أدت بهم إلى هذه النتيجة ستزداد معلوماتهم تركيزا ويزدادون مقدرة على حل المسائل.

مثال2: يجري الماء إلى وعاء مخروطي الشكل بسرعة v، والوعاء على شكل مخروط دوراني قائم قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل. إذا كان نصف قطر القاعدة R، وارتفاع المخروط h، فما سرعة ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون عمقه y؟ وما القيمة العددية للمجهول y عندما يكون $R=4u$، $h=3u$، $v=2u^3/m$، و $y=1u$؟

u وحدة طول معطاة. نفترض هنا أن الطلاب يعرفون أبسط مبادئ الاشتقاق وفكرة سرعة التغير.

ما المعطيات؟ في البداية، السؤال يقترح التغاضي عن القيم العددية ونعمل بالرموز، فنعبر عن المجهول بدلالة R، h، v، y

ما المجهول؟ سرعة ارتفاع الماء عندما يكون عمقه y.

ما معنى ذلك؟ هل يمكن التعبير عنه بشكل آخر؟ السرعة التي يتزايد بها عمق الماء.

وما معنى هذا؟ هل يمكن التعبير عنه بشكل آخر جديد؟ سرعة تغير العمق.

هذا صحيح. سرعة تغير y. ما هي سرعة التغير؟ (ارجع إلى التعريف). المشتق هو سرعة تغير الدالة.

صحيح. والآن هل y دالة؟ قلنا علينا أن نتغاضى عن قيمة y العددية. فهل ترى أن y متغيرة؟

نعلم أن عمق الماء y يتغير مع الزمن. إذن y دالة لأي متغير؟ دالة للزمن t.

جيد. لنضع الرموز المناسبة. كيف نرمز إلى سرعة تغير y بالرموز الرياضية؟ $\frac{dy}{dt}$.

جيد. فهذا هو المجهول، والمطلوب أن نعبر عنه بالرموز R، h، v، y. وأحد هذه الرموز هو السرعة. فما هو؟ v هو سرعة انسكاب الماء في الاناء. أيمكن التعبير عنه بصورة أخرى؟

v هو سرعة تزايد حجم الماء في الاناء. أيمكن التعبير عنه بصورة أخرى جديدة؟

كيف نكتبه بالرموز المناسبة؟ $v=\frac{dV}{dt}$. ما هي V؟ هي حجم الماء عندما يكون الزمن t.

جيد. فالمطلوب أن نعبر عن $\frac{dy}{dt}$ بدلالة R، h، $\frac{dV}{dt}$، y. فكيف يكون ذلك؟

هل V و y مستقلان؟ كلا، إذا زاد y يزداد V أيضا. إذن فهناك صلة. ما هي؟ $V=\frac{1}{3}\pi r^2 y$ و $r=y\frac{R}{h}$. وبالتالي $V=\frac{\pi R^2 y^3}{3h^2}$. ومنه $\frac{dV}{dt}=\frac{\pi R^2 y^2}{h^2}\frac{dy}{dt}$.

القيمة العددية: إذا كان $R=4$، $h=3$، $v=2$ و $y=1$ فإن $2=\frac{16\times 1\times\pi}{9}\frac{dy}{dt}$ ومنه $\frac{dy}{dt}=\frac{9}{8\pi}u/m$.

3. طريقة الحل (محاورة)

- **التعرف على المسألة**: من أين أبدأ؟ أبدأ من نص المسألة.

ماذا أعمل؟ تخيّل المسألة بأوضح وأجلى ما تستطيع. خذها كمجموعة عامة، ولا تهتم بالتفاصيل.

وماذا يفيدني ذلك؟ يجب أن تفهم المسألة وتألفها، وينطبع مرماها في ذهنك. ثم أنت إذ تمعن النظر فيها قد تنشّط ذهنك، وتهيئه لاستعادة ما يتعلق بها من حقائق.

- **العمل من أجل فهم أعمق**: من أين أبدأ؟ أبدأ أيضا من نص المسألة. ابدأ عندما يتضح هذا النص لديك، وينطبع في ذهنك بحيث لا يمكن أن تنساه ولو انشغلت عنه إلى حين.

ماذا أعمل؟ افصل الأجزاء الرئيسية في المسألة بعضها عن بعض. ففي "مسائل الاثبات" يكون المفروض والمطلوب هما الجزأين الرئيسيين، وفي "مسائل الايجاد" يكون المجهول والمعطيات والشرط هي الأجزاء الرئيسية.

راجع الأجزاء الرئيسية في المسألة واحدا واحدا، خذها فرادى، وخذها في مجموعات متباينة، واربط تفاصيلها بعضها ببعض واربط كلا منها بالمسألة.

وماذا يفيدني ذلك؟ يجب أن تجلو التفاصيل التي قد تلعب دورها فيما بعد في الحل.

- **البحث عن فكرة نافعة**: من أين أبدأ؟ ابدأ بالنظر في اجزاء المسألة الرئيسية. ابدأ حينما تكون قد رتبت هذه الأجزاء بوضوح واستوعبتها في ذهنك بوضوح بفضل ما سبق أن صنعت وصارت ذاكرتك مهيأة للاستجابة.

ماذا أعمل؟ قلّب المسألة من وجوه عدة، وفتش عن ارتباطات بينها وبين معلوماتك السابقة.

قلّب المسألة من وجوه عدة: سلط الأضواء على اجزائها المتباينة. تفحص تفاصيلها المختلفة.

تفحّص هذه التفاصيل من نواحٍ شتى. ضمها في مجموعات شتى. هاجمها من اتجاهات شتى. حاول أن تفتش عن معنى جديد في كل واحد من التفاصيل كمجموعة. فتش عن ارتباطات بين المسألة وبين معلوماتك السابقة. حاول أن تتذكر ما الذي ساعدك في مثل هذا الموقف في الماضي. حاول أن تتعرف على شيء مألوف عندك فيما تتفحصه، وحاول أن تجد شيئا يفيدك فيما تتعرف عليه.

ماذا يمكن أن أدرك؟ فكرة نافعة، بل ربما فكرة حاسمة تريك بنظرة خاطفة الطريق الى النهاية.

كيف تكون الفكرة نافعة؟ إنها تريك الطريق أو بعضه. إنها توحي إليك بوضوح كيف تسير. والأفكار تتفاوت كمالا ونقصا.

ماذا أعمل بالفكرة الناقصة؟ تتأمّل فيها، فإن رأيتها مضمونة الفائدة وجب أن تسير الى حيث تقودك. وهناك راجع موقفك مرة أخرى، فأنت الآن بفضل هذه الفكرة في موقف جديد. انظر في هذا الموقف الجديد من جهات مختلفة وفتش عن ارتباطات بمعارفك السابقة.

وماذا يفيدني تكرار النظر والتفتيش؟ قد يقودك إلى فكرة جديدة. وقد تقودك الفكرة الجديدة إلى الحل، أو قد تحتاج إلى بضع الأفكار الأخرى... بل حتى إذا أنت لم تعثر إلى حين على فكرة جديدة ذات قيمة فتأكد أن ادراكك للمسألة قد زاد اكتمالا أو زاد تماسكا أو زاد تجانسا أو توازنا.

- **تنفيذ الخطة**: من اين ابدأ؟ ابدأ من الفكرة السعيدة التي قادتك إلى الحل. ابدأ حينما تشعر أنك أوثقت القبض على الرابطة الرئيسية، وتثق أنك تستطيع ان تستجلب التفاصيل الثانوية التي قد تلزم.

ماذا أعمل؟ زد قبضتك وثوقا واعمل بالتفصيل كل العمليات الجبرية والهندسية التي سبق أن رأيتها ممكنة. واقنع نفسك بصحة كل خطوة بالتفكير الشكلي، أو بالبداهة، أو بكليهما إن استطعت. وإذا كانت مسألتك معقدة، يمكنك أن تحقق الخطوات الكبيرة، ثم تناول الصغيرة بعد ذلك.

وماذا يفيدني ذلك؟ التأكد من صحة حل كل خطوة.

- **المراجعة**: من أين ابدأ؟ من الحل كاملا وصحيحا بكل تفاصيله.

ماذا أعمل؟ انظر في الحل من شتى الوجوه، وحاول ان تعثر على روابط مع معلوماتك السابقة. انظر في تفاصيل الحل وحاول ان تجعلها مبسطة بقدر ما تستطيع. مر على خطواته وحاول أن تجعلها أقصر. حاول أن تنفذ إلى مجمل الحل بلمحة خاطفة. حاول أن تعدل خطواته الكبيرة أو الصغيرة. حاول أن تحسن الحل كله، وأن تجعله بديهيا متسقا مع معلوماتك السابقة اتساقا طبيعيا بقدر الإمكان.

تفحص الطريقة التي قادتك إليه. حاول أن ترى معالمها، وأن تستفيد منها في مسائل أخرى. وتفحص أيضا النتيجة بنفس الطريقة.

ماذا يفيدني ذلك؟ قد تجد حلا جديدا أحسن، أو قد تعثر على حقائق جديدة شائقة.

وفي كل الأحوال، إذا عودت نفسك على مراجعة حلولك وسبر غورها بهذا الشكل، فستكتسب معرفة منظمة تنظيما جيدا، مهيأة في متناول يدك، وستنمي ملكتك في حل المسائل.

4. تغيير المسألة

تحاول الحشَرة الفرار من النافذة المغلقة، وهي تكرّ عليها مرة بعد مرة دون محاولة الفرار من نافذة أخرى بجوارها مفتوحة... هي النافذة التي منها دخلت إلى الغرفة.

أما الفأر فقد يتصرف تصرفا أذكى. فهو ينوّع محاولاته، ويجرب كل الإمكانيات. أما الرجل فهو قادر ، أو ينبغي أن يكون قادرا، على تنويع محاولاته تنويعا أذكى وعلى تجريب الإمكانيات بفهم أوسع على أن يتعلم من أخطائه وفشله.

والنصيحة السائرة "حاول وحاول من جديد" هي نصيحة جيدة تتبعها الحشَرة ويتبعها الفأر ويتبعها الإنسان. ولكن الذي ينجح أكثر من غيره فهو الذي يغيّر مسألته بذكاء.

فعندما نحاول أن ننتقل من فهمنا الأول للمسألة إلى فهم أصلح وأنسب ننظر إليها من نواحٍ عدة، ونحاول أن نرى لها وجوها عدة، ونجاحنا في حل المسألة يعتمد على اختيارنا للوجه الذي ننظر إليه وعلى مهاجمتنا حصنها من ناحيته الضعيفة. فلكي نرى أي وجوهها هو الأنسب لنا نجرب نواحيها المختلفة ووجوهها المختلفة. إننا نغير المسألة.

مثال3: جد حجم قطعة هرم مربع القاعدة حيث طول ضلع القاعدة السفلية a وطول ضلع القاعدة العلوية b وارتفاعه h. سؤال يمكن أن يلقى على طلبة يلمون بقوانين الحجوم للموشور والهرم.

- **إرشاد:** إن لم يأت الطلبة بفكرة من عندهم، فبإمكان المدرس أن يبدأ بتغيير المعطيات: لنقل $a > b$

فماذا يحدث لو تزايدت b حتى صارت تساوي a ؟ تصير القطعة موشورا، ويصير الحجم a^2h.

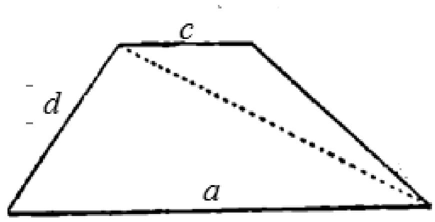
ما ذا يحدث لو تناقصت b حتى صارت صفرا؟ تصير القطعة هرما ويصير الحجم $\frac{1}{3}a^2h$.

فتغيير المعطيات يكسب المسألة متعة، ثم إنه قد يوحي باستعمال هذه النتائج بطريقة ما. نلاحظ أن القانون الذي نسعى للحصول عليه يجب أن يكون a^2h عندما $a=b$ و $\frac{1}{3}a^2h$ عندما تكون $b=0$.

ومن المفيد أن نتعرف للنتيجة التي نريد الحصول عليها.

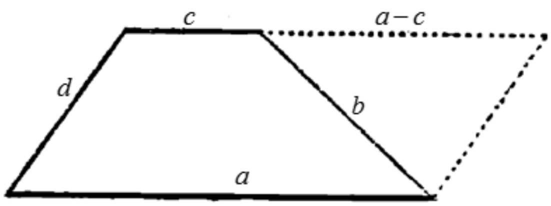
باعتبار حجم قطعة الهرم هي الفرق بين حجمي هرمين ومن تشابه مثلثين نجد $v=\frac{h}{3}\left[a^2+ab+b^2\right]$

مثال4: ارسم شبه منحرف علمت أطوال أضلاعه الأربعة a، b، c، d .



حل: لتكن $a=AB$ القاعدة الكبرى.

إن لم تخطر على بالنا فكرة، فلنبدأ بتغيير المعطيات. فماذا يحدث لو نقصت c حتى صارت صفرا؟ يصير شبه المنحرف مثلثا. والمثلث شكل مألوف بسيط نستطيع أن نرسمه من شتى المعطيات. فلعل هناك فائدة من ادخال هذا المثلث في الشكل. ونحن نستطيع ذلك إذا نحن رسمنا خطا مساعدا واحدا هو قطر شبه المنحرف. ولكن إذا فحصنا المثلث نجد أنه يكاد لا يفيدنا في شيء، فنحن نعرف فيه ضلعين a، d وينبغي أن نعرف ثلاثة معطيات. فلنجرب شيئا آخر: ماذا يحدث لو تزايدت c حتى صارت تساوي a ؟

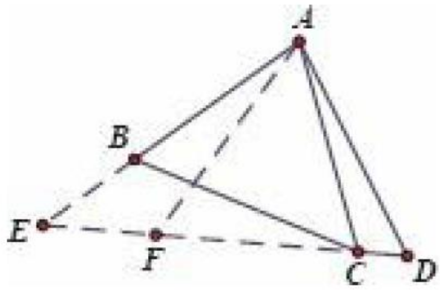


يصير شبه المنحرف متوازي أضلاع. هل يمكن أن نستعمله؟ إن قليلا من التفكير يوجه انتباهنا إلى المثلث الذي أضفناه إلى شبه المنحرف الأصلي برسم متوازي الاضلاع. وهذا مثلث يسهل رسمه، فنحن نعرف معطيات ثلاثة هي أضلاعه b، d، $a-c$.

فبتغيير المسألة الأصلية (رسم شبه المنحرف) وقعنا على مسألة أسهل (رسم المثلث)، وباستعمال نتيجة المسألة المساعدة، نحلّ المسألة الاصلية بسهولة (نكمل متوازي الاضلاع). ومثالنا هذا نموذجي. وفشَلُنا في محاولتنا الأولى أيضا نموذجي. فإذا أعدنا النظر فيها نجد أنها لم تكن عديمة الجدوى، بل كانت تحمل فكرة ما أو فائدة ما. إنها أتاحت لنا على الأقل التفكير في رسم مثلث كواسطة للغاية التي نتوخاها. ونحن حصلنا على محاولتنا الثانية الناجحة بتعديل محاولتنا الأولى الفاشلة: غيّرنا c إذ انقصناه في المحاولة الأولى وزدناه في المحاولة الثانية.

مثال5: يعطى رباعي $ABCD$ حيث $AD = BC$ و $\angle BAC + \angle ACD = 180°$. برهن أن $\angle B = \angle D$.

حل مختصر:



يبدو أنه ليس من السهل تطبيق الشرط $\angle BAC + \angle ACD = 180°$. كذلك لا يبدو كيف يساعد الشرط $AD = BC$ في الاستنتاج لأن الضلعين متباعدان. لكن إذا مددنا كلا من (AB) ، (CD) نحصل على مثلث متساوي الساقين AEC .

إذا كان $\angle BAC = \angle ACD = 90°$ فمن الواضح أن المثلثين القائمين ACD ، ABC متقايسان والرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. ومنه $\angle B = \angle D$.

دعنا نفرض خلاف ذلك دون فقدان العمومية : نفرض $\angle BAC < 90°$. ونمدد (AB) ، (CD) فيتقاطعان في E .

لدينا $\angle BAC = \angle ACE$ و $AE = CE$. نختار بعد ذلك نقطة F من $[CE]$ بحيث $AF = AD$ فيكون $\angle D = \angle AFD$ (انظر الشكل أعلاه).

نلاحظ أن المثلثين ACB ، ACF متقايسان. ومنه $\angle B = \angle AFD = \angle D$.

يمكن أيضا إنشاء نقطة G بحيث يكون المثلثان ACD و BGC متقايسين. ومنه نجد في الرباعي $ABGC$ أن $\angle A + \angle G = 180°$. ومن ثمّ فهو رباعي دائري ولدينا $AC = BG$. ومنه $\angle ABC = \angle ACG = \angle ADC$.